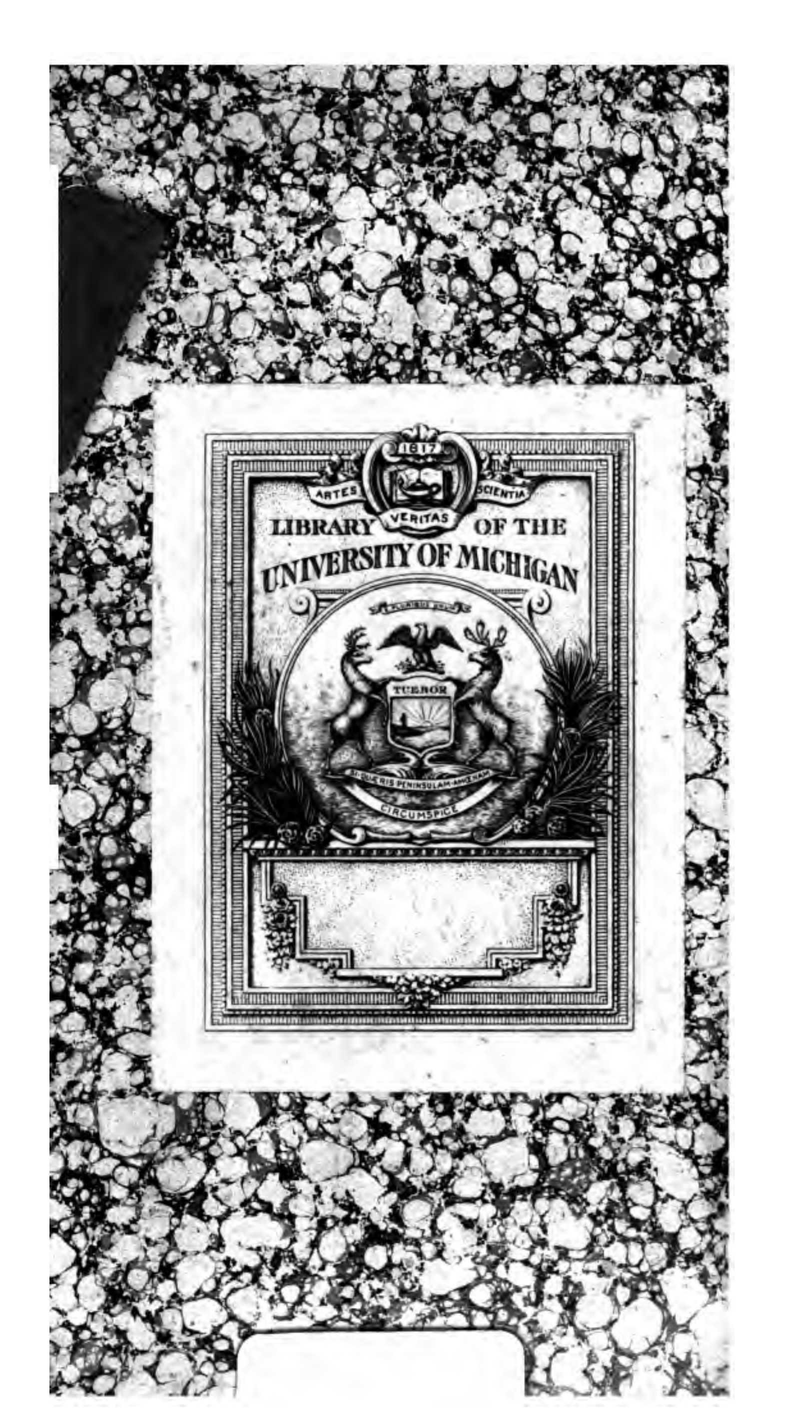
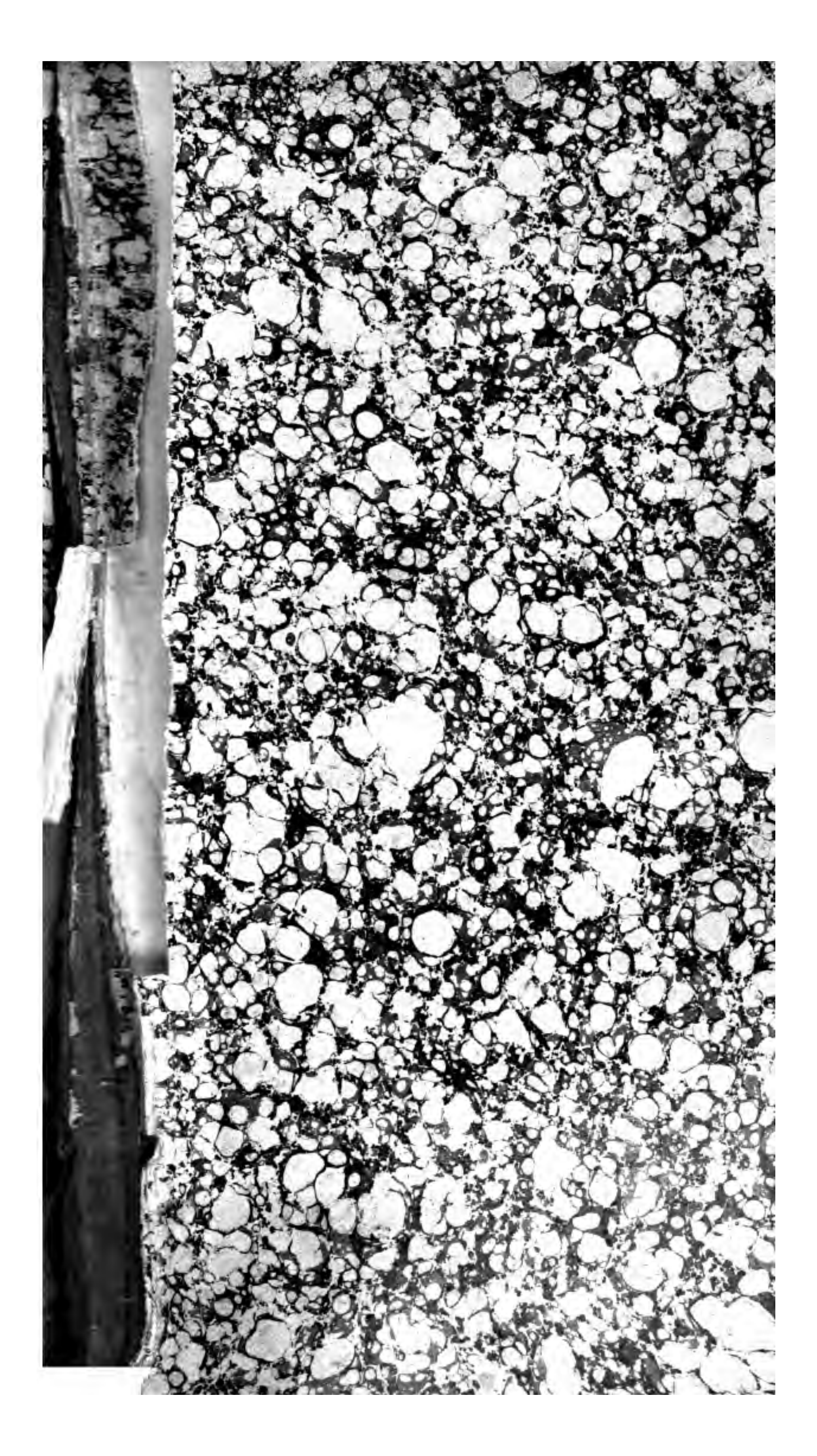

BUHR A
a39015 01804344 1b


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



CAMBRIDGE



Lehrbuch

der

mathematischen

und

physischen Geographie

von

Dr. J. C. Eduard Schmidt,

Privatdocent auf der Universität Göttingen.

Erster Theil.

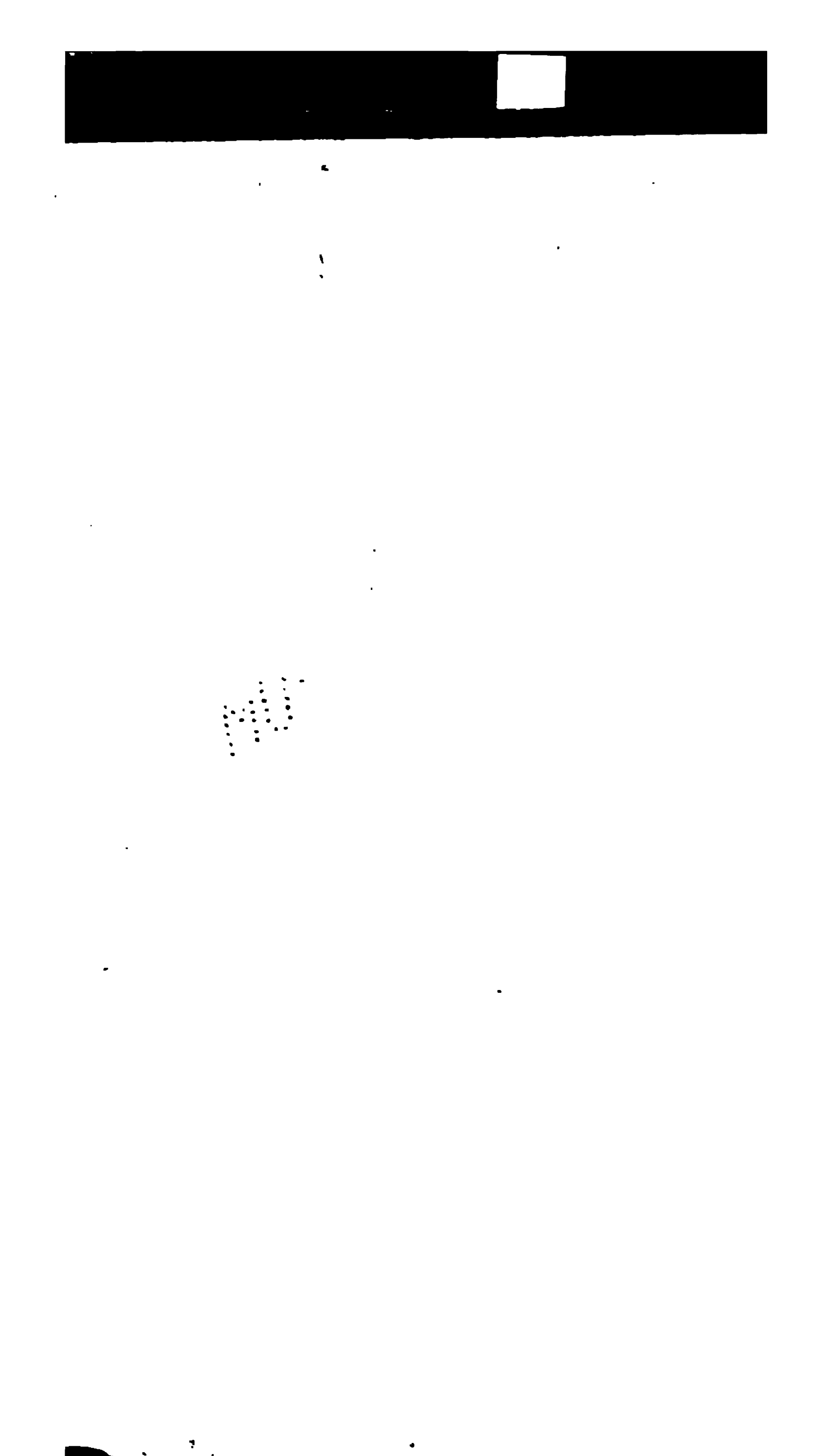
Mathematische Geographie.

Mit 3 Kupfertafeln.

Göttingen,

bei Vandenhoeck und Ruprecht.

1829.



Vorrede.

Obgleich mehrere schätzbare Lehrbücher der mathematischen und physischen Geographie vorhanden sind, so schien es mir aus dem Grunde nicht überflüssig denselben ein neues hinzuzufügen, weil sie sich blos auf eine ganz elementare Darstellung der hierher gehörigen Gegenstände beschränken, die daher nothwendigerweise gewöhnlich sehr mager ausfallen mussten. Auch findet man in denselben meistentheils blos die Resultate, die durch die Bemühungen der Gelehrten gefunden sind, angegeben, ohne nähere Beschreibung der dabei angewendeten Mittel nnd Berechnungen, wodurch der Leser nicht in den Stand gesetzt wird, selbst etwas für die Erweiterung der geographischen Wissenschaften zu thun. Ich habe mich daher in vorliegendem Werke so viel als möglich bemüht, die in dieser Wissenschaft vorhandenen Resultate durch mathematische Theorien ausführlich zu entwickeln, und dem Leser Anleitung zu geben, dieselben durch eigene Beobachtungen und Bemerkungen zu erweitern. Mancher würde vielleicht

eine ausführlichere Theorie der perspectivischen Kartenprojectionen zweckmässig gefunden haben, allein ich wollte den Raum, um diesem Lehrbuche nicht einen zu grossen Umfang zu geben, lieber zu wichtigern und interessantern Untersuchungen aufsparen, da dieser Gegenstand in vielen andern Büchern, die sowohl von der Geographie als auch von der Perspective handeln, ausführlich aus einander gesetzt ist, um so mehr, da ich die nicht perspectivische Abbildungsart der Oberflächen, die auf einem weit richtigern Grundsatz beruht, und zu keiner Verzerrung des Bildes Anlass giebt, ausführlich genug dargestellt habe, um jeden aufmerksamen Leser in den Stand zu setzen, die allgemeine Theorie auf alle besondern Fälle anzuwenden.

Rücksichtlich der in den §§. 231—239. gegebenen Dimensionen des Erdsphäroïds, wird es mir erlaubt seyn, hier eine kleine Correction einzuschalten, die aus einer Abänderung der beiden ostindischen und der englischen Messung hervorgeht. Nach Kater's Angabe in den Philosophical Transactions 1821, der eine genaue Untersuchung der bei den erwähnten Messungen gebrauchten Maassstäbe veranstaltet hat, müssen nämlich die Längen der Bogen in Ostindien um 0,000018 vermindert, und die in England um 0,000007 vermehrt werden. Hierdurch werden die Gleichungen, welche die Grössen ω, Ω, ε enthalten

$$\omega' = \omega'$$
$$\omega'' = \omega' + 0{,}56 + 5{,}70\,u + 25{,}51\,y$$
$$\Omega' = \Omega'$$
$$\Omega'' = \Omega' - 0{,}53 + 10{,}21\,u + 47{,}66\,y$$
$$\Omega''' = \Omega' + 3{,}47 + 17{,}43\,u + 80{,}13\,y$$
$$\Omega^{\text{iv}} = \Omega' - 1{,}35 + 24{,}98\,u + 113{,}63\,y$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'$$
$$\varepsilon'' = \varepsilon' + 2{,}82 + 3{,}09\,u - 3{,}18\,y$$
$$\varepsilon''' = \varepsilon' + 4{,}89 + 4{,}41\,u - 4{,}68\,y$$
$$\varepsilon^{IV} = \varepsilon' + 3{,}72 + 5{,}78\,u - 6{,}34\,y$$
$$\varepsilon^{V} = \varepsilon' - 1{,}99 + 10{,}22\,u - 11{,}83\,y.$$

Setzt man diese an die Stelle der im Texte angegebenen, so erhält man für u, y die Fundamentalgleichungen

$$72''13 = 2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y$$
$$200{,}77 = 1763{,}16\,u + 9348{,}66\,y,$$

und hieraus die Abplattung $= \frac{1}{297{,}479}$, den 360sten Theil des Erdmeridians = 57008,655 Toisen. Die halbe grosse Axe wird = 3271852,318 Toisen, und die halbe kleine = 3260853,703 Toisen. Die Fehler, welche man bei den beobachteten Polhöhen voraussetzen muss, sind dann $\pi' = +1{,}79$; $\pi'' = -1{,}79$; $\omega' = -0{,}54$; $\omega'' = +0{,}55$; $\Omega' = -1{,}73$; $\Omega'' = -1{,}21$; $\Omega''' = +3{,}50$; $\Omega^{IV} = -0{,}57$; $\varphi' = +3{,}39$; $\varphi'' = +2{,}56$; $\varphi''' = +0{,}83$; $\varphi^{IV} = -4{,}15$; $\varphi^{V} = -1{,}01$; $\varphi^{VI} = -5{,}88$; $\varphi^{VII} = +0{,}36$; $\varphi^{VIII} = +3{,}88$; $\gamma' = -2{,}74$; $\gamma'' = +2{,}74$; $\varepsilon' = -1{,}88$; $\varepsilon'' = +0{,}95$; $\varepsilon''' = +3{,}01$; $\varepsilon^{IV} = +1{,}83$; $\varepsilon^{V} = -3{,}89$; $\sigma' = +1{,}33$; $\sigma'' = -1{,}33$. Der mittlere Fehler einer Bestimmung ergiebt sich = 3''1403, und die Gränzen der Genauigkeit, oder die mittlern zu befürchtenden Fehler in dem Nenner der Abplattung = 10,5 Einheiten, im 360sten Theile des Erdmeridians = 4,26 Toisen. In diesen Resultaten dürften vielleicht Struve's Messungen, sobald sie bekannt sind, noch einige Aenderungen hervorbringen.

In dem Abschnitte, welcher von der Bestimmung der geographischen Lage der Oerter handelt, habe

vorzüglich die Methoden aus einander gesetzt, für Reisende, welche nur kleinere Instrumente sich führen, zur Berechnung ihres Beobachtungs-es nothwendig sind, und die analytischen Formeln t Beispielen erläutert, zu denen ich vorzüglich die eobachtungen welche Herr von Humboldt auf iner Reise nach Südamerica angestellt hat, benutzt abe. Ich hätte freilich gewünscht, mich über den geodätischen Theil etwas weitläufiger auslassen zu können, und die kleinen Correctionen, die bei den grössern Dreiecken wegen der sphäroïdischen Gestalt der Erde etwa nöthig wären, aus einander setzen, allein theils mangelte der Raum, theils kann auch jeder selbst, der das was in einem der frühern Abschnitte über die geodätische Linie gesagt ist, mi Aufmerksamkeit durchliesst, diese Gegenstände sic selbst leicht entwickeln, wenn er in den Fall käme diese Theorie anwenden zu müssen.

Göttingen im Juni 1829.

Dr. J. C. Eduard Schm

Inhaltsverzeichniss.

Oberfläche eines flüssigen Körpers, auf welchen gegebe
ıfte wirken. §. 291. Beweis, dass der Druck auf der Ob
:he senkrecht steht. §. 292. Bei der Bestimmung der (
lt der Erdoberfläche kommen die gegenseitigen Anziehung
r Theile der Erde, und die Centrifugalkräfte als wirker
·äfte in Betracht. Es ergiebt sich, dass die Gestalt eines
ɔtischen Sphäroïds der Gleichung für das Gleichgewicht (
lüssigkeit, wenn sie als homogen angenommen wird, Geni
:istet. §. 293. 294. Entwickelung des Ausdrucks der Schw
n der Oberfläche der Erde. §. 295 — 298. Bestimmung (
ıumerischen Werthes der Abplattung und der Pendellän
j. 299. Es giebt immer zwei elliptische Sphäroïde für das Glei
gewicht der Flüssigkeit, von denen das eine nur sehr wen
das andere sehr stark abgeplattet ist. §. 200. — 302. Bewe
dass ausser diesen beiden kein anderes Sphäroïd gefunden w
den kann. §. 303 — 320. Allgemeinere Untersuchungen ül
die Gestalt der Erde, unter der Annahme, dass die Dichtigk
der Flüssigkeit nicht constant ist. §. 321 — 336. Betrachtu
des Falles, wo die Schichten von gleicher Dichtigkeit ähnlic
Oberflächen bilden, und die sonst feste Erde, mit einer se
wenig tiefen Schicht von Wasser bedeckt ist. Berücksicht
man nur die erste Potenz der Abplattung, so zeigt sich k
Unterschied zwischen der Gestalt der Oberfläche der Flüssigk
und der eines elliptischen Sphäroïds. §. 337 — 348. Nim
man die zweite Potenz der Abplattung mit in Rechnung,
ergiebt sich eine Abweichung der Gestalt der Oberfläche
der des elliptischen Sphäroïds. §. 349 — 354. Entwick
des Gesetzes der Schwere an der Oberfläche der Erde;
der angegebenen Voraussetzung. §. 355 — 361. Betrac
des Falles, wo die ganze Erde als aus einer tropfbaren Fl
keit von ungleichförmiger Dichtigkeit bestehend ange
wird. §. 362. 363. Wird blos die erste Potenz der Abpla
in Rechnung gezogen, so nimmt der Radius Vector der
dem Quadrat des Sinus der Breite proportional, vom Aeq
zum Pol ab, welches in so weit mit der Gestalt eines e
schen Sphäroïds übereinstimmt; doch lässt sich die Gröss
Abplattung ohne die Annahme eines bestimmten Gesetz
Dichtigkeit nicht weiter bestimmen. §. 364 — 368. Bestin
des Gesetzes der Schwere an der Oberfläche der Erde.
giebt sich der merkwürdige Satz, dass, wie auch die
keit im Innern beschaffen seyn mag, die Summe der Z
der Schwere vom Aequator zum Pol und der Abplattu
mer das Fünfhalbfache des Verhältnisses der Schwungk
Schwere am Aequator seyn muss, wenn man die Sch
Aequator als Einheit annimmt. §. 369 — 377. Darstel
Formeln die zur Bestimmung des zweiten Coefficier
zweiten Potenz der Abplattung dienen. §. 378. Die d
hörigen Differentialgleichungen lassen sich zwar im All
nicht integriren, allein es zeigt sich doch, dass si
Gestalt eines elliptischen Sphäroïds nicht übereinstim
379. Beweis, dass nur dann, wenn die Erde als aus ei
förmigen Flüssigkeit bestehend, betrachtet wird, c
Gestalt eines elliptischen Sphäroïds annimmt. §. 380

Mathematische Geographie.

Die mathematische Geographie hat zu ihrem Gegenstande die Bestimmung der Grösse und Gestalt der Erde, nebst ihrer Lage im Weltraume, so wie die richtige Darstellung der auf der Erdoberfläche befindlichen, merkwürdigern Punkte. Da alle diese Bestimmungen sich nicht ohne Beihülfe der astronomischen Lehren machen lassen, so wird es nothwendig, dass die zu diesem Behufe dienlichen Sätze aus der Astronomie theils im Allgemeinen vorausgeschickt, theils im Einzelnen an den passenden Orten eingeschaltet werden. Wir gehen daher zuerst zu einer kurzen, allgemeinen Uebersicht der verschiedenen Erscheinungen über, die sich am Himmel zeigen.

Von den Fixsternen.

§. 1.

Man nimmt in der sphärischen Astronomie an, dass die Sterne sich auf einer Kugel befinden, deren Halbmesser als unendlich gross betrachtet wird, und in deren Mittelpunkt sich die Erde befindet. Diese Annahme wird durch den Anblick des gestirnten Himmels gerechtfertigt, indem man nicht beurtheilen kann,

› der eine Stern von uns entfernter sey als der
ere, so dass man ihnen allen einerlei Entfern
om Beobachter beilegen darf. Da ferner die Be
ıchtungen, welche an verschiedenen Orten der E
angestellt worden sind, gezeigt haben, dass die
genseitige Lage der Sterne immer dieselbe bleibt, n
mag sich auf der Erde befinden, wo man will,
lässt sich daraus schliessen, dass jede Entfern
zweier Punkte auf der Erde von einander gegen
Entfernung des Sterns vom Beobachter, als unendl
klein anzusehen sey, und wir müssen uns daher
Halbmesser der Kugel, von welcher die Erde
Mittelpunkt ausmachen soll, als unendlich gross v
stellen.

§. 2.

Die über die Bewegung der Fixsterne angest
ten Beobachtungen zeigen, dass diese Himmelsku
in vier und zwanzig Stunden sich einmal mit glei
förmiger Geschwindigkeit um eine bestimmte A
dreht, so dass jeder auf dieser Kugel befindli
Punkt innerhalb dieser Zeit einen Kreis beschre
der desto grösser ist, je weiter der sich bewege
Punkt von dieser eingebildeten Axe entfernt st
Die beiden Punkte, in welcher die Axe die Himn
kugel trifft, müssen ruhen, und man nennt diese
die Weltpole; derjenige Pol, welcher in unserr
genden sichtbar ist, heisst der Nordpol des
mels, der gegenüberliegende auf der uns unsi
ren Halbkugel, der Südpol. Die Kreise
welche die Sterne zu beschreiben scheinen, v
Parallelkreise genannt. Einer dieser Kreis
ein grösster seyn, und dieser giebt den Aeq
des Himmels, welcher von beiden Polen 90°
ist.

§. 3.

Befestigt man einen schweren Körper
Faden, und hängt diesen an dem einen Er
hat die durch den gespannten Faden darg
rade Linie, an jedem Orte eine bestimmt
und diese Richtung bleibt, so weit unse

tungen reichen, gegen die im vorigen §. erwähnte Himmelsaxe in unveränderter Lage. Man nennt diese gerade Linie die Verticallinie, und wenn wir dieselbe sowohl aufwärts als unterwärts uns verlängert denken, so bildet sie einen Durchmesser der Himmelskugel, welcher dieselbe in zwei Punkten trifft, von denen der über unserm Kopfe liegende, der Scheitelpunkt* oder das Zenith, der unter uns auf dem unsichtbaren Theile der Himmelskugel befindliche, der Fusspunkt oder das Nadir genannt wird.

§. 4.

Eine Linie, welche senkrecht auf die Verticallinie gezogen wird, heisst eine Horizontallinie, und wenn man sich vorstellt, dass diese Verticallinie in sich selbst herumgedreht wird, ohne dabei ihre Lage zu verändern, so beschreibt die Horizontallinie bei dieser Drehung eine Ebene, welche die Horizontalebene genannt wird. Verlängert man die Horizontalebene nach allen Seiten ins Unendliche, so wird dieselbe, da der Punkt, in welchem die Horizontale auf die Verticale gesetzt wurde, im Mittelpunkte der Himmelskugel liegt, die Himmelskugel in einem grössten Kreise schneiden, und dieser grösste Kreis bildet den astronomischen Horizont des Ortes in welchem sich der Beobachter befindet. Dieser Horizont trifft wegen der Bewegung der Himmelskugel immer andere Punkte derselben, allein gegen die Weltaxe muss derselbe eben so wohl als die Verticale eine feste Lage haben, da er selbst durch eine Ebene entsteht, die mit der Verticale auf eine unveränderliche Art verbunden ist.

§. 5.

Der astronomische Horizont muss wohl von dem scheinbaren Horizont, oder dem gewöhnlichen Gesichtskreise unterschieden werden, der sich durch die den Beobachter umgebenden Gegenstände bildet; nur in dem Falle, wenn sich der Beobachter bis an die Mitte der Pupille des Auges in das Meer an einer Stelle eintauchte wo ringsherum kein Land zu sehen

wäre, würde der astronomische Horizont mit dem scheinbaren Horizont zusammenfallen, indem unsere Erfahrungen gelehrt haben, dass die durch einen mit einem schweren Körper versehenen Faden, einem sogenannten *Pendel*, gefundene Verticale mit der Oberfläche eines stillstehenden Wassers einen rechten Winkel bildet, und da die in der angegebenen Stellung des Beobachters aus seinem Auge gezogenen Gesichtslinien die Oberfläche des Wassers im Beobachtungsorte berühren, so machen sie mit der Verticale einen rechten Winkel, fallen daher auch mit der Horizontalebene zusammen.

Da der Horizont ein grösster Kreis ist, so wird er die Himmelskugel, eben so wie den Aequator, in zwei gleiche Theile zerlegen; wir übersehen daher immer zu gleicher Zeit die Hälfte der Himmelskugel.

§. 6.

Zieht man vom Orte des Beobachters aus, nach irgend einem Stern eine gerade Linie, welche die *Gesichtslinie* genannt wird, so bildet dieselbe mit der Ebene des Horizonts einen gewissen Winkel, der die *Höhe* des Sterns heisst, und sich wegen der Bewegung der Himmelskugel in jedem Augenblicke ändern muss. Alle Punkte welche gleiche Höhe über dem Horizont haben, liegen in einem Kreise dessen geometrischer Pol das Zenith ist; dieser Kreis heisst der *Höhenkreis* oder *Almucantarac*. Der Winkel, welchen die nach einem Stern gezogene Gesichtslinie mit der Verticallinie macht, führt den Namen der *Zenithdistanz*, und da die Horizontalebene mit der Verticallinie einen rechten Winkel bildet, so folgt, dass die Höhe und die Zenithdistanz zusammen 90° ausmachen müssen. Legt man durch das Zenith und den Stern einen grössten Kreis, so steht dieser senkrecht auf dem Horizont, und wird ein *Verticalkreis* genannt.

§. 7.

Die nach dem Pol des Himmels gezogene Gesichtslinie, welche mit der Weltaxe zusammenfällt,

macht mit der Horizontalebene einen Winkel, der die Polhöhe des Ortes genannt wird. Der Winkel, welchen eine nach dem Stern gezogenen Linie, mit der nach dem Pol gezogenen macht, heisst die Polardistanz des Sterns. Diese Polardistanz ändert sich allmählig, aber nur um sehr geringe Grössen, und man kann dieselbe daher während einer nicht zu langen Zeit als eine beständige Grösse betrachten.

Denkt man sich am Orte des Beobachters eine Linie senkrecht auf die Weltaxe gezogen, so beschreibt dieselbe, indem die Weltaxe wie §. 4. die Verticallinie in sich herumgedreht wird, eine Ebene, welche die Aequatorsebene genannt wird, da sie bis an die Himmelskugel verlängert, dieselbe im Aequator schneiden muss. Die nach einem Stern gezogene Gesichtslinie bildet mit der Ebene des Aequators einen Winkel, welcher die Declination oder Abweichung des Sterns angiebt. Die Declination eines Sterns ist nördlich oder südlich, je nachdem die nach dem Stern gezogene Gesichtslinie vom Aequator aus gerechnet, nach dem Nordpol oder dem Südpol zu abweicht. Aus dieser Erklärung der Declination mit der der Polardistanz verbunden, sieht man leicht, dass die Polardistanz ± der Declination immer 90° ausmacht, je nachdem die Declination nördlich oder südlich ist. Gewöhnlich unterscheidet man die nördliche und südliche Declination durch + und —, und wenn man dieses Vorzeichen mit berücksichtigt, so kann man im Allgemeinen sagen, die Polardistanz + der Declination giebt einen rechten Winkel. Legt man durch den Pol und einen Stern einen grössten Kreis, so macht dieser mit dem Aequator einen rechten Winkel, und wird ein Declinationskreis, oder auch ein Stundenkreis genannt. Derjenige Winkel, welchen die Ebene des Aequators mit der des Horizonts bildet, heisst die Aequatorshöhe, und er ist so gross als der Winkel, welcher von der Verticallinie und der Weltaxe gebildet wird, da diese Linien auf den besagten Ebenen senkrecht stehen. Es ergiebt sich hieraus, dass die Aequatorhöhe und die Polhöhe eines Ortes sich zu neunzig Grad ergänzen. Zugleich ergiebt sich hieraus, dass der Winkel

Verticallinie mit der Ebene des Aequators
lhöhe gleich seyn muss.

§. 8.

Legt man durch die Verticallinie am Orte
Beobachters, und die nach dem Weltpol gezog
Gesichtslinie eine Ebene, so stellt diese die Me
dianebene vor. Ihre Lage wird durch diese l
den Linien immer genau bestimmt seyn, da du
zwei sich schneidende Linien immer nur eine Eb
gelegt werden kann. Diese Ebene steht senkrecht
der Horizontalebene, und sie schneidet die Himm
kugel in einem grössten Kreise, der durch die bei
Weltpole, das Zenith und das Nadir hindurchg
Dieser grösste Kreis wird der Meridian genа
Der Durchschnitt der Meridianebene mit der Eb
des Horizonts macht die Mittagslinie aus, we
Linie den Horizont in zwei einander gegenübe
genden Punkten trifft. Von diesen beiden Punk
heisst derjenige, welcher dem Nordpol am näch
liegt, der Nordpunkt, der vom Nordpol ent
tere der Südpunkt. Zieht man in der Horizo
ebene durch den Ort des Beobachters senkrech
die Mittagslinie eine gerade Linie, so erhält ma
Ost Westlinie, welche den Horizont ebenf
zwei Punkten schneidet. Ist man mit dem
nach Süden gewendet, so heisst der links li
der Ostpunkt, der rechter Hand befindlich
Westpunkt. Diese vier Punkte, Nordpunk
punkt, Ostpunkt und Westpunkt, theilen de
zont in vier gleiche Theile deren jeder 90°
und werden die Cardinalpunkte des H
genannt. Die in ihrer Nähe liegenden T
Horizonts geben die Himmelsgegenden.

§. 9.

Nachdem die Erklärung der Himm
gegeben worden, wird es leicht, die R
Bewegung der Himmelskugel anzugeben.
hung geschieht so, dass die zwischen
und dem südlichen Theile des Himmels

Sterne eine von Osten nach Westen gerichtete Bewegung haben, und man sagt daher, der Himmel dreht sich in vier und zwanzig Stunden von Osten nach Westen einmal um die Erde herum. Die zwischen dem Nordpol und dem nördlichen Theile des Himmels liegenden Sterne, müssen dieser Drehung gemäss eine entgegengesetzte Bewegung von Westen nach Osten haben.

§. 10.

Der Winkel den der durch einen Stern gelegte Stundenkreis mit dem Meridian macht, heisst der Stundenwinkel, und derjenige Winkel welchen der durch denselben Stern gelegte Verticalkreis mit dem Meridian bildet, wird das Azimuth genannt. Beide sowohl der Stundenwinkel als das Azimuth, können entweder östlich oder westlich seyn, je nachdem der Stundenkreis oder der Verticalkreis sich auf der östlichen oder der westlichen Seite des Meridians befinden. Dass beide Winkel für einerlei Stern in einerlei Sinn liegen müssen, d. h. dass beide zugleich östlich, oder beide zugleich westlich sind, ist von selbst einleuchtend.

§. 11.

Es sey (Fig. 1.) $HZRM$ der östliche Theil, der über dem Horizont HR befindlichen Himmelskugel, HZR der Meridian, H der Südpunkt, R der Nordpunkt, Z das Zenith, in P der Nordpol, in S ein Stern, durch welchen die beiden Bogen SZ als Verticalkreis und SP als Declinations- oder Stundenkreis gelegt sind, so ist

SP die Polardistanz
SZ die Zenithdistanz
RP die Polhöhe
ZPS der Stundenwinkel
HZM das Azimuth
ZSP der parallactische Winkel
MS die Höhe des Sterns.

Man hat dann den Regeln der sphärischen Trigonometrie zufolge aus dem Dreieck ZPS die Gleichung

$$\cos ZS = \cos ZP \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS.$$

In dieser Formel sind blos die Grössen ZS, ZPS veränderlich, denn der Abstand des Zeniths vom Pol als das Complement der Polhöhe, und die Polardistanz des Sterns, haben beide einen beständigen Werth.

§. 12.

Nun wird der Bogen ZS desto kleiner, je grösser der Cosinus desselben ist, und da sowohl das Product $\sin ZP . \sin SP$. als das Product $\cos ZP . \cos SP$, einen beständigen Werth haben, so wird der Ausdruck

$$\cos ZP . \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS.$$

am grössten, wenn $\cos ZPS$. am grössten ist. Dies findet dann statt wenn

$$\cos ZPS = 1, \text{ oder } ZPS = 0.$$

In diesem Fall ist der Stundenwinkel Null, und der Stundenkreis fällt mit dem südlichen Theile des Meridians zusammen. Da dann der Stern selbst im Meridian stehen muss, so folgt, dass die Zenithdistanz ZS eines Sterns am kleinsten ist, wenn dersel be südlich vom Nordpol im Meridian sich befinde wo zugleich seine Höhe am grössten seyn wird. M hat dann folgenden Werth für die Zenithdistanz

$$\cos ZS = \cos ZP . \cos SP + \sin ZP . \sin SP$$
$$= \cos(ZP - SP)$$

also

$$ZS = SP - ZP, \text{ oder } = ZP - SP.$$

je nachdem der Stern südlich oder nördlich Zenith durch den Meridian geht.

Der Punkt, in welchem der Stern in den dian tritt, und also seine grösste Höhe übe Horizont erreicht, heisst sein Culminationsp und vom Stern selbst sagt man er culminir

§. 13.

Auf gleiche Weise kann man auch den Werth von $\cos ZS$ oder den grössten Wer suchen; dieser findet natürlich dann statt ZPS seinen kleinsten Werth erreicht, d.

$$\cos ZPS = -1, \text{ also } ZPS = 180^\circ.$$

Dann fällt der Stundenkreis des Sterns mit dem nördlichen Theile des Meridians zusammen, und der Stern muss wieder im Meridian unter dem Nordpol stehen. Man ist aber nicht im Stande bei allen Sternen diesen zweiten Durchgang durch den Meridian zu beobachten, da in diesem Falle

$$\cos ZS = \cos ZP.\ \cos SP - \sin ZP.\ \sin SP$$
$$= \cos (ZP + SP) \text{ also auch}$$
$$ZS = ZP + SP, \text{ wird. Ist nun}$$
$$ZP + SP > 90^\circ,$$

so wird die Zenithdistanz des Sterns zu dieser Zeit grösser als 90°, und der Stern befindet sich unter dem Horizont. Allein wenn für einen gewissen Stern $ZP + SP$ kleiner als 90° ist, so kann man seinen Durchgang sowohl durch den südlichen als durch den nördlichen Theil des Meridians beobachten, und um beide Durchgänge von einander zu unterscheiden, nennt man den ersten die obere, den zweiten die untere Culmination.

Ist $ZP + PS = 90°$, so streift der Stern den nördlichen Horizont, und da $ZP = 90°$ — der Polhöhe; so wird dann $PS =$ der Polhöhe, folglich werden alle Sterne deren Polardistanz kleiner als die Polhöhe des Ortes der Beobachtung ist, sowohl in ihrer obern als in der untern Culmination beobachtet werden können.

§. 14.

Setzt man in der Formel (§. 11.)

$$\cos ZP = \cos ZP.\ \cos SP + \sin ZP.\ \sin SP.\ \cos ZPS.$$

den Bogen $ZS = 90°$, so wird

$$0 = \cos ZP.\ \cos SP + \sin ZP.\ \sin SP.\ \cos ZPS.$$

folglich

$$\cos ZPS = -\frac{\cos ZP.\ \cos SP.}{\sin ZP.\ \sin SP.}$$
$$= -\cot ZP.\ \cot SP.$$

Sobald $ZS = 90°$ ist, geht der Stern entweder auf oder unter, also giebt der durch die Gleichung

$$\cos ZPS = -\cot ZP.\ \cot SP.$$

gefundene Werth von ZPS den Stundenwinkel an, welcher bei Aufgang oder Untergang des Sterns statt

, und drückt man denselben in Zeit aus, s(
dieser Werth den halben Tagebogen de
s an, d. h. die Zeit, welche von seinem Auf-
e bis zu seiner Culmination, oder von der Cul-
ition bis zum Untergange verfliesst.

§. 15.

Der Winkel ZP ist immer kleiner als 90°, der
inkel SP hingegen, kann kleiner und grösser als
)° seyn, je nachdem der Stern eine nördliche oder
ne südliche Declination hat. So lange nun $SP < 90°$
rird $\cot SP$ positiv, also $\cos ZPS$ negativ, folglich
$ZPS > 90°$, wenn aber $SP > 90°$, so wird $\cot SP$
negativ, und $\cos ZPS$ positiv, also $ZPS < 90°$.
Hieraus ergiebt sich, dass für Sterne, welche eine
nördliche Declination haben, der Stundenwinkel bei
ihrem Aufgange oder Untergange grösser als 90° wird,
bei Sternen hingegen, die eine südliche Declination
besitzen, ist der Stundenwinkel kleiner als 90°. Steht
ein Stern im Aequator, so ist für diesen, $SP = 90°$.
also $\cot SP = 0$, dann wird $\cos ZPS = 0$, und $ZPS = 90°$; für einen solchen Stern ist also der Stunden
winkel beim Aufgange oder Untergange 90 Gra(
Nimmt man SP kleiner als $90° - ZP$, so dass wer
e eine positive Grösse bedeutet

$$SP = 90° - ZP - e$$

o verwandelt sich die Formel

$$\cos ZPS = - \cot ZP. \cot SP \text{ in diese:}$$

$$\cos ZPS = - \cot ZP. \tang(ZP + e)$$

$$= - \frac{\tang(ZP + e)}{\tang ZP}.$$

Dieser Bruch ist grösser als die Einheit, fo
wird der Winkel ZPS unmöglich, und man
hieraus schliessen, dass ein solcher Stern ni(
der untergeht.

§. 16.

In einem sphärischen Dreiecke müsse
ich immer drei Stücke gegeben seyn, u
übrigen zu berechnen, und wenn ent

Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite nebst den beiden anliegenden Winkeln gegeben sind, welche Fälle in der Astronomie am häufigsten vorkommen, so sind die vom Herrn Hofrath Gauss in der Theoria motus corporum coelestium angegebenen vier Formeln zur numerischen Berechnung die bequemsten. Bezeichnet man nämlich durch a, b, c die drei Seiten des sphärischen Dreiecks, durch A, B, C die diesen Seiten resp. gegenüberliegenden Winkel, so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}(b - c) \cos \tfrac{1}{2} A = \sin \tfrac{1}{2}(B - C) \sin \tfrac{1}{2} a.$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(b + c) \sin \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2}(B - C) \sin \tfrac{1}{2} a.$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(b - c) \cos \tfrac{1}{2} A = \sin \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2} a.$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(b + c) \sin \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2}(B + C). \cos \tfrac{1}{2} a.$$

Gesetzt z. B. es sey für einen Stern die Polardistanz $= p$, der Stundenwinkel $= s$, und die Polhöhe $= P$ gegeben, man sucht die Zenithdistanz z, das Azimuth α und den parallactischen Winkel ε, so ist im Dreieck ZPS (Fig. 1.)

$$ZP = 90^\circ - p,\ SP = p,\ ZPS = s.$$
$$ZS = z,\ SZP = 180 - \alpha,\ ZSP = \varepsilon$$

also wenn man für b, SP, für c, ZP nimmt, so würde in den allgemeinen Formeln

$$a = z,\ b = p,\ c = 90 - p.$$
$$A = s,\ B = 180 - \alpha,\ C = \varepsilon$$

gesetzt werden müssen, und es wird

$$\sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) \cos \tfrac{1}{2} s = \sin\left(90 - \frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2} z$$

$$\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right) \sin \tfrac{1}{2} s = \cos\left(90 - \frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2} z$$

$$\cos\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) \cos \tfrac{1}{2} s = \sin\left(90 - \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right) \cos \tfrac{1}{2} z$$

$$\cos\left(\frac{p-P}{2} - 45\right) \sin \tfrac{1}{2} s = \cos\left(90 - \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right) \cos \tfrac{1}{2} z$$

oder auch

$$1)\quad \sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) \cos \tfrac{1}{2} s = \cos \frac{\alpha+\varepsilon}{2}. \sin \tfrac{1}{2} z$$

$$2)\quad \sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right) \sin \tfrac{1}{2} s = \sin \frac{\alpha+\varepsilon}{2} \sin \tfrac{1}{2} z$$

3) $\cos\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) \cos \tfrac{1}{2} s = \cos \frac{a - s}{2} \cos \tfrac{1}{2} z$

4) $\cos\left(\frac{p-P}{2} + 45\right) \sin \tfrac{1}{2} s = \sin \frac{a - s}{2} \cos \tfrac{1}{2} z.$

§. 17.

Nun sey z. B. die Polhöhe des Ortes die von Göttingen = 51° 31′ 47″, der zu berechnende Stern die Wega, deren Polardistanz = 51° 22′ 19″, der Stundenwinkel = 67° 28′ 32″, so hat man

$p = 51° \; 22' \; 19''$
$P = 51° \; 31' \; 47''$
$s = 67° \; 28' \; 32''$

folglich $\frac{p+P}{2} - 45 = 6° \; 27' \; 3''$

$\frac{p-P}{2} + 45 = 44°. \; 50'. \; 32''$

$\tfrac{1}{2} s = 33°. \; 44' \; 16''.$

Dividirt man die zweite Gleichung (§. 16.) du[rch] die erste, die vierte durch die dritte, so erhält m[an]

$$\tan \tfrac{1}{2}(a + s) = \frac{\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right)}{\sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)} . \tan \tfrac{1}{2} s$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a - s) = \frac{\cos\left(\frac{p-P}{2} + 45\right)}{\cos\left(\frac{p+P}{2} - 45\right)} . \tan \tfrac{1}{2} s$$

$\sin\left(\frac{p-P}{2} + 45\right) = 9.8482857.$

$\tan \tfrac{1}{2} s = 9.8246921.$

Compl. $\sin\left(\frac{p+P}{2} - 45\right) = 0.9494247.$

$0.6224025 = t$[...]

$\tfrac{1}{2}(a + s) = 76° \; 34' \; 56''$

$$\cos\left(\frac{p-P}{2}+45\right) = 9.8506776.$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = 9.8246921.$$
$$\text{Compl. } \cos\left(\frac{p+P}{2}-45\right) = 0.0027584$$
$$9.6781281 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon) = 25^{\circ}\ 28'\ 52''1.$$

Hieraus ergiebt sich
das Azimuth $\alpha = 102^{\circ}\ 3'\ 48''\ 2.$
der parall. Winkel $\varepsilon = 51^{\circ}\ 6'\ 4''\ 0.$

Um die Zenithdistanz z zu berechnen, bediene man sich der zweiten Formel; diese giebt

$$\sin\left(\frac{p-P}{2}+45\right) = 9.8482857$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s = 9.7446003.$$
$$\text{Compl. } \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon) = 0.0120192$$
$$9.6049052 = \sin\tfrac{1}{2}z$$
$$\tfrac{1}{2}z = 23^{\circ}\ 44'\ 33''\ 8.$$
$$z = 47^{\circ}.\ 29'\ 7''\ 6.$$

§. 18.

Die Fixsterne behalten zwar genau genommen nicht immer völlig denselben gegenseitigen Abstand, indem er sich theils durch ihre eigene Bewegung, theils durch die scheinbaren Veränderungen ihrer Lage, die durch Refraction und Aberration hervorgebracht werden, bald vermehrt bald vermindert; allein alle diese Veränderungen sind sehr klein, dass sie nur durch feinere Beobachtungen ausgemittelt werden können. Anders verhält es sich bei der Sonne, dem Monde und den Planeten; diese verändern ihren Ort unter den Sternen sehr merklich, obgleich sie auch mit den Fixsternen an der täglichen Bewegung um die Erde Theil nehmen. Wir können hier keine ausführliche Theorie der Bewegung dieser Himmelskörper geben, sondern wir müssen uns blos auf das beschränken, was man für die mathematische Geographie zu wissen nothwendig hat, da jeder nach den vorhandenen Tafeln über die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten, den Ort dieser

Himmelskörper berechnen kann, ohne dass derselb gezwungen ist, auf ihre eigentlichen sehr complicir ten Bewegungsgesetze Rücksicht zu nehmen, um au seinen Rechnungen Resultate für die mathematisch Geographie ziehen zu können.

Von der Sonne.

§. 19.

Dass die Sonne unter den Sternen ihren Ort ver ändert, kann man leicht ohne alle Instrumente beob achten, indem man nur des Abends nach Sonnenun tergang auf die nahe beim westlichen Horizont be findlichen Sterne Achtung giebt, und sich ihre Stel lung gegen den Horizont bemerkt; nach einiger Zei wird man finden, dass dieselben Sterne bei Sonnen untergang dem Horizont bedeutend näher gerück sind, und nach einem noch längern Zeitraum ga unter dem Horizont verschwunden seyn werden. Ma muss hieraus schliessen, dass die Sonne in dieser Ze den östlicher liegenden Sternen näher gerückt is und man kann daher behaupten, dass die Sonne v Westen nach Osten unter den Sternen sich fortb wege. Wie nun aber die Bahn beschaffen sey, w che die Sonne an der Himmelskugel zu beschrei scheint, muss durch genauere Beobachtungen ausger telt werden. Dass dieselbe kein Parallelkreis sieht man aus den Gegenden des Horizonts, in chen die Sonne auf- und untergeht, indem diese täglich ändern, bald näher nach Norden, bald nach Süden liegen, während die Fixsterne, w Parallelkreise beschreiben, immer an demselber des Himmels auf- und untergehen. Dasselb man auch aus den verschiedenen Höhen scl welche die Sonne bei ihrer Culmination erreic die bald grösser bald kleiner sind.

§. 20.

Genauere Beobachtungen haben gelehrt, Sonne vermöge ihrer von Westen nach Os

den Bewegung einen grössten Kreis an der Himmelskugel zu beschreiben scheint, der die **Ecliptik** oder **scheinbare Sonnenbahn** genannt wird. Da dieser grösste Kreis nicht mit dem Aequator zusammenfällt, sondern einen gewissen Winkel mit demselben bildet der die **Schiefe der Ecliptik** heisst, und jetzt 23° 27′ 33″ beträgt, so folgt, dass die Ecliptik und der Aequator sich als grösste Kreise gegenseitig halbiren müssen. Die dabei sich bildenden zwei Durchschnittspunkte heissen die **Aequinoctialpunkte**, weil wenn die Sonne sich auf ihrer Bahn in einen dieser Punkte befindet, sie im Aequator steht, und dadurch Tag und Nacht auf der ganzen Erde gleich lang macht. In der einen Hälfte ihrer Bahn steht die Sonne nördlich vom Aequator, in der andern Hälfte südlich von demselben, so dass sie im erstern Falle eine nördliche, im letztern Falle eine südliche Declination hat. Derjenige Aequinoctialpunkt den sie trifft, indem sie aus der südlichen Hälfte ihrer Bahn in die nördliche übergeht, wird der **Frühlingsaequinoctialpunkt**, der gegenüberliegende, der **Herbstaequinoctialpunkt** genannt. In den ersten tritt sie am 21. März, in den zweiten am 23. September.

§. 21.

Obgleich diese beiden Durchschnittspunkte des Aequators und der Ecliptik nicht immer dieselbe Lage unter den Sternen behalten, sondern mit einer ziemlich gleichförmigen Geschwindigkeit von Osten nach Westen zu fortrücken, so kann man doch, da diese Bewegung bekannt und nur sehr gering ist, (in einem Jahr 50 Secunden) einen dieser beiden Punkte als einen festen Punkt betrachten, und durch dessen Beihülfe die Lage der übrigen Punkte der Himmelskugel bestimmen. Diese erwähnte Bewegung nennt man die **Praecession**, das **Vorrücken der Tag und Nachtgleichen**, oder das **Zurückgehen der Aequinoctialpunkte**, welche Benennungen sich durch die Erscheinungen, welche aus dieser Bewegung hervorgehen, rechtfertigen lassen. Der Name Praecession bezieht sich auf die Fixsterne, welche

sichtlich des Aequinoctialpunktes von Wes
Osten fortzurücken scheinen; das Vorrück
Tag und Nachtgleichen erklärt sich daraus, d
Sonne früher wieder in diesen Durchschnittspu
angt, als es ohne diese Bewegung geschehen wä
ihre Richtung der der Bewegung der Sonne e
gengesetzt ist. Dass man diese Bewegung auch
urückgehen der Aequinoctialpunkte nennt, rü
on einem Gebrauch in der Astronomie her, d
ufolge jede von Osten nach Westen gehende Bev
ung, eine retrograde oder rückläufige, u
ede Bewegung von Westen nach Osten eine dir
te oder rechtläufige genannt wird.

§. 22.

Es sey (Fig. 2.) *QEAC* der Aequator, in *P*
Nordpol, *EFC* der über dem Aequator liegende Th
der Ecliptik, so werden *E* und *C* die beiden Dur
schnittspunkte oder die Aequinoctialpunkte seyn, u
zwar stelle *E* denjenigen vor, in welchen die Son
tritt wenn sie über den Aequator heraufsteigt, a
den Frühlingsaequinoctialpunkt; der gegenüberlieg
de *C* wird dann der Herbstaequinoctialpunkt se
R sey derjenige Punkt des nördlichen Himmels,
cher von allen Punkten der Ecliptik 90° ent
liegt; man nennt denselben den Nordpol der Ec
tik. Der auf der südlichen Halbkugel diesem
entgegengesetzte Punkt heisst der Südpol der
tik, und aus der Geometrie ist bekannt, dass de
stand des nördlichen Weltpols vom Nordp
Ecliptik grade so gross seyn muss, als der V
den der Aequator mit der Ecliptik bildet, d. h
der Schiefe der Ecliptik gleich.

§. 23.

Legt man durch den Nordpol des Ae
und einen der beiden Punkte *E* oder *C* ei
nationskreis, *PE* oder *PC*, so kann man
selben als den ersten annehmen, und d
ler übrigen Declinationskreise gegen dens
den Winkel am Nordpol bestimmen. F

sich willkührlich welchen von beiden angegebenen Declinationskreisen man als den ersten betrachten will, allein man ist darin überein gekommen, denjenigen, welcher durch den Frühlingsaequinoctialpunkt geht, als den ersten zu betrachten. Ist nun *S* irgend ein Stern, und *PSD* der durch diesen Stern gelegte Declinationskreis, so wird der Winkel *SPE* den beide Declinationskreise am Pol *P* mit einander bilden, die Rectascension oder gerade Aufsteigung des Sterns genannt. Dieser Winkel ist mit dem Bogen *ED* des Aequators, der durch den Declinationskreis des Sterns auf dem Aequator vom Frühlingsaequinoctialpunkt aus abgeschnitten wird, gleichgeltend, daher man auch diesen die Rectascension nennt. Verbindet man die gerade Aufsteigung *ED* mit der schon früher erklärten Declination *SD* des Sterns, so wird durch diese beiden Bogen die Lage des Sterns *S* bestimmt. Der Winkel oder Bogen welcher die gerade Aufsteigung angiebt, wird immer von Westen nach Osten von Null bis 360° fortgezählt, so dass ein östlicher liegender Stern eine grössere gerade Aufsteigung hat als ein mehr westlich gelegener, vorausgesetzt, dass das Frühlingsaequinoctium nicht zwischen beide zu liegen kommt. Der erste Declinationskreis, der verlängert durch den Punkt *C* geht, heist der Colur der Aequinoctien.

§. 24.

Es giebt noch eine zweite Methode, den Ort eines Sterns an der Himmelskugel zu bestimmen, die in der ältern Astronomie gebräuchlicher war, als die Methode der Bestimmung durch die gerade Aufsteigung und die Declination. Legt man nämlich durch irgend einen Punkt *S* des Himmels und den Nordpol *R* der Ecliptik einen grössten Kreis *RS* der die Ecliptik in *L* trifft, so heisst dieser ein Breitenkreis, *LS* die Breite des Sterns *S*. Nimmt man den durch den Frühlingsaequinoctialpunkt gehenden Breitenkreis *RE* für den ersten an, so heisst der Winkel *ERS* den dieser mit irgend einem andern durch den Stern *S* gehenden Breitenkreis am Pol der Ecliptik macht, die Länge des Sterns, und dieser Winkel ist gleich-

d mit dem auf der Ecliptik abgeschnittenen Bo-
EL. Es bestimmt sich daher der Ort eines
s eben so wohl durch seine Länge und Breite, als
h die gerade Aufsteigung und Declination. Ue-
ens rechnet man auch den Winkel oder den Bo-
welcher die Länge angiebt von Westen nach
en, und die Breite wird nördlich oder südlich ge-
nt, je nachdem der Stern auf der Seite der Eclip-
liegt, wo sich der Nordpol derselben befindet,
er auf der entgegengesetzten, und zur Unterschei-
ng der nördlichen und südlichen Breite bedient
an sich ebenfalls der Zeichen + und —, wie be
er Declination.

§. 25.

Da die Fixsterne in einem guten Fernrohr
untheilbare Punkte erscheinen, so ist, wenn il
Lage durch die vorigen Bestimmungsstücke angegel
wird, kein Zweifel mehr übrig, welcher Theil
Sterns als bestimmt angenommen ist. Anders ver
es sich bei der Sonne, dem Monde und den Plane
von welchen die ersten beiden schon dem bl
Auge, und die letztern wenigstens durch Fernr
die doch in unsern Zeiten immer bei den Beol
tungen angewendet werden, als Scheiben ersch
so dass man wissen muss, welcher Punkt
Scheibe eigentlich gemeint wird, wenn von de
stimmung der Lage dieser Körper, entweder
Rectascension und Declination, oder durch Län
Breite, die Rede ist. Man muss hierbei ber
dass, da diese Körper kreisförmig erscheinen,
die Lage des Mittelpunktes dieser Scheibe du
angegebenen Bestimmungsstücke dargestellt w

§. 26.

Ist die Rectascension und Declination
nes gegeben, nebst der Schiefe der Ecliptik
sich leicht vermittelst der Formeln der
Trigonometrie die Länge und die Breit
finden. Man kann sich hierzu am beque
§. 16. gegebenen Formeln bedienen,

durch dieselben zu gleicher Zeit einen in vielen Fällen überflüssigen Winkel erhält, nämlich denjenigen, welchen der Breitenkreis mit dem Declinationskreise am Stern macht. Dieser Winkel wird wohl auch der Positionswinkel genannt, doch ist dieser Ausdruck bei der Sonne gebräuchlicher als bei Sternen. Man setze

$$\begin{aligned} \text{die Rectascension} &= \alpha \\ \text{die Declination} &= \delta \\ \text{die Schiefe der Ecliptik} &= \varepsilon \\ \text{die Länge} &= \lambda \\ \text{die Breite} &= \beta \\ \text{den Posit. Winkel} &= \varphi. \end{aligned}$$

so hat man im Dreiek *PSR* (Fig. 2.), da der Bogen *PR* der Schiefe der Ecliptik gleich ist (§. 22.)

$$\begin{aligned} SR &= 90^\circ - \beta \\ PR &= \varepsilon \\ PS &= 90^\circ - \delta. \\ SPR &= 90^\circ + \alpha. \\ PSR &= \varphi \\ PRS &= 90^\circ - \lambda. \end{aligned}$$

und wenn man *PR* für *b*, *PS* für *c* annimmt, so hat man aus den allgemeinen Formeln (§. 16.)

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta - 90) \cos(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \lambda - 90) \sin(45 - \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta + 90) \sin(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \lambda - 90) \sin(45 - \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta - 90) \cos(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + 90 - \lambda) \cos(45 - \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta + 90) \sin(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + 90 - \lambda) \cos(45 - \tfrac{1}{2}\beta).$$

§. 27.

Der zu berechnende Stern sey die Capella, so hat man für diesen

$$\begin{aligned} \alpha &= 57^\circ\ 51'\ 7'' \\ \delta &= +45^\circ\ 48'\ 8'' \\ \varepsilon &= 23^\circ\ 27'\ 33'' \end{aligned}$$

folglich auch

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta - 90) &= -10^\circ\ 22'\ 9''\ 5. \\ \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta + 90) &= +33^\circ\ 49'\ 42''\ 5 \\ 45 + \tfrac{1}{2}\alpha &= +82^\circ\ 55'\ 33''\ 5. \end{aligned}$$

Man hat nun aus den angegebenen vier Glei-
ngen des vorigen Paragraphs, diese

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta+90)}\cdot\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\lambda-90)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90)}\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+90-\lambda)$$

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90) &= 9.2552537\,n\\
\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) &= 9.0937587\\
\text{Compl. }\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90) &= 0.2543722\\
\hline
&\ 8.6033846\,n\\
\tfrac{1}{2}(\varphi+\lambda-90) &= 357^\circ\ 42'\ 8''\ 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta-90) &= 9.9928485\\
\cot(45+\tfrac{1}{2}\alpha) &= 9.0937587\\
\text{Compl. }\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90) &= 0.0805516\\
\hline
&\ 9.1671588\\
\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda+90) &= 8^\circ\ 21'\ 34''\ 5
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Werthen ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\varphi &= 6^\circ\ 3'\ 43''\ 1\\
\lambda-90 &= 349^\circ\ 20'\ 34''\ 1\\
\lambda &= 79^\circ\ 20'\ 34''\ 1
\end{aligned}$$

Man hat dann noch aus der zweiten (
meln des vorhergehenden Paragraphs

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta+90) &= 9.7456278\\
\sin(45+\tfrac{1}{2}\alpha) &= 9.9966814\\
\text{Compl. }\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\lambda-90) &= 0.0003493\\
\hline
&\ 9.7426585\\
45-\tfrac{1}{2}\beta &= 33^\circ\ 34'\ 2''\\
\beta &= +22^\circ\ 51'\ 55''
\end{aligned}$$

§. 28.

Zur Prüfung der numerischen Re
man sich der Formel

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\beta\cos\lambda.$$

bedienen, die sich entweder aus den Dr
LSE, oder aus der Combination der
§. 26. herleiten lässt. Man hat nämlic

$$\cos DE . \cos DS = \cos ES$$
$$\cos LE . \cos LS = \cos ES \text{ folglich}$$
$$\cos DE . \cos DS = \cos LE . \cos LS$$

oder da $DE = \alpha$, $DS = \delta$, $LE = \lambda$, $LS = \beta$, so wird $\cos \alpha . \cos \delta = \cos \lambda . \cos \beta$.

Aus den Formeln des §. 26. findet man dasselbe wenn man die erste mit der vierten, die zweite mit der dritten multiplicirt, und das letzte Product vom ersten abzieht. Man hat in dem hier berechneten Beispiel

$$\begin{array}{rl} \cos \alpha = & 9.3881516 \\ \cos \delta = & 9.8433183. \\ \hline & 9.2314699. \\ \cos \lambda = & 9.2670131 \\ \cos \beta = & 9.9644574 \\ \hline & 9.2314705. \end{array}$$

Der geringe Unterschied rührt daher, dass wir nur auf Zehntheil einer Secunde gerechnet haben.

§. 29.

Um die umgekehrte Aufgabe aufzulösen, nämlich aus der Länge und Breite des Sterns die Rectascension und Declination zu finden, hat man nur nöthig in den Formeln (§. 26.) statt $90 - \delta$, $90 - \beta$, und statt $90 + \alpha$, $90 - \lambda$ zu setzen. Hierdurch erhält man:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon + 90 - \beta) \cos (45 - \tfrac{1}{2} \lambda)$$
$$= \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \alpha - 90) \sin (45 - \tfrac{1}{2} \delta)$$
$$\sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon - 90 + \beta) \sin (45 - \tfrac{1}{2} \lambda)$$
$$= \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \alpha - 90) \sin (45 - \tfrac{1}{2} \delta)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon + 90 - \beta) \cos (45 - \tfrac{1}{2} \lambda)$$
$$= \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \alpha + 90) \cos (45 - \tfrac{1}{2} \delta)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon - 90 + \beta) \sin (45 - \tfrac{1}{2} \lambda)$$
$$= \cos \tfrac{1}{2} (\varphi + \alpha + 90) \cos (45 - \tfrac{1}{2} \delta)$$

§. 30.

In dem Fall, wo die Breite Null ist, lassen sich zur Berechnung der Rectascension und Declination aus der Länge und der Schiefe der Ecliptik, ein-

iere Formeln finden, obgleich man sich auch der vorigen §. bedienen könnte, indem man darin = 0 setzt.

Man hat nämlich im Dreieck DNE (Fig. 2.) enn N der in der Ecliptik befindliche Punkt ist,

$$NE = \lambda,\ NED = \varepsilon$$
$$ND = \delta,\ \ DE = \alpha \text{ folglich}$$
$$\sin\delta = \sin\lambda.\ \sin\varepsilon$$
$$\tan\alpha = \cos\varepsilon.\ \tan\lambda.$$

§. 31.

Aus der Formel $\sin\delta = \sin\lambda.\ \sin\varepsilon$, sieht man dass für $\lambda = 0,\ \delta = 0$
$\lambda = 90,\ \delta = +\varepsilon$
$\lambda = 180,\ \delta = 0$
$\lambda = 270,\ \delta = -\varepsilon$
seyn wird. Beträgt daher die Länge der Sonne 90 oder 270°, so hat dieser Körper seine grösste Ent fernung vom Aequator erreicht, und im ersten Fa befindet sie sich im Sommersolstitialpunkt, ir letztern im Wintersolstitialpunkt. Die durc diese beiden Punkte gehenden Parallelkreise heiss die Wendekreise, deren Entfernung vom Aequ tor der Schiefe der Ecliptik gleich ist, und es ergi sich hieraus, dass die Sonne nie höher über d Aequator oder tiefer unter dem Aequator stehen k als die Schiefe der Ecliptik beträgt. Derjenige clinationskreis, welcher durch die Solstitialpu gelegt wird, heisst der Colur der Solstitien. $\lambda = 0$, oder $\lambda = 180°$ so steht die Sonne ir quator, also in den Aequinoctialpunkten. Ma übrigens aus der Gleichung

$$\sin\delta = \sin\varepsilon.\ \sin\lambda,$$

dass das Vorzeichen von δ von demjenigen v abhängt; es wird also von $\lambda = 0$ bis $\lambda =$ positiv, folglich die Declination nördlich, von bis $\lambda = 360°$, δ negativ, oder die Declination

§. 32.

Ausser der Bestimmung der Länge in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrücl

oder Bogen, hat man noch eine zweite Art die Länge anzugeben. Man theilt nämlich die ganze Ecliptik in zwölf gleiche Theile, welche Himmelszeichen genannt werden, und von denen ein jeder 30° enthält. Der Anfang der Theilung findet gleichfalls im Frühlingsaequinoctialpunkt statt.

Die Namen dieser Himmelszeichen sind der Reihe nach folgende: Widder (♈), Stier (♉), Zwillinge (♊), Krebs (♋), Löwe (♌), Jungfrau (♍), Waage (♎), Scorpion (♏), Schütze (♐), Steinbock (♑), Wassermann (♒), Fische (♓), und um ihre Reihenfolge besser zu behalten, hat man dieselben in folgenden Vers gebracht:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora,
Pisces.

Man giebt nun entweder die Länge durch die Anzahl der Grade an, oder durch die Charakteristik des Himmelszeichens, oder durch die Stellenzahl desselben, wo bei der letztern Beziehungsart, der Widder die Stellenzahl Null erhält. So kann man z. B. statt 78° Länge auch 18° ♊, oder 2^z 18° sagen.

Die vier Hauptpunkte der Ecliptik

Frühlingsaequinoctialpunkt,
Sommersolstitialpunkt,
Herbstaequinoctialpunkt,
Wintersolstitialpunkt

werden auch nach den mit ihnen zusammenfallenden Anfangspunkten der Himmelszeichen,

Nullpunkt des Widders (0°♈),
Nullpunkt des Krebses (0°♋)
Nullpunkt der Waage (0°♎),
Nullpunkt des Steinbocks (0°♑)

genannt, und die Wendekreise werden durch die Benennungen Wendekreis des Krebses und Wendekreis des Steinbocks unterschieden.

§. 33.

Die Schiefe der Ecliptik behält nicht immer einerlei Werth, der freilich nur sehr langsam sich ändert, aber doch noch längern Zeitraum merklich vom jetzigen verschieden ist. Im Jahre 1800 betrug

die Schiefe der Ecliptik 23° 27′ 57″, und sie nimmt jährlich um 0″,521 ab, so dass im Jahre 1829 die Schiefe 15″ weniger 23° 27′ 42″ beträgt. Diesen Werth der durch die Subtraction der Secularänderung gefunden ist, nennt man die mittlere Schiefe, es muss aber an demselben eine zweite Correction angebracht werden, die von der Lage der Sonne und der Mondsbahn abhängt, um die wahre Schiefe zu erhalten. Die hierzu nöthigen Formeln werden späterhin angegeben werden, wenn von den Methoden die Schiefe der Ecliptik zu bestimmen, die Rede seyn wird.

Von der Zeit.

§. 34.

Ein jedes Zeitmaass beruht auf der Voraussetzung
einer gleichförmigen Bewegung, es mag diese Bewe-
gung eine wirkliche oder blos eine scheinbare seyn
und wenn man einen Körper kennt, bei dem ein
solche gleichförmige Geschwindigkeit vorausgeset
werden kann, so lässt sich dessen Bewegung zur B
stimmung der Zeit anwenden, indem wir schliess
dass wenn der Körper gleiche Räume durchlau
hat, die entweder durch Längenmaass oder Win
gemessen werden, auch die während den verflo
nen Zeiten einander gleich sind. Die gleichförmi
Bewegung die wir kennen, ist die Umdrehung
Erde, oder die aus derselben in entgegengese
Richtung hervorgehende Umdrehung des Him
Wählt man daher irgend einen Stern, dessen
gung zum Zeitmaasse dienen soll, so wird die
welche von einer Culmination desselben bis zur
folgenden verstreicht, einen bestimmten Zeita
der bis auf sehr kleine Unterschiede, die ma
men kann, immer von einerlei Länge bleib
chen, und man nennt einen solchen durch au
folgende Culminationen bestimmten Zeitabsc
nen Tag. Die Unterabtheilungen desselben,
durch die verschiedenen Stundenwinkel, d
proportional sind, auszumitteln. Da der

Stunden getheilt wird, so werden die westlichen Stundenwinkel von 15, 30, 45 u. s. w. Graden, den Verlauf von einer, zwei, drei u. s. w. Stunden angeben.

§. 35.

Man würde also genöthigt seyn, um die Zeit zu erhalten, zu welcher sich irgend eine Himmelsbegebenheit zuträgt, jedesmal zugleich den Stundenwinkel des gewählten Sterns, durch Höhe und Azimuth zu beobachten, und dieses musste auch wirklich von den alten Beobachtern vor der Erfindung der Uhren geschehen; seitdem wir aber dieses für die beobachtende Astronomie so vortheilhafte Instrument in der Vollkommenheit, zu welcher es durch die Bemühungen der berühmtesten Mechaniker in unsern Zeiten gelangt ist, besitzen, ist dasselbe an die Stelle des Sterns getreten, und braucht nur zuweilen mit der Bewegung des Sterns verglichen zu werden, um seinen Gang, der durch so viel äussere Ursachen gestört werden kann, zu reguliren.

§. 36.

Man richtet den Gang der astronomischen Pendeluhren so ein, dass von einer Culmination des Nullpunkts des Widders, bis zur nächst folgenden genau 24 Stunden verfliessen, und zwar zeigt die Uhr selbst bei der Culmination dieses Punktes immer Null an, so dass wenn man irgend eine Zeit, welche die Uhr zeigt, durch das Verhältniss von 15 Grad auf eine Stunde in Bogen des Aequators verwandelt, man sogleich die gerade Aufsteigung aller in diesem Zeitpunkte culminirenden Punkte des Himmels erhält. Man nennt den angegebenen Zeitraum einen Sterntag, und sagt die Uhr gehe nach Sternzeit. Diese Benennung ist freilich nicht ganz passend, da vermöge des Zurückgehens der Aequinoctialpunkte, der Zeitraum, der zwischen den zwei auf einander folgenden Culminationen eines Sterns enthalten ist, etwas länger ausfällt, als der welcher zwischen zwei

auf einander folgenden Culminationen des Frühlir aequinoctialpunkts verfliesst.

§. 37.

Die auf diese Art bestimmte Zeit würde nun die Bedürfnisse des Astronomen hinreichend seyn, sie alle Bedingungen erfüllt, die man in wissensch licher Hinsicht wegen der Zeitbestimmung mac kann, allein für den bürgerlichen Gebrauch w diese Methode die Zeit zu bestimmen etwas un quem, da die Geschäfte des bürgerlichen Lebens hauptsächlich nach dem Stande der Sonne rich Es ist daher bei einer für das gemeine Leben gleich brauchbaren Zeitbestimmung nöthig, dass viel als möglich einem gleichen Stande der So auch dieselbe Stunde entspräche, welches beim brauch der Sternzeit nicht möglich seyn konnte, dem bei der Culmination der Sonne die nach Ste zeit gehende Uhr, im Verlauf eines Jahres nach nach alle 24 Stunden angeben muss, so dass wenn einem bestimmten Tage des Jahres, die Sonne 1 Uhr culminirt, sie drei Monat später um 7 nach Sternzeit culminiren wird.

§. 38.

Man hat aus dem angegebenen Grunde de lichen Umlauf der Sonne als das Maass eines angenommen, der auch der bürgerliche T nannt wird, und bei weitem länger als der S ist. Es findet aber zwischen dem im bürg Leben und dem von den Astronomen gebrauc fang des Tages, der Unterschied statt, dass d nomen den Tag bei der sichtbaren Culmin Sonne des Mittags anfangen, und bis 24 fortzählen, während bei dem gewöhnlichen der Tag um Mitternacht zur Zeit der un baren Culmination im nördlichen Theile dians anfängt. Die astronomische Rechnun immer zwölf Stunden gegen die bürger rechnung zurück.

§. 39.

Die Zeit, welche durch die Bewegung der Sonne bestimmt wird, heisst wahre oder scheinbare Zeit; da die Bewegung dieses Himmelskörpers aber ungleichförmig ist, indem er sich bald schneller bald langsamer bewegt, so folgt, dass keiner der auf diese Art bestimmten Tage dem andern gleich seyn hann. Es ist daher nicht möglich, dass eine Uhr nach dieser Zeit gehen kann, sondern blos die Sonnenuhr wird wahre Sonnenzeit anzeigen können. Man musste daher auf eine dritte Art der Zeitbestimmung denken, die man durch den gleichförmigen Gang der Uhr darstellen konnte, und welche sich zugleich nicht sehr weit von der wahren Zeit entfernte. Man nahm daher eine eingebildete Sonne an, die sich mit gleichförmiger Bewegung im Aequator bewegt, so dass diese zweite Sonne mit der wahren einmal zu gleicher Zeit aus dem Frühlingsaequinoctialpunkt ausging, und mit einer Geschwindigkeit, die der mittlern Geschwindigkeit der wahren Sonne gleich ist, den Aequator durchläuft. Hierdurch wird die eingebildete Sonne der wahren Sonne bald etwas voreilen, bald hinter ihr zurückbleiben, allein immer werden die Abstände immer nur klein, und der Unterschied beider Zeiten periodisch seyn. Man nennt die durch diese eingebildete Sonne dargestellte Zeitbestimmung, die mittlere Zeit. Ein solcher mittlerer Sonnentag ist die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen der eingebildeten Sonne verfliesst, und der Unterschied zwischen der wahren und der mittleren Zeit wird die Zeitgleichung genannt.

Von der Bewegung der Erde.

§. 40.

Die Erscheinung, dass der Himmel sich in 24 Stunden einmal um eine bestimmte Axe von Osten nach Westen herumdreht, lässt sich dadurch erklären, dass man annimmt, die Erde selbst drehe sich

in derselben Zeit in entgegengesetzter Richtung von Westen nach Osten um eine Axe, welche mit der früher angenommenen Weltaxe zusammenfällt. Man kann freilich anfangs nicht mit Gewissheit bestimmen, welche von beiden Annahmen die richtige sey, ob der Himmel sich um die Erde dreht, oder ob diese Bewegung nur scheinbar ist, und durch die entgegengesetzte Drehung der Erde hervorgebracht wird, allein einige Ueberlegung lehrt bald, dass die letztere Annahme bei weitem die wahrscheinlichere ist, da die erste allen Gesetzen der Mechanik widerstreitet, indem die reelle Bewegung der Sterne in Parallelkreisen sich auf keine Art erklären lässt, und physisch unmöglich ist. Ausser andern tiefer liegenden Beweisen für die Umdrehung der Erde, ist in unsern Zeiten durch die über den Fall der Körper angestellten Versuche ein sehr einfacher und überzeugender Beweis geliefert worden, indem wenn die Erde sich wirklich um ihre Axe dreht, ein von einer bedeutenden Höhe herabfallender Körper, nicht den senkrecht unter dem Anfangspunkte der Bewegung liegenden Punkt treffen kann, sondern sich nach der Richtung von demselben entfernt, in welcher sich die Erde dreht, und die von Benzenberg angestellten Versuche haben auch wirklich eine mit der Theorie übereinstimmende Abweichung nach Osten zu gezeigt.

§. 41.

Wir können daher als einen hinreichend bewie senen Lehrsatz aufstellen, dass die Erde ein Körpe ist, der sich von Westen nach Osten, in der Zei welche zwischen zwei auf einander folgenden Culr nationen eines Sterns verfliesst, abgesehen von geringen Veränderungen seiner scheinbaren L einmal um eine Axe gedreht hat, die verlängert Weltpole trifft; diese Zeit beträgt in mittlerer nenzeit ausgedrückt 23 St. 56′ 4″ 1, oder 0,997 wenn man den mittlern Sonnentag als Einhei nimmt, und wird die **Rotationszeit** der genannt.

§. 42.

Man kann auf folgende Art leicht zeigen, dass die erwähnte Umdrehung der Erde die scheinbare Bewegung des Himmels, genau wie wir sie beobachten, hervorbringen muss. Es sey (Fig. 3.), in *C* der Ort des Beobachters, in *S* ein Stern; wir beschreiben mit dem Halbmesser *CS* eine Kugel aus *C* als Mittelpunkt, *CP* sey die nach dem Pol gezogene Linie, und *CA* senkrecht auf *CP* in der Ebene *PCA*, die durch den Stern und die Weltaxe *CP* gelegt ist. Wir müssen hierbei wegen den geringen Dimensionen des Erdkörpers gegen die unendlich grosse Entfernung der Sterne von der Erde den Beobachter selbst in die Weltaxe stellen. Zieht ma ferner *BC* senkrecht auf *AC* und *PC*, so giebt *BCA* den Aequator, und der Kreis *PSA* stellt den Declinationskreis des Sterns *S* dar. Die Verticallinie habe zu irgend einer Zeit die Lage *CZ*, so dass *Z* das Zenith vorstellt, und der Kreis *PZE* den Meridian angiebt, dann wird *ZS* im Verticalkreise liegen und die Zenithdistanz seyn, der Winkel *SZE* das Azimuth, *SPZ* der Stundenwinkel. Dieses Dreieck *SPZ* ist mit dem gleichnamigen (Fig. 1.) ganz übereinstimmend, es ist also zur Erklärung der Bewegung des Himmels ganz einerlei, ob wir das Zenith uns als fest denken, und den Stern *S* bewegen lassen, oder ob wir den Stern ruhend annehmen, und die Verticallinie *CZ* um die Weltaxe so herumführen, dass der Winkel *PCZ* immer derselbe bleibt.

§. 43.

Es bleibt nun noch zu entscheiden, ob die Bewegung der Sonne, vermöge deren sie sich in einem Jahr einmal um die Erde bewegt, wirklich vorhanden, oder nur scheinbar ist, und durch die Bewegung der Erde um die Sonne hervorgebracht wird. Man sieht leicht, dass beide Annahmen völlig gleiche Erscheinungen geben müssen, da wenn wir von der Erde aus, die Sonne in einer bestimmten Richtung sehen, die Erde von der Sonne aus gesehen, grade in entgegengesetzter Richtung erscheinen wird. Es

sind aber zu viel Gründe vorhanden, die Bewegun der Erde um die Sonne anzunehmen, als dass ma länger zwischen beiden Annahmen schwanken sollt und der Satz, die Erde bewegt sich um die Sonn ist nicht mehr als eine blosse Hypothese, sondern al ein mit fast geometrischer Schärfe bewiesener Sat anzusehen. Schon nachdem Kepler aus den Beob achtungen das schöne Gesetz über die Bewegung de Planeten um die Sonne abgeleitet hatte, vermöge des sen die Würfel der mittlern Entfernungen der Pla neten von der Sonne, sich wie die Quadrate ihre Umlaufszeiten um dieselbe verhalten, konnte ma durch Vergleichung der Umlaufszeiten und der Ent fernungen der Sonne und des Mondes von der Erd zeigen, dass wenn einer dieser Körper sich um di Erde bewegte, der andere auf keine Weise sich u die Erde bewegen konnte, wenn man nicht das durc die Planetenbewegung aus den Beobachtungen abge leitete, und späterhin aus den allgemeinen mechani schen Grundsätzen bewiesene Gesetz in Zweifel zie hen wollte.

§. 44.

Nimmt man nämlich die Umlaufszeit des Mon um die Erde als die Einheit an, so beträgt die U laufszeit der Sonne um die Erde dreizehn sol Einheiten, und wenn x die Bahn angiebt, wie of Entfernung des Mondes von der Erde in der Sonne von der Erde enthalten ist, so hat man angeführten Kepler'schen Gesetz zufolge die portion

$$1 : 13^2 = 1 : x^3$$

folglich

$$x = \sqrt[3]{169} = 5{,}53.$$

Es wäre daher die Entfernung der S der Erde nur fünf und einhalb mal so gro des Mondes, während schon Kepler die der Sonne funfzig mal grösser als die c aus den Beobachtungen geschlossen hatte. Newton endlich die Bewegung der Hi aus dem Prinzip der allgemeinen Anzieh tet hatte, blieb gar kein Zweifel mehr

wegung der Erde um die Sonne übrig, da nach den Grundsätzen der Dynamik der kleinere Körper sich um den grössern bewegen mus, und die Masse oder Menge von Materie der Sonne, die der Erde mehr als 300000 mal übertrifft.

§. 45.

Es fehlte nur noch an einem näher liegenden Beweise, der so augenscheinlich die Bewegung der Erde um die Sonne darthat, wie die erwähnten Versuche über den Fall der Körper die Drehung der Erde um ihre Axe zeigten. Hierzu gab ein Einwand der Gegner der Bewegung der Erde eine Veranlassung. Diese meinten nämlich, dass wenn die Erde eine so grosse Bahn um die Sonne beschrieb, deren Durchmesser 40 Millionen Meilen beträgt, so müsste diese Veränderung des Standpunktes eine Veränderung in der Lage der Fixsterne gegen einander hervorbringen, welche man die jährliche Parallaxe der Fixsterne nennt. Im November 1725 fingen Bradley und Molineux an, hierüber Beobachtungen anzustellen, allein sie fanden keine Parallaxe, wohl aber eine andere Veränderung der Lage der Fixsterne, die sich aus der schon vorher von Römer gefundenen Bewegung des Lichts verbunden mit der Bewegung der Erde erklärte. Da diese Erscheinung, welche die Aberration genannt wird, nicht statt finden konnte wenn die Erde sich nicht bewegte, so war hierdurch die Bewegung der Erde um die Sonne direct erwiesen.

§. 46.

Die Bahn der Erde um die Sonne ist eine Ellipse, welche nicht viel vom Kreise abweicht, und in deren einen Brennpunkt sich die Sonne befindet. Die halbe grosse Axe der Erdbahn beträgt nach den Untersuchungen von Enke aus dem Durchgange der Venus durch die Sonne abgeleitet

20666800 Meilen

und man kann den Gränzen zufolge, innerhalb welchen die Genauigkeit dieser Art Beobachtungen ein-

geschlossen ist, annehmen, dass dieselbe nicht kleiner als 20577649 und nicht grösser als 20755943 Meilen seyn kann. Die Eccentricität der Erdbahn beträgt 0,0168415, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit angenommen, und nimmt alle Jahrhundert 0,0000416 ab. Doch ist diese Abnahme nicht immer fortgehend, sondern nachdem die Eccentricität bis auf eine gewisse Gränze abgenommen hat, nimmt dieselbe wiederum zu. Die Zeit, welche die Erde gebraucht um ihre Bahn zu durchlaufen, beträgt

365,25638350 Tage

und man nennt diesen Zeitraum das siderische Jahr. Die kleinste Entfernung der Erde von der Sonne findet dann statt, wenn die Sonne sich in 279° 35′ befindet, also zehn Tage nach ihrem Eintritt in das Wintersolstitium. Gegenüber ungefähr auch zehn Tage nach dem Eintritt der Sonne in das Sommersolstitium hat die Erde ihre grösste Entfernung von der Sonne erreicht. Der erste Punkt heisst die Sonnennähe oder das Perihelium, der zweite die Sonnenferne oder das Aphelium, und die Zeiten, zu welchen die Sonne in diese beiden Punkte tritt, sind der erste Januar und der erste July, so dass im Winter die Sonne uns näher steht als im Sommer.

§. 47.

Die Axe der Erde steht nicht senkrecht auf der Ebene in welcher ihre Bahn, die sie um die Sonne beschreibt, liegt, sondern beide machen einen Winkel mit einander, der der Ergänzung der Schiefe der Ecliptik zu 90° gleich ist. Da ferner der scheinbare Pol seine Lage unter den Sternen nur sehr we nig ändert, so folgt, dass die Erdaxe während de Bewegung der Erde um die Sonne immer eine fa parallele Lage behält.

Von der Gestalt der Erde im Allgemeinen.

§. 48.

Es scheint anfangs etwas ungereimt, nach einer besonderen Darstellung der Oberfläche der Erde zu fragen, da der blosse Augenschein eine so grosse Unregelmässigkeit in der Gestaltung derselben zeigt, dass keine mathematische Formel im Stande ist, die Natur dieser Oberfläche genau auszudrücken. Allein diese unregelmässige Gestalt ist es auch keinesweges, welche man bei der Aufstellung der Frage über die Bestimmung der quantitativen Natur der Oberfläche der Erde zu wissen verlangt, sondern man will diejenige Oberfläche bestimmt wissen, welche das Wasser annehmen würde, wenn es die ganze Erde bedeckte. Man setzt daher alle die Unregelmässigkeiten bei Seite, die durch die auf der Oberfläche der Erde befindlichen Berge und Thäler entstehen, welches um so eher angeht, da auch die grössten Erhebungen der Fläche des festen Landes über die Oberfläche des Meeres, gegen die grosse Ausdehnung der Erde äusserst gering sind. Dass bei dieser Ansicht die Erdoberfläche eine bestimmbare Gestalt haben wird, folgt daraus, weil das Wasser nach den Gesetzen des Gleichgewichts der Flüssigkeiten eine regelmässige Figur annehmen muss, und die Oberfläche des festen Landes, abgesehen von den einzelnen, zufälligen, grösseren oder kleineren Erhöhungen, an allen Orten der Erde fast mit der Oberfläche des Meeres zusammenfällt, also im Allgemeinen die Oberfläche des festen Landes dieselbe Gestalt als die der Oberfläche des Meeres haben muss.

§. 49.

Die Alten hatten sehr sonderbare Ideen über die Gestalt der Erde, und zwar scheint die älteste Meinung unter den Griechen diejenige gewesen zu seyn, nach welcher die Erdoberfläche eine flache Scheibe war, die rund herum von dem grossen Strom Okea-

nos genannt, umflossen ist, in dem sich die Sonne bei ihrem Untergange eintauchte; mehrere wollten sogar das Zischen, welches die Sonne bei ihrem Sinken im Wasser verursachte, gehört haben. Thales nahm an, die Erde werde vom Wasser getragen; Anaximenes gab ihr eine Unterstützung von stark verdichteter Luft; Anaximander sah sie für einen Cylinder an, dessen eine Grundfläche bewohnt war; die Indier meinten, sie ruhe auf Elephanten.

§. 50.

Man hatte jedoch auch schon im Alterthume die Meinung von der runden Gestalt der Oberfläche der Erde aufgestellt, welche Annahme vorzüglich Pythagoras lehrte, und in seiner Schule fortgepflanzt wurde. Pythagoras hatte diese Lehre wahrscheinlich auf seinen Reisen in Aegypten von den dortigen Priestern erhalten. Ueberhaupt scheinen die Aegypter und Chaldäer bessere Ansichten über diesen Gegenstand besessen zu haben, als die Griechen, indem die Chaldäer ziemlich genau den Umfang der Erde dadurch angaben, dass sie sagten, ein guter Fussgänger brauche drei Jahre um einmal um die Erde herumgehen zu können.

§. 51.

Es konnte nicht anders seyn, als dass die Griechen in den ältesten Zeiten nur sehr mangelhafte Begriffe von der Gestalt und der Grösse der Erde haben mussten, da sie sich zu wenig von ihrem Vaterlande entfernten, und die um sie herumliegenden Länder blos aus dunklen Sagen und abentheuerlichen Erzählungen kannten. Da die Griechen nun das einzige Volk sind, deren Kenntnisse im Alterthume uns ausführlicher aufbehalten worden, so können wir nicht wissen, was andern Völkern über diesen Gegenstand bekannt war; doch ist wohl zu glauben, dass dieselben meistens hierin erfahren waren, als die Griechen, welche die Natur gewöhnlich a priori construiren wollten, da dieselben theils sich viel früher mit der Astronomie beschäftigten, theils auch



als handelnde Völker grössere Reisen machten, und hierdurch leicht richtigere Begriffe über die Ausdehnung der Erde erhalten konnten. Man kann übrigens über diese verschiedenen Meinungen Riccioli Geographia reformata und Bailly Histoire de l'Astronomie ancienne nachlesen.

§. 52.

Eudoxus scheint unter den Griechen einer der ersten gewesen zu seyn, der der Erde eine regelmässig gekrümmte Oberfläche beilegte, indem er auf seinen Reisen durch die damals bekannten Länder, vorzüglich sein Augenmerk auf die verschiedene Lage der Gestirne gegen den Horizont richtete, und aus dem allmähligen Hervortreten und Verschwinden derselben auf eine Krümmung der Erde schloss. Diesem Philosophen folgte Aristoteles, welcher aus theoretischen Gründen die kugelförmige Gestalt der Erde zu beweisen suchte, indem er von dem Grundsatze ausging, dass das Wasser vermöge seiner Schwere und leichten Verschiebbarkeit der einzelnen Theile desselben, sich so sehr als möglich zu senken suchte, und hierdurch sich dem Mittelpunkte der Erde möglichst zu nähern suchte. Sollte nun das Wasser die Stellung des Gleichgewichtes einmal angenommen haben, so musste es in allen Punkten seiner Oberfläche gleichweit vom Mittelpunkte entfernt seyn, also eine Kugeloberfläche bilden. Dieser Beweis setzt freilich einen Mittelpunkt, nach welchem zu alles zu sinken sich bestrebt, voraus, so dass ein Cirkel im Schliessen begangen ist, da dieses Vorhandenseyn eines Mittelpunktes erst bewiesen werden soll; doch ist derselbe immer merkwürdig, da er der erste auf diese Art geführte ist, und die neuern hydrostatischen Untersuchungen über die Gestalt der Erde, unter der Voraussetzung, dass die Erde ganz aus einer Flüssigkeit besteht, und keine Drehung um ihre Axe besitzt, ganz dasselbe zeigen.

§. 53.

Dass die Erde eine Oberfläche bildet, die nicht sehr von der einer Kugel verschieden ist, lässt sich aus den einfachsten Beobachtungen darthun, die ein jeder Reisende, wenn er auch nur mit schlechten Instrumenten versehen ist, anstellen kann. Geht man nämlich auf der Erde in der bestimmten Richtung von Norden nach Süden fort, und giebt zugleich auf den verschiedenen Stand der Gestirne acht, so zeigt sich, dass jeder beliebige Stern bei seiner Culmination an der Südseite des Himmels immer höher zu stehen kommt je weiter man nach Süden zu fortgeht, während die nördlichen Sterne sich mehr und mehr senken, und viele die am ersten Standorte noch über dem Horizont in ihrer untern Culmination sichtbar waren, unter dem Horizont verschwinden. Die Zunahme der Erhöhung findet man immer dem zurückgelegten Wege proportional; so dass bei einem in der angegebenen Richtung gemachten Wege von ungefähr 15 Meilen, der Stern sich um einen Grad erhoben hat. Die entgegengesetzte Erscheinung, nämlich das allmählige Sinken der südlichen Sterne nach dem Horizont zu, findet statt, wenn man vom anfänglichen Standpunkte aus nach Norden zu fortgeht.

§. 54.

Es sey z. B. (Fig. 4.) AB der zurückgelegte Weg, in A der nördliche, in B der südliche Endpunkt, AS, BS zwei von den Standpunkten nach einem gewissen Stern bei seiner Culmination gezogene Gesichtslinien, so werden diese, wegen der grossen Entfernung der Sterne von der Erde, als unter einander parallel gehend angesehen. Sind nun AT und BV zwei Berührungslinien an den Punkten A und B, so stellen diese die Mittagslinien an den Orten A und B vor, und die Winkel SAT. SBV sind die Culminationshöhen der Sterne. Nun ist, wenn man die Linie VB rückwärts verlängert, bis sie die nach den Stern aus A gezogene Gesichtslinie AS in E trifft,

$$SED = SBV.$$

als handelnde Völker grössere Reisen machten, und hierdurch leicht richtigere Begriffe über die Ausdehnung der Erde erhalten konnten. Man kann übrigens über diese verschiedenen Meinungen Riccioli Geographia reformata und Bailly Histoire de l'Astronomie ancienne nachlesen.

§. 52.

Eudoxus scheint unter den Griechen einer der ersten gewesen zu seyn, der der Erde eine regelmässig gekrümmte Oberfläche beilegte, indem er auf seinen Reisen durch die damals bekannten Länder, vorzüglich sein Augenmerk auf die verschiedene Lage der Gestirne gegen den Horizont richtete, und aus dem allmähligen Hervortreten und Verschwinden derselben auf eine Krümmung der Erde schloss. Diesem Philosophen folgte Aristoteles, welcher aus theoretischen Gründen die kugelförmige Gestalt der Erde zu beweisen suchte, indem er von dem Grundsatze ausging, dass das Wasser vermöge seiner Schwere und leichten Verschiebbarkeit der einzelnen Theile desselben, sich so sehr als möglich zu senken suchte, und hierdurch sich dem Mittelpunkte der Erde möglichst zu nähern suchte. Sollte nun das Wasser die Stellung des Gleichgewichtes einmal angenommen haben, so musste es in allen Punkten seiner Oberfläche gleichweit vom Mittelpunkte entfernt seyn, also eine Kugeloberfläche bilden. Dieser Beweis setzt freilich einen Mittelpunkt, nach welchem zu alles zu sinken sich bestrebt, voraus, so dass ein Cirkel im Schliessen begangen ist, da dieses Vorhandenseyn eines Mittelpunktes erst bewiesen werden soll; doch ist derselbe immer merkwürdig, da er der erste auf diese Art geführte ist, und die neuern hydrostatischen Untersuchungen über die Gestalt der Erde, unter der Voraussetzung, dass die Erde ganz aus einer Flüssigkeit besteht, und keine Drehung um ihre Axe besitzt, ganz dasselbe zeigen.

auch $\frac{dx}{a} + \frac{dp.}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = 0.$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man

$$p = tang\,\theta.\text{ so wird}$$

$$dp = \frac{d\theta}{\cos\theta^2};\ (1+pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos\theta^3}\text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{a} + d\theta\cos\theta = 0.$$

Dies giebt integrirt

$$x + a\sin\theta = c.$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Hieraus f

$$\sin\theta = \frac{c-x}{a}.$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{aa-(c-x)^2}}{a.}$$

$$tang\,\theta = \frac{c-x}{\sqrt{aa-(c-x)^2}}$$

und da ausserdem

$$tang\,\theta = p = \frac{dy}{dx}.$$

so wird, wenn man in voriger Gleichung statt ta $\frac{dy}{dx}$ setzt, und auf beiden Seiten mit dx multipl

$$dy = \frac{(c-x)\,dx}{\sqrt{aa-(c-x)^2}}.$$

Integrirt man diese Gleichung von neu komınt

$$y = c' + \sqrt{aa-(c-x)^2}\text{ oder}$$

$$(c'-y)^2 + (c-x)^2 = aa.$$

welches bekanntlich die Gleichung eines Kre

§. 56.

Aus dem vorigen Beweise über die R Erde folgt aber blos, dass diejenige Lin auf der Erdoberfläche in der Richtung nach Norden geht, ein Kreis sey, allein

dass die Erde eine Kugel sey. Man sieht nämlich leicht, dass dieselben Erscheinungen statt finden würden, wenn die Erde ein gerader Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche wäre, und sich um eine Axe drehte, deren Richtung senkrecht auf der geometrischen Axe des Cylinders steht. In diesem Falle würde aber die Erde in der Richtung von Osten nach Westen nicht gekrümmt seyn, welches der Erfahrung widerspricht. Denn befindet man sich auf einem hohen Berge, der vom festen Lande oder vom Meere umgeben ist, wie dies z. B. beim Piço de Teneriffa statt findet, so findet man, dass nach jeder Seite die Aussicht gleich gross ist, also muss die Erde nach allen Richtungen ziemlich gleichförmig gekrümmt seyn.

§. 57.

Eine andere Beweisführung für die Krümmung der Erde von Osten nach Westen, giebt die Bemerkung, dass wenn die Erde ein solcher Cylinder ist, wie so eben beschrieben worden, so werden alle Verticallinien in parallelen Ebenen liegen, welche senkrecht auf der geometrischen Axe des Cylinders stehen, also würde ein Himmelskörper an allen Orten der Erde zu gleicher Zeit culminiren. Nun zeigt sich aber, dass wenn z. B. der Mond verfinstert wird, derselbe nicht für alle Orte der Erde eine gleiche Lage gegen den Meridian hat; einigen steht er östlich andern westlich von der Meridianebene, folglich können die Meridianebenen eben so wenig als die Verticallinien einander parallel seyn. Wir werden daher die Erde als einen beinahe kugelförmigen Körper ansehen können.

§. 58.

Auch die vielen Umschiffungen der Erde haben die Richtigkeit dieses Satzes dargethan, indem überall die Oberfläche des Meeres gleichförmig gekrümmt erschien. Die Namen derjenigen welche die Erde umsegelt haben sind folgende:

1) Portugiesen. Fernando Magelhaens, 1519.

2) Engländer. Francis Drake, 1577. Thomas Candish, 1586. Cowley, 1683. William Dampier, 1683. Woodes Rogers, 1708. Edward Cooke, 1708. Clipperton und Shelvoke, 1719. Anson, 1740. John Byron, 1764. Samuel Wallis, 1766. Philipp Carterer, 1766. James Cook, 1769, 1775, 1776. Fourneaux, 1772. Portlock und Dixon, 1785. Edwards, 1790. George Vancouver, 1790.

3) Holländer. Simon Cordes, 1598. Oliver van Noort, 1598. Jacob le Maire und Cornelius van Schouten, 1615. Jacob Hermita und Schapenham, 1623. Roggewin, 1721.

4) Deutsche. Georg Spielberg, 1614. Otto von Kotzebue, 1815.

5) Italiäner. Gemelli Careri, 1683.

6) Franzosen. Le Gentil de la Barbinair, 1714. Bougainville, 1766. Etienne Marchand, 1790. Freycinet, 1817.

7) Russen. Alexander von Krusenstern, 1803.

§. 59.

Die Bestimmung der Lage der Oerter auf der Erde, geschieht auf eine ähnliche Art als die Bestimmung der Lage der Sterne an der Himmelskugel, nämlich durch die geographische Breite und die geographische Länge. Die geographische Breite eines Ortes ist derjenige Winkel, welchen die an diesem Ort gezogene Verticallinie mit einer Ebene macht, die senkrecht auf der Drehungsaxe der Erde steht, und man sieht leicht, dass dieser Winkel nicht anders als die früher erwähnte Polhöhe ist. Fällt diese Verticallinie mit der angegebenen Ebene zusammen, so liegt der Ort auf dem Aequator der Erde, und für alle solche Oerter wird die geographische Breite Null seyn. Die Breite ist entweder nördlich oder südlich, je nachdem die Verticallinie zwischen dem nördlichen Weltpole und dem Aequator, oder dem südlichen Weltpole und dem Aequator, die Himmelskugel trifft. Die geographische Länge ist der Winkel, welchen die Meridianebene des Ortes (§. 8.) mit der Meridianebene eines andern

bestimmten Ortes, die zugleich als die erste angenommen wird, bildet. Die Durchschnittslinien der Oberfläche der Erde mit den Meridianebenen werden die Erdmeridiane genannt.

§. 60.

Nimmt man die Erde als eine Kugel an, oder überhaupt als einen Körper, der durch Umdrehung einer ebenen Figur um eine Axe, die mit der Drehungsaxe der Erde zusammenfällt, entstanden ist (ein sogenannter Revolutionskörper), so werden die Linien auf der Erdoberfläche, welche durch alle die Punkte gezogen werden, die gleiche geographische Breite haben, Kreise darstellen, und Parallelkreise genannt; dann ist der Erdaequator ebenfalls ein Kreis, und man kann die Polhöhe oder geographische Breite auch so definiren, dass man sagt, sie sey der Winkel, welchen die verlängerte Richtung der Verticallinie oder eines Pendels mit der durch den Aequator der Erde gelegten Ebene macht. Zieht man durch die beiden Erdpole, welche diejenigen Punkte sind, an welchen die Verticallinie mit der Erdaxe zusammenfällt, und die gleichnamig mit den Himmelspolen der Nordpol und der Südpol genannt werden, eine gerade Linie, so stellt diese die Länge der Erdaxe dar, und der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Ebene des Aequators giebt den Mittelpunkt der Erde an.

§. 61.

Eine Linie welche vom Mittelpunkt der Erde nach irgend einem Orte ihrer Oberfläche gezogen wird, bildet mit der Aequatorsebene einen Winkel, der die geocentrische Breite des Ortes genannt wird. Diese geocentrische Breite lässt sich nicht direct beobachten, sondern muss aus der Polhöhe, und aus der bekannten Gestalt der Erde durch Rechnung gefunden werden; und man hat dieselbe häufig dann zu wissen nöthig, wenn man Beobachtungen, bei denen der Mond zugleich in Betracht kommt, z. B. Sternbedeckungen, Finsternissen, auf den Mittel-

punkt der Erde reduciren will, indem der Mond zu nahe ist als dass man die Erde als eine Kugel betrachten könnte, und die verschiedenen Entfernungen der Beobachtungsörter vom Mittelpunkte merklich werden. Nimmt man die Erde als eine Kugel an, so wird die geographische Breite mit der geocentrischen zusammenfallen, weil bei dieser Gestalt der Erde, die Richtungen der Verticallinien mit denen der Halbmesser, eine und dieselbe grade Linie ausmachen.

§. 62.

Die Erdmeridiane bilden bei der Annahme eines Revolutionskörpers, krumme Linien, die in einer Ebene liegen, und nothwendigerweise sowohl unter einander, als auch mit derjenigen, durch deren Umdrehung die Erde als entstanden angenommen wird, übereinstimmen müssen. Die geographische Länge ist dann der in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrückte Bogen des Aequators, der zwischen den beiden Punkten liegt, die durch die Durchschnitte des ersten Meridians und des Meridians desjenigen Ortes von dem die Länge verlangt wird, gebildet werden. Die geographische Länge ist entweder östlich oder westlich, je nachdem der Ort vom ersten Meridian aus nach Osten oder nach Westen zu liegt, so dass man bei dieser Eintheilung die Länge immer nur bis 180° zu zählen braucht, indem z. B. 273° westlicher Länge auch durch 87° östlicher Länge ausgedrückt werden kann. Rechnet man hingegen von Null bis 360° fort, so wird gewöhnlich dabei, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erwähnt wird, östliche Länge verstanden.

§. 63.

Man sieht aus der Erklärung der geographischen Länge, dass die Erwählung eines ersten Meridians etwas ganz willkührliches ist; auch pflegen die Astronomen immer den durch ihre Sternwarte gehenden Meridian als den ersten anzunehmen. Es sind zuweilen Klagen darüber geäussert worden, dass bei der Genauigkeit der mathematischen Wissenschaften

eine solche Willkühr in dieser Sache herrscht; allein die Natur des Gegenstandes bringt es mit sich, dass immer eine gewisse Willkührlichkeit statt finden muss, da diese Länge nicht, wie die geographische Breite, an einem gewissen Orte absolut bestimmt werden kann, sondern blos der Unterschied der Länge oder die Meridiandifferenz gefunden wird. Ueberhaupt ist diese Klage von eben demselben Belange, als wenn man sich beschwerte, dass z. B. in der analytischen Geometrie, bei der Aufstellung der Gleichung für die Ellipse der Anfangspunkt der Abscissen, bald im Mittelpunkt, bald im Scheitel, bald im Brennpunkt desselben angenommen wird.

§. 64.

Ptolomäus legte den ersten Meridian durch die canarischen Inseln; diese Annahme ist aber etwas unbestimmt, da die canarischen Inseln nicht nur einen ziemlichen Raum einnehmen, sondern auch mehr auf einem Parallelkreise als in einem Meridian liegen. Auf Befehl Ludwig XIII. wurde der erste Meridian durch die Insel Ferro angenommen, und nach den Bestimmungen von de l'Isle lag diese Insel 20° westlich von Paris. Allein spätere genauere Messungen haben gezeigt, dass auf diese Art der erste Meridian jenseits Ferro ins Meer fällt; man hat aber fortgefahren den ersten Meridian als 20° westlich von Paris liegend anzunehmen, und nennt denselben den durch Ferro gezogenen; dieser wird auch bei Verzeichnung von Landcharten meistens als der erste angenommen. Es ist zu bemerken, dass die Namen Länge und Breite durch die mangelhaften Kenntnisse der Alten über die Länder entstanden sind, indem dieselben weit mehr in der Richtung von Osten nach Westen, als in der darauf senkrechten von Süden nach Norden konnten, so dass die Darstellung der damals bekannten Länder ein Rechteck bildete; da man nun gewohnt ist, die grösste Dimension eines Rechtecks die Länge, die kleinere die Breite zu nennen, so ging diese Benennung auf die geographische Bestimmung der Oerter über. Die Methoden, durch welche die Länge und Breite eines

Ortes auf der Erde zu finden sind, werden in der Folge ausführlich dargestellt werden, und machen die sogenannte geographische Ortsbestimmung aus.

§. 65.

Diejenigen Oerter, deren Polhöhen der Schiefe der Ecliptik gleich sind, liegen auf den Wendekreisen (tropici), und zwar die in der nördlichen Hälfte der Erde auf dem Wendekreise des Krebses, die in der südlichen Hälfte auf dem Wendekreise des Steinbocks; diejenigen, deren geographische Breite der Ergänzung der Schiefe der Ecliptik zu 90° gleich ist, befinden sich auf den Polarkreisen; der in der nördlichen Halbkugel heisst der arctische, der auf der südlichen Halbkugel der antarctische Polarkreis. Diese vier Kreise theilen die ganze Erdoberfläche in fünf Theile, welche Zonen genannt werden. Die zwischen dem arctischen Polarkreise und dem Nordpol liegenden Gegenden bilden die nördliche kalte Zone, vom Polarkreise bis zum Wendekreise des Krebses befindet sich die nördliche gemässigte Zone, zwischen den beiden Wendekreisen des Krebses und des Steinbocks liegt die heisse oder tropische Zone, die Gegenden vom Wendekreise des Steinbocks bis zum antarctischen Polarkreise bilden die südliche gemässigte Zone, und endlich der übrige Theil der Erdoberfläche zwischen dem antarctischen Polarkreise und dem Südpol macht die südliche kalte Zone aus.

§. 66.

In den ältern Erdbeschreibungen, werden für diejenigen Oerter, welche zu einem bestimmten Orte eine gewisse Lage haben, besondere Namen aufgeführt, die freilich an sich von keiner Wichtigkeit sind, allein der Vollständigkeit wegen hier mit angegeben werden sollen. Nimmt man einen bestimmten Ort auf der Erdoberfläche an, so heissen diejenigen, welche auf demselben Parallelkreise leben, aber in der Länge um 180° verschieden sind, Nebenwoh-

ner, Perioeci; diejenigen, welche unter gleicher Länge, also auf demselben Meridian, aber unter entgegengesetzter Breite wohnen, Gegenwohner, Antoeci; diejenigen endlich, welche sowohl in der Länge um 180° verschieden sind, als auch eine entgegengesetzte Polhöhe haben, heissen Gegenfüssler, Antipodes, und wenn die südliche Hälfte der Erdoberfläche dieselbe Gestalt hat als die nördliche, so wird eine von dem zuerst angenommenen Orte durch den Mittelpunkt der Erde gezogene Linie, die Gegenfüssler dieses Ortes treffen.

Von den Tageszeiten und den Jahreszeiten.

§. 67.

Man unterscheidet im bürgerlichen Tage vier Hauptzeitpunkte, die durch eine gewisse Lage der Sonne gegen den Horizont bestimmt werden, nämlich Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht. Der Morgen findet statt, wenn die Sonne über den Horizont heraufsteigt, der Mittag wenn die Sonne in den Meridian tritt, der Abend beim Untergange der Sonne, und endlich Mitternacht, wenn die Sonne durch den nördlichen Theil des Meridians geht. Die zwischen diesen vier Zeitpunkten enthaltenen Zeiträume machen die vier Tageszeiten aus, und heissen Vormittag, Nachmittag, Vormitternacht und Nachmitternacht. Im Allgemeinen nennt man die Zeit, welche die Sonne über dem Horizont zubringt, Tag, diejenige, während welcher sie unsichtbar ist, Nacht. Der Aufgang und der Untergang der Sonne, so wie die daraus folgende Tageslänge, hängen von zwei Grössen ab, welche bekannt seyn müssen, wenn man diese Zeitpunkte berechnen will; diese Grössen sind die Lage der Sonne in der Ecliptik, an deren Stelle man auch die Polardistanz oder Declination setzen kann, und die Lage des Ortes auf der Erde rücksichtlich des Aequators, d. h. die Polhöhe oder die geographische Breite. Die geographische Länge des Ortes kommt bei dieser Aufgabe eben so wenig, als

die gerade Aufsteigung der Sonne in Betracht, und es folgt hieraus, dass in allen Oertern, die auf demselben Parallelkreise liegen, beim Aufgange und Untergange der Sonne gleiche Zeit gezählt wird. Dieses ist aber nicht so zu verstehen, als ob diese Erscheinungen für alle auf demselben Parallelkreise liegenden Oerter, in demselben physischen Zeitpunkt geschähen, sondern es heisst nur, die vom Aufgange bis zur Culmination der Sonne, oder die von der Culmination der Sonne bis zu ihrem Untergange verfliessende Zeit, ist für alle besagten Oerter dieselbe.

§. 68.

Es sey (Fig. 1.) in S die Sonne, HR der Horizont, SP die Polardistanz der Sonne, ZS ihre Zenithdistanz, HZR der Meridian des Orts, so ist ZP das Complement der geographischen Breite oder der Polhöhe, SP das Complement der Declination der Sonne. Man setze

die Declination $= \delta$
die Polhöhe $= p$.
den Stundenwinkel $ZPS = s$.
die Zenithdistanz $ZS = z$.

so hat man im Dreieck ZPS

$$\cos z = \sin \delta . \sin p + \cos \delta . \cos p . \cos s.$$

Man würde nun den Aufgang oder Untergang der Sonne finden, indem man in dieser Gleichung $z = 90^\circ$ setzte, da, wenn die Sonne eine Zenithdistanz von 90° hat, sie sich im Horizont befinden muss, und aus dem übrigbleibenden Theile s bestimmte. Der in Zeit verwandelte Stundenwinkel würde dann angeben, wie lange vor der Culmination die Sonne aufgeht.

§. 69.

Es sind aber hierbei noch zwei Umstände zu berücksichtigen, von denen der eine immer den Aufgang der Sonne beschleunigt und den Untergang verzögert, der andere aber diese Zeitpunkte bald verzögern bald beschleunigen kann. Der erste Umstand rührt daher, dass das Licht der Sonne, so wie auch

aller andern Himmelskörper, ehe es zu uns gelangt, die Atmosphäre durchlaufen muss, und diese hat die Eigenschaft das Licht zu brechen, welche Eigenschaft unter dem Namen der astronomischen Strahlenbrechung oder Refraction bekannt ist. Vermöge der daraus hervorgehenden Abweichung des Weges des Lichts von der geraden Linie, scheint jeder Himmelskörper höher über dem Horizont zu stehen, als dies ohne die Strahlenbrechung der Fall seyn würde. Man muss daher, um den Aufgang oder Untergang der Sonne zu finden, statt der scheinbaren Zenithdistanz von 90°, die wahre Zenithdistanz = 90° + der Refraction, die wir durch r bezeichnen wollen, in voriger Formel setzen, so dass für den Stand der Sonne im Horizont, der Stundenwinkel s durch die Gleichung

$$\cos(90 + r) = \sin\delta.\ \sin p + \cos\delta\ \cos p\ \cos s.$$

oder durch

$$-\sin r = \sin\delta.\ \sin p + \cos\delta.\ \cos p.\ \cos s$$

bestimmt werden wird.

§. 70.

Was den zweiten Umstand betrifft, so muss man bedenken, dass die Sonne unter den Sternen eine Bahn beschreibt, welche weder mit dem Aequator zusammenfällt, noch mit ihm parallel läuft, so dass die Declination derselben sich immerwährend ändern, und zwar vom Wintersolstitium zum Sommersolstitium zunehmen, von da rückwärts wieder abnehmen muss. Diese Veränderung muss mit in Rechnung gezogen werden, und um dies thun zu können, ist es nothwendig, die Declination der Sonne für einen Zeitpunkt, am besten für ihre Culmination, so wie auch die Zunahme oder Abnahme der Declination während eines bestimmten Zeitraums zu wissen. Es sey die Zunahme der Declination in 24 Stunden $= n$, so kann man ohne merklichen Fehler diese Zunahme während eines nicht zu grossen Zeitraums, der verflossenen Zeit proportional annehmen, und um daher die einem gewissen Stundenwinkel s entsprechende Zunahme der Declination zu erhalten, mache man die Proportion

$360^\circ : n = s : x$, so wird

$x = \frac{ns}{360}$ die gesuchte Veränderung angeben.

§. 71.

Bezeichnet man nun durch δ' den Werth der Declination, welcher bei dem Eintritte der Sonne in den Meridian statt findet, so wird die Declination beim Stundenwinkel s durch $\delta' \pm x$ ausgedrückt werden, wo das $+$ Zeichen für einen westlichen, das $-$ Zeichen für einen östlichen Stundenwinkel gilt. Man hat also zur Bestimmung des Stundenwinkels beim Aufgange oder Untergange der Sonne die Formel

$$-\sin r = \sin(\delta' \pm x) \sin p + \cos(\delta' \mp x) \cos p . \cos s$$

aus welcher s gefunden wird. Man kann bemerken, dass wenn die Declination der Sonne abnimmt, statt $+ n$, $- n$ genommen werden muss. Uebrigens kann die Zeit des Aufganges und Unterganges der Sonne, nie mit grosser Genauigkeit gefunden werden, da der Winkel r sehr veränderlich ist; in unsern Gegenden kann man denselben im Mittel bei gemässigter Temperatur und mittlern Barometerstande zu 33 Minuten annehmen.

§. 72.

Um aus der vorigen Formel auf die kürzeste Art den Winkel s zu bestimmen, vernachlässige man bei einer ersten Annäherung die Grösse x, und berechne s blos aus der Formel

$$-\sin r = \sin \delta' \sin p + \cos \delta' \cos p \cos s$$ so dass

$$\cos s = -\frac{\sin r + \sin \delta' \sin p}{\cos \delta' \cos p}.$$

Vermittelst dieses gefundenen Werthes von s findet man,

$$x = \frac{ns}{360}$$ und dann suche man einen neuen

Werth von s aus der genauern Gleichung

$$\cos s = -\frac{\sin r + \sin(\delta' \mp x) \sin p}{\cos(\delta' \mp x) \cos p}.$$

welches immer so genau seyn wird, dass die Rechnung keiner zweiten Wiederholung bedarf.

§. 73.

Es sey z. B. am ersten May 1829 beim Durchgange der Sonne durch den Göttinger Meridian

$$\delta' = 15^\circ\ 4'\ 15''$$
$$p = 51^\circ\ 31'\ 47''$$
$$n = 18'\ 2'',\ r = 33'$$

so findet man

$$\begin{aligned} \sin\delta' &= 9.4149951 \\ \sin p &= 9.8937235 \\ \hline &\ 9.3087186. \\ \hline \text{die Zahl} &= 0,2035722 \\ \sin r &= 0,0095992 \\ \hline &\ 0,2131714. \\ \cos\delta' &= 9.9847996 \\ \cos p &= 9.9644574 \\ \hline &\ 9.7786658. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(-0,2131714) &= 9.3287289\,n\ ^{*)} \\ &= 9.7786658 \\ \hline \log\cos s &= 9.5500631.\,n \\ s &= 110^\circ\ 47'\ 7'' \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$x = \frac{ns}{360} = 5'\ 30''$$
$$\delta' - x = 14^\circ\ 58'\ 45''.$$

Wiederholt man die Rechnung indem statt δ', $\delta' - x$ gesetzt wird, so erhält man einen genaueren Werth, $s = 110^\circ\ 39'\ 8''$.

Da nun $\frac{360}{24}$ oder 15 Grad auf eine Stunde gehen, so erhält man, indem der in Graden angegebene Winkel s durch 15 getheilt wird, den in Zeit

*) Das angehängte n bedeutet, dass die Zahl, wozu der Logarithme gehört, negativ genommen werden soll.

ausgedrückten Stundenwinkel der Sonne bei ihrem Aufgange = 7 St. 22′ 36″

und zieht man diese Zeit von 12 St. ab, so bleibt die Zeit des Aufgangs der Sonne

= 4 Uhr 37′ 24″.

Dieses ist aber in wahrer Zeit ausgedrückt, und um den Aufgang in mittlerer Zeit zu haben, muss man die für diesen Tag statt findende Zeitgleichung, welche 3′ 3″ beträgt, abziehen, indem der mittlere Mittag um so viel Zeit später einfällt als der wahre Mittag; folglich ist in mittlerer Zeit der Aufgang

4 Uhr 34′ 21″.

Hätte man *sin r* vernachlässigt, so würde man den Stundenwinkel

$s = 109^\circ\ 40'\ 38''$

oder in Zeit = 7 St. 18′ 42″

erhalten haben, und der Aufgang der Sonne wäre um

4 Uhr 41′ 18″

eingetreten, also 3′ 54″ später als mit Berücksichtigung der Strahlenbrechung.

§. 74.

Der Untergang der Sonne würde gefunden, indem man den Stundenwinkel für die Declination $\delta' + x$ suchte, allein man kann kürzer dazu gelangen, indem man den Unterschied der beiden Werthe von s sucht

$= 110^\circ\ 47'\ 7'' - 110^\circ\ 39'\ 8'' = 7'\ 59''$

und diesen zu den zuerst gefundenen Werth von s hinzufügt

$= 110^\circ\ 47'\ 7'' + 7'\ 59'' = 110^\circ\ 55'\ 6''$.

Verwandelt man diesen Winkel vermittelst der Division durch 15 in Zeit, so erhält man den Untergang der Sonne um

$7^h\ 23'\ 40''$ wahrer Zeit

oder $7^h\ 20'\ 37''$ mittl. Zeit.

Die ganze Tageslänge beträgt also

12 St. + 7 St. 23′ 40″ — 4 St. 37′ 24″

= 14 St. 46′ 16″.

Dasselbe Resultat würde man ebenfalls gefunden haben, wenn man den zuerst ohne Berücksichtigung der Aenderung der Declination gefundenen Stunden-

winkel 110° 47′ 7″ verdoppelt, = 221° 34′ 14″ und dieses Product in Zeit verwandelt hätte.

§. 75.

Das im vorigen Paragraph angegebene Verfahren beruht darauf, dass, da die Declinationsänderung x immer nur gering ist, ihre höheren Potenzen ohne Nachtheil vernachlässigt werden können, und dass, wenn man den wahren Stundenwinkel beim Aufgange durch s', beim Untergange durch s'', und den mit der Declination δ' berechneten durch s bezeichnet, sehr genau

$$\frac{s' + s''}{2} = s$$

seyn wird. Um dies zu beweisen, bemerke man, dass der angenommenen Bezeichnung zufolge

$$\cos s' = -\frac{\sin r + \sin(\delta' - x)\sin p}{\cos(\delta' - x)\cos p},$$

$$\cos s'' = -\frac{\sin r + \sin(\delta' + x)\sin p}{\cos(\delta' + x)\cos p},$$

$$\cos s = -\frac{\sin r + \sin\delta' \sin p}{\cos\delta' . \cos p}$$

seyn muss.

Man hat ferner

$$\cos\frac{s' + s''}{2} = \cos\tfrac{1}{2}s' \cos\tfrac{1}{2}s'' - \sin\tfrac{1}{2}s' \sin\tfrac{1}{2}s''$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + \cos s')(1 + \cos s'')}$$

$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos s')(1 - \cos s'')}.$$

Nun ist bekanntlich mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von x,

$$\sin(\delta' - x) = \sin\delta' - x . \cos\delta'$$

$$\cos(\delta' - x) = \cos\delta' + x . \sin\delta'.$$

folglich wird

$$\cos s' = -\frac{\sin\delta' \sin p + \sin r - x\cos\delta' \sin p}{\cos\delta' \cos p + x \sin\delta' \cos p},$$

$$= -\frac{\sin\delta' \sin p + \sin r - x\cos\delta' \sin p}{\cos\delta' \cos p}(1 - x\,tg\,\delta')$$

$$= (\cos s + x \tang p)(1 - x \tang \delta)$$

oder endlich

$$\cos s' = \cos s + x(\cos s \tang \delta + \tang p).$$

Da in der Formel für s', nur $-x$ statt $+x$ gesetzt werden darf um die für s'' zu erhalten, so wird

$$\cos s'' = \cos s - x(\cos s \tang \delta + \tang p)$$

also
$$\cos s' + \cos s'' = 2 \cos s.$$
$$\cos s' \cos s'' = \cos s^2.$$

Da ferner

$$(1 + \cos s')(1 + \cos s'') = 1 + \cos s' + \cos s'' + \cos s' \cos s''$$
$$(1 - \cos s')(1 - \cos s'') = 1 - \cos s' - \cos s'' + \cos s' \cos s''$$

so ergiebt sich durch die Substitution der Werthe von $\cos s' + \cos s''$ und $\cos s' \cos s''$

$$(1 + \cos s')(1 + \cos s'') = (1 + \cos s)^2$$
$$(1 - \cos s')(1 - \cos s'') = (1 - \cos s)^2$$

folglich

$$\cos \frac{s' + s''}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos s) - \tfrac{1}{2}(1 - \cos s)$$
$$= \cos s.$$

und hierdurch ist die Richtigkeit des Verfahrens §. 74. erwiesen.

§. 76.

Man kann hier zugleich anmerken, dass der höchste Stand der Sonne über dem Horizont nicht bei ihrem Durchgange durch den Meridian statt findet, sondern eine kurze Zeit nachher oder vorher, je nachdem die Declination der Sonne im Zunehmen oder im Abnehmen ist. Denn wäre die Declination unveränderlich, so würde die Zenithdistanz gleich nach dem Durchgange durch den Meridian wieder zunehmen, wie dies wirklich bei den Fixsternen der Fall ist, allein diese Zunahme der Zenithdistanz wird eine Zeitlang durch die Zunahme der Declination, wodurch eine Annäherung der Sonne gegen den Pol entsteht, wieder aufgehoben, so dass erst nach dem Durchgange der Sonne durch den Meridian die Zenithdistanz ihren kleinsten Werth erreicht. Dasselbe findet auch beim Monde und den Planeten statt, und zwar ist beim Monde, wegen seiner schnellen Bewegung, der Unterschied zwischen dem Durchgange

durch den Meridian und der kleinsten Zenithdistanz am grössten.

§. 77.

Um den Stundenwinkel wirklich zu berechnen, für welchen die kleinste Zenithdistanz statt findet, wollen wir als Normalfall den annehmen, bei welchem die Declination des Himmelskörpers zunimmt. Man hat dann allgemein für den westlichen Stundenwinkel s,

$$\cos z = \sin(\delta' + x) \sin p + \cos(\delta' + x) \cos p \cos s.$$

oder da im vorliegenden Fall s immer sehr klein ist, so darf man

$$\cos s = 1 - \tfrac{1}{2} ss$$

annehmen, und man hat

$$\cos z = \sin \delta' \sin p + \cos \delta' \sin p . x$$
$$+ (\cos \delta' \cos p - x \sin \delta' \cos p) (1 - \tfrac{1}{2} ss).$$

Vernachlässigt man das Product xss, und bezeichnet die Zenithdistanz beim Durchgange durch den Meridian durch z', so dass $z' = p - \delta'$, so erhält man die neue Gleichung

$$\cos z = \cos z' + x \sin z' - \tfrac{1}{2} \cos \delta' \cos p . ss.$$

Nun wird z desto kleiner je grösser $\cos z$ ist, also muss

$$x \sin z' - \tfrac{1}{2} \cos \delta' \cos p . ss$$

ein Maximum werden. Man setze dies $= \tfrac{1}{2} y$, und bemerke, dass $x = \frac{ns}{360}$, seyn muss, so wird

$$\cos \delta' \cos p . ss - 2 s . \frac{n}{360} \sin z' = - y.$$

Lösst man diese quadratische Gleichung auf, so kommt

$$s . \cos \delta' \cos p = \frac{n \sin z'}{360} \pm \sqrt{\frac{n^2 \sin z^2}{360^2} - y \cos \delta' \cos p}$$

und man sieht aus der unter dem Wurzelzeichen stehenden Grösse, dass wenn s einen möglichen Werth behalten soll

$$y \cos \delta' . \cos p < \frac{nn \sin z^2}{360^2}$$

seyn muss, und der grösste Werth findet statt, wenn

$$y \cos \delta' \cos p = \frac{nn \sin z'^2}{360^2}, \text{ folglich}$$

$$y = \left(\frac{n}{360}\right)^2 \frac{\sin z'^2}{\cos \delta' \cos p}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$s \cos \delta' \cos p = \frac{n \sin z'}{360}$$

folglich der gesuchte Stundenwinkel

$$s = \frac{n}{360} \cdot \frac{\sin z'}{\cos \delta' \cos p}.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich der Werth von s in Theilen des Halbmessers; will man daher denselben in Bogensecunden haben, so muss man mit $\frac{360}{2\pi}$ multipliciren und n in Secunden ausdrücken. Dividirt man noch durch 15, so erhält man Zeitsecunden, so dass also

$$s = \frac{n}{30\pi} \cdot \frac{\sin z'}{\cos \delta' \cos p}.$$

wo π die Zahl 3,14159 . . . bedeutet.

Nimmt man aus dem frühern Beispiel (§. 73.)

$\delta' = 15^\circ \; 4' \; 15''$
$p = 51^\circ \; 31' \; 47''$
$n = 18' \; 2'' = 1082''$

so erhält man $z' = p - \delta' = 36^\circ \; 27' \; 32''$, und $s = 11'' \, 36$ in Zeit.

Man kann nun auch sehr leicht die kleinste Zenithdistanz aus der beim Durchgange der Sonne durch den Meridian statt findenden ableiten. Bezeichnet man nämlich die kleinste Zenithdistanz durch $z' - \Delta z$, so wird nach der zu Anfang dieses Paragraphs gegebenen Gleichung

$$\cos(z' - \Delta z) = \cos z' + \tfrac{1}{2} y.$$

oder da Δz immer so klein ist, dass mit Recht die höhern Potenzen vernachlässigt werden können

$$\cos z' + \sin z' . \Delta z = \cos z' + \tfrac{1}{2} y.$$

also auch

$$\Delta z = \frac{y}{2 \sin z'}.$$

Nun war aber

$$y = \left(\frac{n}{360}\right)^2 \cdot \frac{\sin z'^2}{\cos\delta' \cos p}; \quad s = \frac{n}{360} \cdot \frac{\sin z'}{\cos\delta' \cos p}$$

folglich

$$y = \left(\frac{n}{360}\right) s . \sin z'. \text{ und hierdurch}$$

$$\Delta z = \left(\frac{n}{720°}\right) s.$$

Dieser Bogen ist immer äusserst gering; in unserm Beispiel hat man,

$$\frac{n}{720} = \frac{1082''}{720°} = \frac{1}{2300}$$

und da ausserdem s in Bogen ausgedrückt $= 170''$ ist, so wird $\Delta z = 0'',07$. Ich habe diese Betrachtung über die kleinste Zenithdistanz hier aus dem Grunde etwas ausführlicher dargestellt, weil sie bei den Methoden die geographische Lage eines Ortes zu bestimmen, gebraucht werden wird.

§. 78.

Hat man auf die im §. 72. angegebene Weise den Stundenwinkel gefunden, so kann man auch noch das Azimuth, welches beim Aufgange oder beim Untergange der Sonne statt findet, berechnen; bezeichnet man dasselbe durch A, so ist im Dreieck ZPS (Fig. 1.) der Winkel $PZS = 180° - A$, und man hat dann

$$\cos SP = \cos ZS . \cos SP + \sin ZS . \sin ZP . \cos SZP.$$

also da $ZP = 90 - p$, $ZS = 90 + r$

$SP = 90 - \delta' \pm x$ das obere Z. für Aufgang, das untere für Untergang der Sonne, so wird auch $\sin(\delta' \mp x) = - \sin r \sin p - \cos r \cos p \cos A$.

folglich

$$\cos A = - \frac{\sin r . \sin p + \sin(\delta' \mp x)}{\cos r . \cos p}.$$

Dieses Azimuth A heisst die Morgenweite oder die Abendweite (amplitudo ortiva, occidua) je nachdem der Aufgang oder der Untergang der Sonne statt findet.

§. 79.

Will man das Verhältniss der Tageslänge an den verschiedenen Orten der Erde nur im Allgemeinen übersehen, so kann man die Veränderung x der Declination währen des Tages, so wie auch die Refraction r vernachlässigen. Nimmt man dann die Formel

$$\cos z = \sin \delta . \sin p + \cos \delta \cos p . \cos s$$

wieder vor, so ergiebt sich aus derselben, indem wir $z = 90°$ setzen

$$\cos s = - \tang \delta . \tang p .$$

Für diejenigen Oerter, die auf dem Aequator liegen ist $p = 0$, also immer $\cos s = 0$, $s = 90°$, also die Zeit vom Aufgange bis zum Untergange der Sonne beträgt sechs Stunden. Bezeichnet man die Schiefe der Ecliptik durch ε, und bedenkt, dass die grösste Declination der Sonne, der Schiefe der Ecliptik, sowohl positiv als negativ genommen, gleich ist, so werden die grössten und kleinsten Stundenwinkel beim Aufgange der Sonne durch

$$\cos s = - \tang \varepsilon . \tang p . \text{ und durch}$$

$$\cos s = + \tang \varepsilon . \tang p$$

gefunden werden, indem man in der vorigen Formel statt δ, $+ \varepsilon$ und $- \varepsilon$ setzt. Man sieht also, das der längste Tag immer zur Zeit des Eintritts der Sonne in den Nullpunkt des Krebses, der kürzeste zur Zeit des Eintritts in den Nullpunkt des Steinbocks statt findet, weil zu diesen Zeiten die Sonne ihre grösste nördliche und ihre grösste südliche Declination erreicht hat. Auf der südlichen Erdhälfte findet das Gegentheil statt, da man für diese Gegenden p negativ nehmen muss, so dass die allgemeine Formel sich in

$$\cos s = + \tang \delta . \tang p$$

umändern.

§. 80.

Den an den verschiedenen Oertern statt findenden Tageslängen zufolge, theilte man die Oberfläche der Erde ehedem in Climata ab, indem man für jede halbe Stunde der Zunahme des längsten Tages die Polhöhe p berechnete, und durch die zugehörigen Punkte auf der Oberfläche der Erde Parallelkreise zog.

Der zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Raum der Oberfläche der Erde wurde ein Clima genannt. Strabo zählte acht solcher Climaten, indem er glaubte, dass über die Breite von 52° 8′ hinaus, die Erde wegen der grossen Kälte nicht mehr bewohnbar sey; Ptolomäus nimmt deren dreizehn an bis zu 59° 30′ nördlicher Breite. Diese Eintheilung ist an sich von weiter gar keinen Nutzen, und wir wollen blos der Uebersicht wegen, eine Tafel der Climaten bis zur Tageslänge von 24 Stunden beifügen, die durch die Formel

$$tang\, p = - \cos s \cot \varepsilon$$

berechnet ist, wo s die durch die Multiplication mit 15 in Grade verwandelte, grösste halbe Tageslänge, und ε die Schiefe der Ecliptik 23° 27′ 33″ bedeutet.

Tageslänge	12 St.	0′	Polhöhe	0°	0′
—	12.	30	—	8.	34.
—	13.	0	—	16.	44.
—	13.	30	—	24.	12.
—	14.	0	—	30.	49.
—	14.	30	—	36.	32.
—	15.	0	—	41.	24.
—	15.	30	—	45.	33.
—	16.	0	—	49.	3.
—	16.	30	—	52.	0.
—	17.	0	—	54.	31.
—	17.	30	—	56.	39.
—	18.	0	—	58.	28.
—	18.	30	—	60.	0.
—	19.	0	—	61.	19.
—	19.	30	—	62.	26.
—	20.	0	—	63.	23.
—	20.	30	—	64.	11.
—	21.	0	—	64.	50.
—	21.	30	—	65.	23.
—	22.	0	—	65.	51.
—	22.	30	—	66.	8.
—	23.	0	—	66.	22.
—	23.	30	—	66.	30.
—	24.	0	—	66.	32.

§. 81.

Wird die Polhöhe grösser als das Complement der Schiefe der Ecliptik, so dass z. B. $p = 90° - (\varepsilon - u)$, wo u kleiner als ε ist, so hat man

$$tang\, p = cot(\varepsilon - u)$$

folglich auch

$$cos\, s = \pm\, tang\, \varepsilon\; cot(\varepsilon - u) = \pm \frac{tang\, \varepsilon}{tang(\varepsilon - u)};$$

Dieser Ausdruck wird, da $tang\, \varepsilon > tang(\varepsilon - u)$, ein unächter Bruch, also der Bogen der zu diesem Cosinus gehört, unmöglich. Alle Oerter nun, bei denen diese angegebene Bedingung der geographischen Breite statt findet, liegen in der kalten Zone zwischen dem Pol und dem Polarkreis; folglich wird an den Oertern in der nördlichen kalten Zone, bei der grössten nördlichen Declination der Sonne, dieselbe nicht untergehen, und bei der grössten südlichen Declination, nicht aufgehen. Das Gegentheil findet bei denjenigen Oertern statt, welche in der südlichen kalten Zone liegen.

§. 82.

Es wird daher einen gewissen Werth der Declination geben, bei dem wenn die Sonne denselben erreicht, sie an einem bestimmten Orte der kalten Zone nicht mehr unter, oder nicht mehr aufgeht, je nachdem die Declination nördlich oder südlich genommen wird. Derselbe lässt sich leicht aus folgenden Betrachtungen ableiten. Setzt man in der Gleichung

$$cos\, s = -\, tang\, \delta .\; tang\, p.$$

$s = 180°$, so wird der Mittelpunkt der Sonne im nördlichen Theile des Meridians am Horizont erscheinen, und man hat dann

$$1 = tang\, \delta .\; tang\, p.$$
$$tang\, \delta = cot\, p.$$
$$\delta = 90 - p.$$

Hieraus schliessen wir, dass die Sonne nicht mehr untergeht, sobald ihre nördliche Declination dem Complement der Polhöhe des Ortes gleich ist, und da sie dieselbe Declination zweimal während des Zeitraums von März bis September, in welchem sie

sich über dem Aequator bewegt, erreicht, so folgt, dass sie so lange über dem Horizont verweilen wird, bis sie dieselbe Declination bei ihrem Zurückgehen nach den Aequator hin wieder erlangt hat.

§. 83.

Bezeichnet man die Länge der Sonne durch l, die Schiefe der Ecliptik durch ε, so hat man bekanntlich $\sin\delta = \sin l . \sin\varepsilon$
und wenn man statt δ, $90 - p$ setzt, so wird

$$\cos p = \sin l . \sin\varepsilon$$

und der aus dieser Gleichung sich ergebende Werth von l, nämlich

$$\sin l = \frac{\cos p}{\sin\varepsilon}$$

giebt den Ort, welchen die Sonne in der Ecliptik haben muss, damit sie an denjenigen Orte, dessen geographische Breite $= p$ ist, nicht mehr untergehe. Diese Gleichung giebt zwei Werthe für l, den einen zwischen 0° und 90°, den andern zwischen 90° und 180°; der erste giebt die Stellung der Sonne an, wo sie nicht mehr unterzugehen anfängt; der zweite, wo sie nicht mehr unterzugehen aufhört. Nimmt man z. B. $p = 80°$, so hat man

$$l = 25° \; 52' \text{ und}$$
$$= 154° \; 8';$$

an diesen beiden Stellen der Ecliptik befindet sich die Sonne am 15. April und am 27. August; während dieser Zeit geht also die Sonne unter 80° nördlicher Breite nicht unter.

§. 84.

Setzt man ferner in der Gleichung

$$\cos s = - \tang\delta . \tang p.$$

$s = 0'$, so wird sich der Mittelpunkt der Sonne in dem südlichen Theile des Meridians am Horizont zeigen, und man hat dann

$$1 = - \tang\delta . \tang p$$
$$\tang\delta = - \cot p.$$
$$\delta = - (90° - p);$$

hat also die Sonne diejenige südliche Declination, welche dem Complement der Polhöhe des Ortes gleich ist, so geht sie demselben nicht mehr auf. Substituirt man diesen Werth von δ in die Gleichung

$$\sin\delta = \sin l.\ \sin\varepsilon \quad \text{so wird dieselbe}$$
$$-\cos p = \sin l.\ \sin\varepsilon. \quad \text{also auch}$$
$$\sin l = -\frac{\cos p}{\sin\varepsilon}.$$

Die beiden sich aus dieser Gleichung für l ergebenden Werthe sind um 180° grösser als die vorher für die nicht untergehende Sonne gefundenen. In dem erwählten Beispiel betragen die beiden Sonnenlängen 205° 42′ und 334° 8′, welchen Stand die Sonne am 18. October und 23. Februar hat, während dieser Zeit geht also die Sonne unter 80° nördlicher Breite nicht auf.

§. 85.

Diese beiden Zeiträume werden aber durch die Refraction verändert; der erstere wird durch dieselbe verlängert, der zweite verkürzt, und zwar beträgt die Verkürzung des zweiten verhältnissmässig bei weitem mehr als die Verlängerung des erstern, indem die Strahlenbrechung in der letztern Zeitperiode, wo die nördlichen Gegenden Winter haben, viel bedeutender ist, als zur Zeit des immerwährenden Sonnenscheins. Ausserdem trägt auch noch die scheinbare Grösse der Sonne zur Verlängerung des ersten, zur Verkürzung des zweiten bei, indem der Mittelpunkt der Sonne nach 16 Minuten unter dem Horizont seyn kann, und doch der oberste Sonnenrand schon im Horizont gesehen wird.

§. 86.

Will man diese beiden Aenderungen mit berücksichtigen, so setzt man in der Formel

$$\cos z = \sin\delta\ \sin p + \cos\delta\ \cos p\ \cos s$$

an die Stelle von z, 90° + der Refraction + dem Halbmesser der Sonne $= 90° + r + 16'$ und wenn man dann $s = 180°$ nimmt, so kommt

$$\cos(90° + r + 16') = \sin\delta \sin p - \cos\delta \cos p$$
$$= -\cos(\delta + p) \text{ folglich}$$
$$90° + r + 16' = 180 - (\delta + p)$$
$$\delta = 90 - p - r - 16'$$

und hieraus ergiebt sich die Länge der Sonne

$$\sin l = \frac{\cos(p + r + 16')}{\sin \varepsilon}$$

für den Anfang der Zeit, wo die Sonne immer über dem Horizont zu stehen anfängt.

Nimmt man hingegen $s = 0$, so wird aus der allgemeinen Gleichung

$$\cos(90 + r' + 16) = \cos\delta \cos p + \sin\delta \sin p$$
$$= \cos(p - \delta) \text{ folglich}$$
$$90 + r' + 16 = p - \delta.$$
$$\delta = -(90° - p + r + 16')$$

und für den Stand der Sonne

$$\sin l = -\frac{\cos(p - r - 16')}{\sin \varepsilon}$$

welcher dann statt findet, wenn die Sonne nicht mehr aufzugehen anfängt.

Die Strahlenbrechung und der Halbmesser der Sonne haben also für den immerwährenden Tag dieselbe Wirkung, als ob die geographische Breite des Ortes um $r + 16'$ grösser wäre; bei der fortwährenden Nacht hingegen sind die durch diese Ursachen hervorgebrachten Veränderungen von der Beschaffenheit, als ob der Ort um $r + 16'$ südlicher läge. Im letztern Falle kann diese Veränderung über $1\frac{1}{2}$ Grad betragen.

§. 87.

Die erste Beobachtung über die grosse Ungewissheit des Aufganges und Unterganges der Sonne in der kalten Zone wegen der ganz ausserordentlichen Strahlenbrechung, ist die von Heemskerke und Barenss. Diese Holländer sahen sich genöthigt im Jahre 1597 auf Nova Zembla zu überwintern, und ihren Beobachtungen zufolge, zeigte sich die Sonne zum letztenmale mit ihrem obern Rande am 4. November und wurde zuerst wieder sichtbar am 24. Januar. Diese Zeitpunkte sind die des alten Styls, und um sie auf

unsere Zeitrechnung zu reduciren, muss man zu jedem zehn Tage hinzu addiren. Die Sonnenlängen für diese Tage sind 232° und 314 Grad. Nimmt man die damals statt findende Schiefe der Ecliptik zu 23° 29′ an, so erhält man für beide Zeitpunkte die Declination $\delta = -18^\circ\ 18'$

$\delta = -16^\circ\ 39$

und hieraus für den Untergang nach den Formeln des vorigen §.

$p - r = 71^\circ\ 58'$ für den Untergang

$p - r = 73^\circ\ 37'$ für den Aufgang.

Die Polhöhe p hatten die Beobachter zu 76° gefunden; man hat also die Grösse der Strahlenbrechungen: $r = 4^\circ\ 2'$, $r = 2^\circ\ 23'$, welche grösser sind, als sie irgend eine andere Beobachtung gegeben hat. Man darf aber auf diese Bestimmungen nicht viel bauen, da die Polhöhe mit den damals so mangelhaften Instrumenten gemessen, sehr fehlerhaft seyn kann.

§. 88.

Man hat den Zeitraum, in welchem die Sonne vom Frühlingsaequinoctialpunkt bis wieder zum Frühlingsaequinoctialpunkt gelangt, und der das tropische Jahr genannt wird, in vier Theile getheilt, die die Jahrszeiten heissen, nämlich Frühling, Sommer, Herbst und Winter. Das tropische Jahr ist etwas kürzer als das §. 46. erwähnte siderische Jahr, weil wegen dem Zurückgehen der Aequinoctialpunkte, die Sonne früher wieder den Aequinoctialpunkt erreichen muss, als es ohne die rückgängige Bewegung desselben geschehen wäre; nach Delambre beträgt die Länge dieses Zeitraums 365 T. 5 St. 48′ 51″607. Uebrigens ist dieses Jahr die Grundlage unserer bürgerlichen Zeitrechnung.

§. 89.

Der Sommer fängt für eine bestimmte geographische Breite dann an, wenn der Abstand der Sonne vom Scheitelpunkte irgend eines Ortes, der auf dem dieser geographischen Breite entsprechenden Parallel-

kreise sich befindet, am kleinsten ist. Wird der Zenithabstand der Sonne am grössten, so fängt der Winter an; hat die Sonne einen mittlern Zenithabstand erreicht, so ist entweder Frühlingsanfang oder Herbstanfang, je nachdem sich die Sonne nach ihrem mittlern Zenithabstande dem Minimum oder dem Maximum des Zenithabstandes nähert. Der Anfang der Jahrszeiten hängt also von der geographischen Breite des Parallelkreises, auf dem der Ort liegt, und der Länge der Sonne ab.

§. 90.

Für diejenigen Oerter, welche ausserhalb der Wendekreise liegen, ist die Bestimmung des Anfangs der Jahrszeiten sehr leicht; ist nämlich p die nördliche geographische Breite, δ die Declination der Sonne, ebenfalls nördlich genommen, und z die nach dem Südpunkte zu gezählte Zenithdistanz, so ist für denjenigen Ort des Parallelkreises, für welchen die Sonne, während sie die Declination δ hat, durch den Meridian geht,

$$z = p - \delta.$$

so dass z am kleinsten wird, wenn δ seinen grössten Werth erlangt. Der grösste Werth von δ ist der Schiefe der Ecliptik gleich, die wir wie gewöhnlich durch ε bezeichnen wollen; folglich wird der Sommer für alle diejenigen Oerter, welche sich ausserhalb der Wendekreise befinden, anfangen wenn $z = p - \varepsilon$, weil hierdurch z den kleinsten Werth erhält.

Seinen grössten Werth erlangt z, wenn die Declination der Sonne den grössten südlichen Werth hat, also wenn $\delta = -\varepsilon$; dann wird $z = p + \varepsilon$, und der Winter nimmt seinen Anfang.

§. 91.

Nun ist allgemein, wenn man durch l die Länge der Sonne bezeichnet

$$\sin\delta = \sin l . \sin\varepsilon,$$

folglich wenn $\delta = \varepsilon$ ist, so wird

$$\sin l = 1, \; l = 90^\circ,$$

und der Sommer fängt an, wenn die Länge der Sonne

90° beträgt, sie also im Nullpunkt des Krebses, oder im Sommersolstitialpunkt sich befindet.

Wird $\delta = - \varepsilon$, so hat man

$$sin\, l = -1, \quad l = 270°,$$

und der Winter nimmt seinen Anfang, wenn die Sonne 270° Länge hat, d. h. wenn sie in den Nullpunkt des Steinbocks oder in den Wintersolstitialpunkt tritt.

§. 92.

Die mittlere Zenithdistanz findet man, indem die kleinste und grösste Zenithdistanz addirt, und die Summe halbirt wird

$$= \frac{p - \varepsilon}{2} + \frac{p + \varepsilon}{2} = p.$$

folglich fängt der Frühling oder der Herbst an, wenn die mittlere Zenithdistanz der Sonne der Polhöhe gleich ist; zu dieser Zeit muss sie aber im Aequator sich befinden. Dieses ist der Fall wenn $\delta = 0$, und die Formel $sin\, \delta = sin\, l\ sin\, \varepsilon$, zeigt, dass dann entweder $l = 0$, oder $l = 180°$ beträgt. In diesen Stellungen befindet sich die Sonne im Nullpunkt des Widders, und im Nullpunkt der Waage, oder im Frühlingsaequinoctialpunkt und im Herbstaequinoctialpunkt.

Von 0° bis 90° nimmt die Declination der Sonne zu, der Zenithabstand nähert sich daher seinem kleinsten Werthe, folglich wird beim Eintritte der Sonne in den Nullpunkt des Widders der Frühling anfangen, der Herbst hingegen muss beim Eintritte der Sonne in den Nullpunkt der Waage seinen Anfang nehmen.

§. 93.

In der südlichen gemässigten Zone findet grade das Gegentheil der Folge der Jahrszeiten statt, so dass, wenn in unsern Gegenden die Jahrszeiten so auf einander folgen, Frühling, Sommer, Herbst und Winter, die entsprechenden Jahrszeiten in der südlichen gemässigten Zone, Herbst, Winter, Frühling

und Sommer sind. Dies ergiebt sich leicht aus der Betrachtung der vorigen Formel

$$z = p - d,$$

nur muss man bemerken, dass in der südlichen Erdhälfte die Breite p negativ genommen wird.

Setzt man also $p = -p'$, so dass p' eine wirklich positive Grösse ist, so verändert sich für den südlich vom Aequator liegenden Theil der Erde vorige Formel in diese

$$z = -(p' + \delta)$$

und da der Lage der Oerter in der gemässigten Zone zufolge, p' immer grösser als ε, so wird, wenn wir auch statt δ seinen grössten negativen Werth $-\varepsilon$ setzen, $p' - \varepsilon$ positiv seyn, also die Zenithdistanz z negativ ausfallen. Da nun in der als Normalfall betrachteten, nördlichen gemässigten Zone, die Zenithdistanz südlich und positiv ist, so wird in der südlichen gemässigten Zone die Zenithdistanz der Sonne immer nördlich seyn.

§. 94.

Wir wollen als ein hierher gehöriges Beispiel den Frühlingsanfang im Jahre 1829 berechnen.

Hierzu entnehmen wir aus der Connoissance des Tems auf das Jahr 1829 folgende zwei Declinationen, die wegen der sehr gleichförmigen Zunahme der Declination um die Zeit der Aequinoctien, hinreichend sind

den 20. März $\delta = -0° \; 8' \; 38''$
— 21. — $\delta = +0° \; 15' \; 1''$.

Die Zeitpunkte, für welche diese Declinationen gelten, sind die Durchgänge der Sonne durch den Pariser Meridian. Der Unterschied beider Declinationen beträgt $23' \; 39'' = 1419''$, und um den Frühlingsanfang, für welchen die Declination Null ist zu finden, braucht man nur die Proportion

$$23' \; 39'' : 8' \; 38'' = 24 \text{ St.} : x$$

oder $$1419 : 518 = 24 \text{ St.} : x.$$

Es ergiebt sich aus dieser Proportion

$$x = 8 \text{ St. } 45' \; 40''$$

also wird der Frühlingsanfang zu Paris am 20. März 8 Uhr 45' 40'' Nachmittags wahre Zeit statt finden.

Die hinzuzusetzende Zeitgleichung beträgt 7′ 35″, also tritt der Frühling um 8 Uhr 53′ 15″ mittlere Zeit ein. Da Göttingen in Zeit 30′ 25″ östlicher liegt, so wird man in Göttingen beim Eintritte des Frühlings 9 Uhr 23′ 40″ Abends zählen. Der Meridian, in welchem die Sonne zur Zeit des Frühlingsanfangs tritt, liegt in Zeit 8 St. 45′ 40″ westlicher als Paris, oder in Bogen ausgedrückt, indem man mit 15 multiplicirt, 131° 25′ westlich von Paris, oder wenn man 20° abzieht, in 91° 25′ westlicher Länge von Ferro.

§. 95.

Bei der Berechnung des Sommer- oder Winteranfangs, muss man wegen der ungleichförmigern Bewegung in Declination zur Zeit der Solstitien, mehr als zwei Declinationen nehmen. Wir wollen daher den Anfang des Sommers für das Jahr 1829 berechnen. In der Connoissance des tems findet man folgende Declination der Sonne

d. 20. Juni $\delta = + 23° 27' 13''$
d. 21. — $\delta = + 23° 27' 32''$
d. 22. — $\delta = + 23° 27' 26''$

wo die Declinationen eben so wie vorher beim Durchgange der Sonne durch den Pariser Meridian gelten. Man setze nun

$$\delta = A + Bt + Ct^2$$

wo t die seit dem am 21. Juni statt findenden Durchgang der Sonne durch den Meridian, verflossene Zeit in Tagen ausgedrückt, bedeutet. Man hat also zur Bestimmung der drei Coefficienten A, B, C die drei Gleichungen

$$23° 27' 13'' = A - B + C.$$
$$23° 27' 32'' = A$$
$$23° 27' 26'' = A + B + C.$$

indem man beim 20. Juni $t = -1$, und beim 22. Juni $t = +1$ setzt. Aus denselben ergiebt sich

$$A = 23° 17' 32''$$
$$B = + 6'' 5.$$
$$C = - 12'' 5.$$

also $\delta = 23° 27' 32 + 6'' 5 t - 12{,}5 t^2$.

Sucht man aus dieser Gleichung das Maximum von δ, so muss man $\frac{d\delta}{dt} = 0$ setzen, folglich erhält man

$$0 = 6''5 - 25\,t.$$

und hieraus

$$t = \frac{65}{250} = 6 \text{ St. } 14' \, 24''$$

also würde hiernach das Sommersolstitium zu Paris am 21. Juni 6 Uhr 14′ 24″ wahrer Zeit eintreten.

§. 96.

Wegen der geringen Aenderung der Declination zur Zeit der Solstitien ist aber diese Bestimmungsart etwas ungenau, und man wird besser thun sich bei dieser Untersuchung der Länge der Sonne zu bedienen. Man findet aus der Connoissance de tems

d. 21. Juni Länge d. ⊙ = 89° 45′ 2″
d. 22. — — — — = 90° 42′ 15″

und da zu den Zeiten der Sonnenstillstände die Bewegung in der Länge sehr gleichförmig ist, so sind diese beiden Längen hinreichend, um den Anfang des Sommers oder den Zeitpunkt, in welchem die Länge der Sonne 90° beträgt, genau zu bestimmen. Die Differenz beider Längen ist

$$57' \, 13'' = 3433'';$$

der Unterschied der Länge der Sonne am 21. Juni im wahren Mittag bis zu 90 Grad

$$14' \, 58'' = 898''.$$

Man hat daher die Proportion

$$3433'' : 898 = 24 \text{ St. } x$$

und hieraus ergiebt sich

$$x = \frac{898 \cdot 24}{3433} = 6 \text{ St. } 16' \, 40'',$$

also der Sommersanfang in Pariser wahrer Zeit den 21. Juni 6 St. 16′ 40″.

Die Reduction auf mittlere Zeit beträgt 1′ 21″; folglich wird in mittlerer Göttinger Zeit, der Sommer den 21. Juni 6 St. 48′ 26″ Abends anfangen.

§. 97.

Liegt ein Ort zwischen den Wendekreisen, so ist die Folge der Jahrszeiten etwas anders, und man muss für diese Oerter das Jahr in acht Theile zerlegen, so dass jede Jahrszeit zweimal wiederkehrt. Als Normalfall setzen wir, dass der Ort zwischen dem Aequator und dem Wendekreise des Krebses liege, also eine nördliche geographische Breite habe. Ferner sey die Zenithdistanz positiv, in dem Falle, wenn die Sonne südlich vom Zenith durch den Meridian geht. Man bezeichne

die geographische Breite durch p,
die nördliche Declination der Sonne durch δ,
die Zenithdistanz derselben durch z,

so ist allgemein $z = \pm (p - \delta)$.
und wir müssen, den vorgelegten Bedingungen zufolge, das positive Vorzeichen wählen, weil sonst bei der grössten südlichen Declination der Sonne $-\varepsilon$, $-(p+\varepsilon)$ negativ ausfallen würde, welches nicht der Fall seyn soll, da bei der grössten südlichen Declination der Sonne, die Sonne südlich vom Zenith vorbeigeht. Wir haben also

$$z = p - \delta.$$

Nun sey $\delta = -\varepsilon$, so wird

$$z = p + \varepsilon$$

welches ein Maximum ist. Dann fängt der Winter an. Die südliche Declination der Sonne nimmt ab, sie durchschneidet den Aequator und erreicht eine nördliche Declination $= p$, dann wird $z = 0$, und der Sommer nimmt seinen Anfang. Während dieser Zeit erreichte die Sonne eine mittlere Zenithdistanz

$$= \frac{p+\varepsilon}{2}.$$

Hieraus bestimmt sich die statt findende Declination der Sonne aus der Gleichung

$$\frac{p+\varepsilon}{2} = p - \delta.$$

$$\delta = \frac{p-\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon - p}{2}$$

also südlich, da $\varepsilon > p$ ist. Zu dieser Zeit fängt der Frühling an.

Die nördliche Declination der Sonne nimmt zu, is $\delta = \varepsilon$, dann wird

$$z = p - \varepsilon = -(\varepsilon - p).$$

lso ihr Zenithabstand nördlich, und der Winter ingt wieder an.

Zwischen der Zenithdistanz $= 0$, und $= -(\varepsilon - p)$ egt für den Herbstanfang die mittlere

$$= -\frac{\varepsilon - p}{2}$$

elche der Declination

$$\delta = \frac{p + \varepsilon}{2}$$

ıtspricht. Indem also die Sonne vom Wendekreise es Steinbocks zum Wendekreise des Krebses über-eht, bildet sie schon vier Jahrszeiten, und während es Zurückkehrens bildet sie dieselben noch einmal.

Nach den verschiedenen Declinationen geordnet, lgen also in den Gegenden zwischen dem Aequator ıd dem Wendekreise des Krebses, die Jahrszeiten auf einander:

$\delta = -\varepsilon$	Wintersanfang
$\delta = -\frac{\varepsilon - p}{2}$	Frühlingsanfang.
$\delta = p.$	Sommersanfang
$\delta = \frac{p + \varepsilon}{2}$	Herbstanfang.
$\delta = +\varepsilon$	Wintersanfang
$\delta = \frac{p + \varepsilon}{2}$	Frühlingsanfang.
$\delta = p.$	Sommersanfang
$\delta = -\frac{\varepsilon - p}{2}$	Herbstanfang.

Die Sonne geht also zweimal des Jahrs durch s Zenith, welcher Zeitpunkt zugleich den Anfang s Sommers bezeichnet.

Für diejenigen Oerter, welche jenseits zwischen m Aequator und dem Wendekreise des Steinbocks gen, findet man die Folge der Jahrszeiten, indem an in der vorigen Tabelle, den Sommer mit dem Vinter, den Herbst mit dem Frühling, vertauscht.

§. 98.

Als ein Beispiel wollen wir die geographische Breite des Ortes $\rho = 15°$ nehmen, und $\varepsilon = 23° 28'$ setzen, welches zu der angeführten Berechnung des Anfangs der Jahrszeiten auf den Tag überflüssig genau ist. Um nun die den angegebenen Declinationen entsprechenden Längen der Sonne zu finden, bediene man sich der Formel

$$\sin l = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}$$

und man erhält für die Declinationen

$\delta = -23° 28'$	$l = 270°$
$\delta = -4° 14'$	$l = 349°$
$\delta = +15° 0'$	$l = 40°$
$\delta = +19° 14'$	$l = 56°$
$\delta = +23° 28'$	$l = 90°$
$\delta = +19° 14'$	$l = 124°$
$\delta = +15° 0'$	$l = 140°$
$\delta = -4° 14'$	$l = 191°$

folglich

Anfang	des	Winters	den	21. December
—	—	Frühlings ...	—	9. März
—	—	Sommers ...	—	1. May
—	—	Herbstes ...	—	17. May
—	—	Wintees ...	—	21. Juni
—	—	Frühlings ...	—	27. Juli
—	—	Sommers ...	—	13. August
—	—	Herbstes ...	—	4. October.

Von der Dämmerung.

§. 99.

Wenn auch die Sonne nicht mehr ihren Stand über dem Gesichtskreise hat, so findet doch noch immer eine bedeutende Helligkeit statt, die nach und nach sich verringert und zuletzt in völlige Dunkelheit übergeht. Man nennt diese Helligkeit die Dämmerung, und zwar die vor Sonnenaufgang statt findende, die Morgendämmerung, die nach Sonnenuntergang vorhandene, die Abenddämmerung. Die

Dämmerung wird von der Luft hervorgebracht, welche, wie jeder andere Körper, die Eigenschaft hat das Licht zurückzuwerfen, so dass, wenn auch die Oberfläche der Erde an einem bestimmten Orte nicht mehr direct von den Sonnenstrahlen erreicht werden kann, doch noch die darüber befindlichen Luftschichten von der Sonne Licht erhalten und es uns zurückwerfen. Diese Eigenschaft der Luft bemerkt man auch schon am Tage, indem die Oerter, nach welchen die Sonne ihre Strahlen wegen dazwischen liegenden Gegenständen, nicht schicken kann, doch sehr hell sind, und die an diesen Oertern vorhandene Helligkeit kann durch nichts anderes hervorgebracht seyn, als durch das von der Atmosphäre zerstreuete und zurückgeworfene Licht, obgleich auch andere Gegenstände zur Zurückwerfung noch beitragen können. Die ausführlichere Erklärung, wie die Sonnenstrahlen in der Atmosphäre gebrochen und zurückgeworfen werden, wird in dem physischen Theile abgehandelt werden.

§. 100.

Der Zeitpunkt, in welchem die völlige Dunkelheit eintritt, d. h. wenn die Dämmerung so abgenommen hat, dass die Sterne von der sechsten Grösse dem blossen Auge sichtbar werden, macht das Ende der astronomischen Dämmerung aus. Um denselben auszumitteln hat man verschiedene Mal Beobachtungen angestellt, und gefunden, dass im Mittel die Tiefe der Sonne unter dem Horizont 18°, oder ihre Zenithdistanz 108° betragen muss, wenn die angegebene Erscheinung eintreten soll. Alhazen nimmt die Tiefe der Sonne unter dem Horizont 19°, Nunez 16°, Cassini 15°, Frisius 18°, Tycho de Brahe 17°. Brandes hat in Breslau $17\frac{1}{4}$° bis $17\frac{1}{2}$° beobachtet. Ausser der astronomischen Dämmerung hat man auch noch die bürgerliche Dämmerung, welche dann sich endigt, sobald man ohne künstliche Erleuchtung in den Zimmern gewöhnliche Schrift nicht mehr lesen kann. Obgleich hierbei viel auf die Lage des Zimmers rücksichtlich der Himmelsgegend und der umgebenden Gegenstände, so wie auf den

Zustand des Himmels ankommt, so kann man doch bei nicht zu ungünstigen Umständen annehmen, dass diese bürgerliche Dämmerung sich endet, sobald die Sonne eine Tiefe von $6\frac{1}{2}$ Grad unter dem Horizont erreicht hat.

§. 101.

Bezeichnet man durch p die Polhöhe des Ortes, durch δ die Declination der Sonne, durch s den Stundenwinkel, und durch z die Zenithdistanz, so hat man

$$\cos z = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p \cos s.$$

und wenn zwei andere Zenithdistanzen z', z'' gegeben sind, die den Stundenwinkeln s', s'' entsprechen, so erhält man ebenfalls die beiden Gleichungen

$$\cos z' = \sin\delta . \sin p + \cos\delta . \cos p \cos s'$$
$$\cos z'' = \sin\delta . \sin p + \cos\delta . \cos p . \cos s''.$$

Setzt man nun

$$z' = 90°, z'' = 108°,$$

so kann man die beiden entsprechenden Stundenwinkel

$$\cos s' = - \tan\delta . \tan p.$$

$$\cos s'' = \frac{\cos 108 - \sin\delta \sin p.}{\cos\delta \cos p}$$

berechnen; dann giebt s' den Stundenwinkel beim Untergange der Sonne, s'' den beim Ende der astronomischen Dämmerung, folglich der in Zeit ausgedrückte Unterschied derselben $= s'' - s'$, die Länge der Dämmerung. Nimmt man ferner noch

$$\cos s''' = \frac{\cos 96\frac{1}{2} - \sin\delta \sin p.}{\cos\delta \cos p.}$$

so giebt der in Zeit verwandelte Unterschied $s''' - s'$ die Länge der bürgerlichen Dämmerung.

§. 102.

Man kann den Unterschied $s'' - s'$ durch eine einzige Formel finden, indem man die beiden Gleichungen

$$0' = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p . \cos s'$$
$$\cos z'' = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p . \cos s''$$

zu einander addirt, und auch von einander subtrahirt. Auf diese Weise finden sich zwei neue Formeln

$$\cos z'' = 2\sin\delta\ \sin p + \cos\delta\ \cos p\ (\cos s' + \cos s'')$$
$$\cos z'' = \cos\delta\ \cos p\ (\cos s'' - \cos s').$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos s'' + \cos s' = 2\cos\tfrac{1}{2}(s'' + s')\ \cos\tfrac{1}{2}(s'' - s').$$
$$\cos s'' - \cos s' = -2\sin\tfrac{1}{2}(s'' + s')\ \sin\tfrac{1}{2}(s'' - s').$$

folglich auch

$$\tfrac{1}{2}\cos z'' = \sin\delta\sin p + \cos\delta\cos p\cos\tfrac{1}{2}(s'' + s')\cos\tfrac{1}{2}(s'' - s'),$$
$$\tfrac{1}{2}\cos z'' = -\cos\delta\ \cos p\ \sin\tfrac{1}{2}(s'' + s').\ \sin\tfrac{1}{2}(s'' - s'),$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\cos\tfrac{1}{2}(s'' + s') = \frac{\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta.\ \sin p.}{\cos\delta\ \cos p\ \cos\tfrac{1}{2}(s'' - s')}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(s'' + s') = -\frac{\cos z''}{2\cos\delta\ \cos p\ \sin\tfrac{1}{2}(s'' - s')}.$$

Quadrirt man beide Gleichungen, und addirt die Quadrate zusammen, so kommt

$$\cos\delta^2\ \cos p^2\ \sin\tfrac{1}{2}(s'' - s)^2.\ \cos\tfrac{1}{2}(s'' - s')^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\cos z''^2\ \cos\tfrac{1}{2}(s'' - s')^2$$
$$+ \sin\tfrac{1}{2}(s'' - s')^2\ [\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta\ \sin p]^2.$$

Es ist aber auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(s'' - s')^2 = \frac{1 - \cos(s'' - s')}{2}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(s'' - s')^2 = \frac{1 + \cos(s'' - s')}{2}$$

folglich wenn man $s'' - s' = x$, der Kürze wegen setzt,

$$\cos\delta^2\ \cos p^2\ (1 - \cos x^2) = \tfrac{1}{2}\cos z''^2\ (1 + \cos x)$$
$$+ 2\,(1 - \cos x)\ [\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta\ \sin p]^2.$$

Diese Gleichung ist für $\cos x$ vom zweiten Grade, und setzt man der Kürze wegen

$$\cos\delta^2\ \cos p^2 = a.$$
$$\tfrac{1}{4}\cos z''^2 - (\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta\ \sin p)^2 = b$$
$$\cos\delta^2\ \cos p^2 - \tfrac{1}{2}\cos z''^2 - 2\,(\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta\ \sin p)^2 = c$$

so erhält sie die Form

$$a\cos x^2 + 2b\cos x = c.$$

also wenn man dieselbe auflösst,

$$a\cos x + b = \pm\sqrt{ac + bb}.$$

Man kann bemerken, dass

$$a + 2b = c + \cos z''^2$$

also die Wurzelgrösse

$$\sqrt{ac + bb} = \sqrt{(a + b)^2 - a\cos z''^2}$$

Nun ist aber

$$a + b = \cos\delta^2 \cos p^2 - \sin\delta^2 \sin p^2 + \cos z'' \sin \sin p$$
$$= \cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + \cos z'' \sin\delta \sin p.$$

und da auch

$$(a+b)^2 - a\cos z''^2$$
$$= (a+b+\cos z''\sqrt{a})(a+b-\cos z''\sqrt{a}).$$

$\cos z''\sqrt{a} = \cos\delta \cos p \cos z''$ also

$$a+b+\cos z''\sqrt{a} = \cos(p-\delta)\cos(p+\delta)$$
$$+ \cos z''[\sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p]$$
$$= \cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + \cos z'' \cos(p-\delta)$$
$$= 2\cos(p-\delta)\cos\frac{p+\delta+z''}{2}.\ \cos\frac{p+\delta-z''}{2}.$$

und $a + b - \cos z''\sqrt{a}$

$$= 2\cos(p+\delta)\sin\frac{p-\delta+z''}{2}\ \sin\frac{z''-p+\delta}{2}.$$

so wird die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse

$$ac + bb = 4\cos(p-\delta)\cos(p+\delta).\ \cos\frac{p+\delta+z''}{2}$$
$$\times \cos\frac{p+\delta-z''}{2}.\ \sin\frac{p-\delta+z''}{2}\ \sin\frac{z''-p+\delta}{2}.$$

§. 103.

Wir wollen nun untersuchen welche Declination die Sonne haben muss, damit die Zeit der Dauer der astronomischen Dämmerung ein Minimum werde. Die Zeit der Dauer ist immer dem Unterschiede $s''-s'$ der beiden Stundenwinkel proportional, also muss auch $s''-s'$ ein Minimum werden. Setzt man

$$s'' - s = 2u \qquad s'' + s = 2v$$

so hat man aus vorigem Paragraph die beiden Gleichungen

1) $\frac{1}{2}\cos z'' = \sin\delta \sin p + \cos\delta \cos p \cos u \cos v.$
2) $\frac{1}{2}\cos z'' = -\cos\delta \cos p \sin u \sin v.$

Es muss nun die Declination δ so bestimmt werden, dass $\frac{du}{d\delta} = 0$. wie aus der Lehre vom Maximum und Minimum bekannt ist.

Differentiirt man die beiden vorigen Gleichungen, indem man δ, u, v als veränderlich betrachtet, und

lässt zugleich die in du multiplicirten Glieder weg, so erhält man:

$$0 = \cos\delta \; \sin p - \sin\delta \; \cos p \; \cos u \; \cos v$$
$$- \cos\delta \; \cos p \; \cos u \; \sin v \; \frac{dv}{d\delta}.$$
$$0 = \sin\delta \; \cos p \; \sin u \; \sin v$$
$$- \cos\delta \; \cos p \; \sin u \; \cos v \; \frac{dv}{d\delta}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Differentialgleichungen durch $\sin u \; \cos v$, die zweite durch $\cos u \; \sin v$, und zieht beide von einander ab, so fällt das Differentialverhältniss $\frac{dv}{d\delta}$ heraus, und man findet,

$$0 = \cos\delta \; \sin p \; \cos v \; \sin u - \sin\delta \; \cos p \; \cos u \; \sin u \; \cos v^2$$
$$- \sin\delta \; \cos p \; \sin u \; \cos u \; \sin v^2$$

oder wenn man die beiden letzten Glieder zusammenzieht und durch $\sin u$ dividirt

3) $0 = \cos\delta \; \sin p \; \cos v - \sin\delta \; \cos p \; \cos u.$

Die Gleichungen (2) und (3) geben wenn sie quadrirt werden,

$$\sin u^2 = \frac{\cos z^2}{4\cos\delta^2 \; \cos p^2 \; \sin v^2}.$$
$$\cos u^2 = \frac{\cos\delta^2 \; \sin p^2 \; \cos v^2}{\sin\delta^2 \; \cos p^2}$$

folglich wenn man dieselben zusammenaddirt,

4) $4\cos\delta^2 \; \sin\delta^2 \; \cos p^2 \; \sin v^2 = \cos z''^2 \; \sin\delta^2$
$+ 4\cos\delta^4 \; \sin p^2 \; \cos v^2 \; \sin v^2.$

Multiplicirt man die Gleichung (3) durch $\cos v$, so wird

$$\cos u \; \cos v = \frac{\cos\delta \; \sin p \; \cos v^2}{\sin\delta . \; \cos p}$$

und da aus (1)

$$\cos u \; \cos v = \frac{\cos z'' - 2\sin\delta . \; \sin p}{2\cos\delta \; \cos p}$$

so wird auch

5) $\frac{\cos\delta \; \sin p \; \cos v^2}{\sin\delta} = \frac{\cos z'' - 2\sin\delta \; \sin p.}{2\cos\delta}$ also

$$\cos v^2 = \frac{\cos z'' \; \sin\delta - 2\sin\delta^2 \; \sin p}{2\cos\delta^2 \; \sin p}$$

$$\sin v^2 = \frac{2\sin p - \cos z'' \sin \delta}{2\cos \delta^2 \sin p}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\cos v^2$ und $\sin v^2$ in (4) so kommt

$$(2\sin p - \cos z'' \sin \delta)(2\sin \delta - \cos z'' \sin p)$$
$$= \cos z''^2 . \sin \delta \sin p.$$

oder wenn man das Product entwickelt

$$2\sin \delta \sin p - \sin p^2 \cos z'' - \cos z'' \sin \delta^2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin \delta = \frac{\sin p (1 - \sin z'')}{\cos z''}$$

$$= \frac{\sin p (1 - \sin 108^\circ)}{\cos 108^\circ} = \frac{\sin p (1 - \sin 72^\circ)}{- \cos 72^\circ}.$$

Es findet daher die kürzeste Dämmerung immer bei einer südlichen Declination der Sonne statt, so lange die geographische Breite p nördlich ist.

Man kann die Formel auch noch für die numerische Berechnung etwas besser darstellen; denn man hat

$$1 - \sin 72^\circ = (\cos 36^\circ - \sin 36^\circ)^2$$
$$\cos 72^\circ = (\cos 36^\circ)^2 - (\sin 36^\circ)^2$$

folglich

$$\frac{1 - \sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 36^\circ - \sin 36^\circ}{\cos 36^\circ + \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{1 - \tang 36^\circ}{1 + \tang 36^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 81^\circ} = \tang 9^\circ$$

folglich

$$\sin \delta = - \sin p . \tang 9^\circ.$$

Für die kleinste Dauer der bürgerlichen Dämmerung erhält man auf ähnliche Weise

$$\sin \delta = - \sin p . \tang 3\tfrac{1}{4}^\circ.$$

§. 104.

Wir wollen annehmen es sey $p = 51^\circ\ 32'$, so hat man

$$- \sin p = 9.89375\ n$$
$$\tang 9^\circ = 9.19971$$
$$\sin \delta = 9.09346\ n$$
$$\delta = - 7^\circ\ 7'\ 30''.$$

Diese Declination hat die Sonne am 2. März und am 11. October.

$$\tan \delta = 9.09691\, n$$
$$-\tan p = 0.09991\, n$$
$$\cos s' = 9.19682$$
$$s' = 80^\circ\ 56'\ 50''$$

$$\sin \delta = 9.09346\, n \qquad \cos \delta = 9.99663.$$
$$\sin p = 9.89375 \qquad \cos p = 9.79383$$
$$8.98721\, n. \qquad 9.79046$$
$$-\ 0{,}09710$$
$$\cos 108^\circ = -\ 0{,}30902$$
$$-\ 0{,}21192$$
$$9.32617\, n.$$
$$9.79046.$$
$$\cos s'' = 9.53571\, n, \qquad s'' = 110^\circ.\ 4'.\ 50''.$$

folglich $s'' - s' = 29^\circ\ 8'$, oder in Zeit 1 St. 57', welches für die angegebene Polhöhe die kleinste Dauer der Dämmerung ist.

§. 105.

Bei dieser Auflösung der Aufgabe über die kleinste Dauer der Dämmerung haben wir die Refraction, so wie die Aenderung der Declination der Sonne, während sie sich vom Horizont bis zu 18° Tiefe bewegt, ganz vernachlässigt. Man kann diese kleinen Grössen aber um so eher vernachlässigen, da dieselben in bei weitem engern Gränzen eingeschlossen liegen, als die Ungewissheit der Tiefe der Sonne unter dem Horizont beim Ende der Dämmerung, da man aus den vorigen Angaben §. 100. sieht, dass die Beobachtungen um 4° von einander differiren. Bernoulli hat sich fünf Jahr mit der Auflösung dieser Aufgabe beschäftigt.

§. 106.

Man kann die Dauer der Dämmerung für jede Declination der Sonne auf folgende Art sehr leicht

näherungsweise bestimmen. Man setze in der Formel (§. 102.)

$$\cos\delta^2 \cos p^2 \sin \tfrac{1}{2}(s''-s')^2 \cos \tfrac{1}{2}(s''-s')^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\cos z''^2 \cos \tfrac{1}{2}(s''-s')^2$$
$$+ \sin \tfrac{1}{2}(s''-s')^2 \left[\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta \sin p\right]^2.$$

da $\frac{1}{2}(s''-s')$ ziemlich klein ist, statt des Sinus den Bogen selbst, indem man die Potenzen welche das Quadrat übersteigen weglässt. Setzt man dann

$\frac{1}{2}(s''-s') = y$, so wird

$$yy\left(\cos\delta^2 \cos p^2 + \tfrac{1}{4}\cos z''^2 - (\tfrac{1}{2}\cos z'' - \sin\delta \sin p)^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\cos z''^2.$$

Der Factor von yy lässt sich auch so schreiben:

$$\cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + \cos z'' \sin\delta \sin p.$$

folglich wird

$$2y = \frac{-\cos z''}{\sqrt{\cos(p-\delta)\cos(p+\delta) + \cos z'' \sin\delta.\sin p}}.$$

Will man die Dauer in Zeitminuten haben, so muss man noch den hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Bruch mit $\frac{206265}{15.60}$ multipliciren, so dass also der constante Factor

$$= -\frac{206265}{900}\cos z''$$

wird. Dies beträgt 70′82, wovon der Logarithme $= 1.85016$ ist.

Setzt man z. B. $p = 51^\circ\ 32'$, $\delta = -7^\circ\ 7'\ 30''$, so erhält man $2y = 113$ Minuten welches nur vier Minuten von der genauern Berechnung §. 104. abweicht.

§. 107.

Wenn die Sonne zu Mitternacht nicht mehr die Tiefe von 18° unter dem Horizont erreicht, so findet die immerwährende Dämmerung statt, indem man dann selbst um zwölf Uhr des Nachts einen hellen Bogen am nördlichen Horizont erblickt.

Bezeichnet man wie gewöhnlich die Breite des Ortes durch p, die Declination der Sonne durch δ, so wird zu dieser Erscheinung erfordert, dass $90^\circ - \delta - p$ nicht grösser als 18°, also zeigt sich die-

Diese Declination hat die Sonne am 2. März und am 11. October.

$$tang\,\delta = 9.09691\,n$$
$$-\,tang\,p = 0.09991\,n$$
$$cos\,s' = 9.19682$$
$$s' = 80°\ 56'\ 50''$$

$$sin\,\delta = 9.09346\,n \qquad cos\,\delta = 9.99663.$$
$$sin\,p = 9.89375 \qquad cos\,p = 9.79383$$
$$8.98721\,n. \qquad 9.79046$$
$$-\,0{,}09710$$
$$cos\,108° = -\,0{,}30902$$
$$-\,0{,}21192$$
$$9.32617\,n.$$
$$9.79046.$$
$$cos\,s'' = 9.53571\,n, \qquad s'' = 110°.\ 4'.\ 50''.$$

folglich $s'' - s' = 29°\ 8'$, oder in Zeit 1 St. 57′, welches für die angegebene Polhöhe die kleinste Dauer der Dämmerung ist.

§. 105.

Bei dieser Auflösung der Aufgabe über die kleinste Dauer der Dämmerung haben wir die Refraction, so wie die Aenderung der Declination der Sonne, während sie sich vom Horizont bis zu 18° Tiefe bewegt, ganz vernachlässigt. Man kann diese kleinen Grössen aber um so eher vernachlässigen, da dieselben in bei weitem engern Gränzen eingeschlossen liegen, als die Ungewissheit der Tiefe der Sonne unter dem Horizont beim Ende der Dämmerung, da man aus den vorigen Angaben §. 100. sieht, dass die Beobachtungen um 4° von einander differiren. Bernoulli hat sich fünf Jahr mit der Auflösung dieser Aufgabe beschäftigt.

§. 106.

Man kann die Dauer der Dämmerung für jede Declination der Sonne auf folgende Art sehr leicht

Erde eine Kugel, oder wenigstens ein Körper ist, der nur gering von der Kugel abweicht, so ist es nicht möglich, die Lage der Oerter und die Umrisse der Länder in einer Ebene so darzustellen, dass alle Entfernungen auf der Oberfläche der Erde und der Charte einander genau proportionirt bleiben, und man muss sich darauf beschränken, nur im Allgemeinen eine Aehnlichkeit zwischen der wirklichen Lage der Oerter und ihrer Darstellung in einer Ebene zu erhalten. Man kann diese Darstellung auf verschiedene Weise zu Wege bringen, und wir wollen zuerst die einfachen perspectivischen Projectionen vornehmen, dann aber diesen Gegenstand aus einem höhern und allgemeinern Gesichtspunkte betrachten.

§. 109.

Das Princip, auf welchem die sogenannten perspectivischen Projectionsarten beruhen, besteht in folgendem: Zuerst denke man sich aus dem Mittelpunkte der Erde mit irgend einem Halbmesser, der der Grösse der zu entwerfenden Charte angemessen ist eine Kugel beschrieben, so wird diese der wirklichen Erdoberfläche, da wir dieselbe hierbei als eine wirkliche Kugel betrachten können, concentrisch seyn. Zieht man dann nach jedem darzustellenden Punkte der Oberfläche der Erde einen Halbmesser, so schneidet dieser die zweite Kugel ebenfalls in einem gewissen Punkte, der die Projection des erstern seyn wird. Auf dieser zweiten Kugel, welche der künstliche Erdglobus genannt wird, muss dann eine vollkommene Proportionalität der Entfernungen zweier projicirten Oerter, und der wirklichen Entfernung statt finden, und zwar ist das Verhältniss, das der Halbmesser der künstlichen und natürlichen Kugel. Nachdem auf diese Art die Oberfläche der Erde schon einmal abgebildet ist, nehme man im Raume einen beliebigen Punkt, den Augenpunkt an, welcher auch auf der Oberfläche der Erde oder in ihrem Innern liegen kann, nebst einer Ebene auf welche die Projection geschehen soll, und ziehe durch den Augenpunkt und die zu projicirenden Punkte der Kugel gerade Linien, welche Gesichtslinien ge-

mnt werden. Diese Gesichtslinien treffen die angenommene Ebene in Punkten, welche die Projectionen r wirklichen Oerter sind, und die Darstellung der doberfläche in einer Ebene oder die geographischen erter ausmachen.

§. 110.

Es kommt nun blos auf die gehörige Lage des ugenpunktes und der Projectionsebene an, um die onstructionen so einfach als möglich zu machen. n Allgemeinen wendet man vorzüglich dreierlei Arn von Lagen an, welche die orthographische, ereographische und centrale Projectionsart smachen. Bei der orthographischen Projectionsart ndet man die Projectionen der Oerter auf der Kul, indem man von denselben auf die Ebene Perpenkel herabfällt, so dass diese Methode mit der geöhnlichen geometrischen Projectionsart übereinimmt. Man sieht leicht, dass rücksichtlich der Lage s Augenpunktes, diese Projectionsart eine unendche Entfernung desselben von der Kugel voraussetzt, a alle Gesichtslinien einander parallel werden. Die ereographische Projectionsart setzt voraus, dass der ugenpunkt sich in der Oberfläche der Kugel befint, und dass die Projectionsebene durch den Mittelnkt der Erde geht. Nimmt man den Augenpunkt n Mittelpunkte der Erde an, und legt die Projeconsebene als Berührungsebene an die Kugel, so erlt man die Centralprojection. Letztere wird vorglich bei Abbildung kleiner Theile der Erdoberiche gebraucht. Die stereographische und orthograische Projection kann entweder Polar oder Aequareal seyn, je nachdem das Auge in der Erdaxe oder rer Verlängerung, oder in der Ebene des Aequars liegt.

§. 111.

Aufgabe. Die orthographische Polarprojection der Erdkugel zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die Breite eines rtes durch p, die Länge desselben durch l, lege

durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht auf die Axe derselben die Projectionsebene, und fälle auf diese Ebene von dem angegebenen Orte einen Perpendikel; sein Fusspunkt giebt den projicirten Ort an. Um dessen Lage zu bestimmen, setze man seine beiden Coordinaten x und y die vom Mittelpunkte der Erde aus gezählt werden, so dass die Abscissenlinie oder die Axe der x, durch den Mittelpunkt der Erde, und die Projection eines im ersten Meridiane liegenden Punktes geht. Man hat dann, wenn man durch r den Halbmesser der Kugel bezeichnet

$$x = r \cos l \cos p$$
$$y = r \sin l \cos p.$$

Setzt man die Breite der Oerter constant, so liegen alle diese auf einem Parallelkreise, und man findet, indem aus beiden Gleichungen der Länge l eliminirt wird

$$xx + yy = rr \cos p^2,$$

folglich sind die Projectionen der Parallelkreise auch wieder Kreise, und der der Breite p correspondirende hat den Halbmesser $r \cos p$.

Eliminirt man den Winkel p, so wird

$$y = x \tang l.$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die mit der Abscissenlinie den Winkel l macht; es sind daher die Projectionen der Meridiane gerade Linien.

§. 112.

Aufgabe. Die orthographische Aequatorealprojection zu finden.

Auflösung. Man lege die Projectionsebene durch die Pole der Erdkugel so, dass sie dieselbe in demjenigen Meridian schneidet, den man für den ersten angenommen hat. Die Erdaxe nehme man als Abscissenlinie an, und darauf senkrecht durch den Mittelpunkt der Erde die Axe der y; man hat dann

$$x = r \sin p$$
$$y = r \cos p. \cos l.$$

Aus der Gleichung $x = r \sin p$ sieht man, dass die Projection der Parallelkreise eine gerade Linie wird, die von der den Aequator vorstellenden geraden Linie den Abstand $r \sin p$ hat.

Wenn man aus den beiden Gleichungen die rösse p eliminirt, so erhält man eine Gleichung für ie Projection der Meridiane

$$yy + xx \cos l^2 = rr \cos l^2,$$

lglich sind die Projectionen der Meridiane Ellipsen, eren halbe grosse Axe $= r$, und halbe kleine Axe $= r \cos l$ ist.

§. 113.

Aufgabe. Die stereographische Polarrojection zu finden.

Auflösung. Man lege die Projectionsebene so ie bei der orthographischen Polarprojection durch en Mittelpunkt der Erde senkrecht auf ihre Axe, so ass sie die Aequatorsebene bildet, setze den Augenunkt in einen der Pole, z. B. den Südpol, und lege ie Abscissenlinie so, dass dieselbe durch den Mittelunkt der Erde und die Projection eines im ersten leridian liegenden Punktes geht. Zieht man nach rgend einem Punkte der Oberfläche der Erde dessen reite $= p$ ist, eine Gesichtslinie, so macht diese mit ler Erdaxe einen Winkel der dem halben Complenent der geographischen Breite gleich ist, also $= 45 - \frac{1}{2} p$; da nun die Entfernung des Auges von der rojectionsebene dem Halbmesser der Kugel gleich st, welche wir durch r bezeichnen, so wird die Enternung des Durchschnittspunktes der Gesichtslinie nit der Projectionsebene vom Mittelpunkte, oder dem nfangspunkte der Coordinaten durch

$$r. \tang (45 - \tfrac{1}{2} p)$$

usgedrückt werden, folglich sind die Projectionen ler Parallelkreise selbst Kreise. Will man die Proection für südliche geographische Breite haben, so at man in der vorigen Formel nur statt $+ p$, $- p$ zu setzen. Legt man ferner durch einen Meridian ınd den Mittelpunkt der Erde eine Ebene, so fallen ılle nach den auf diesem Meridian liegenden Oertern ezogene Gesichtslinien in diese Ebene, und da der Durchschnitt dieser Ebene mit der Projectionsebene ine gerade Linie ist, so folgt, dass die Projection edes Meridians eine gerade Linie seyn wird, die

mit der Abscissenlinie einen Winkel macht, der der Länge des Meridians gleich ist.

§. 114.

Aufgabe. Die stereographische Aequatorealprojection zu finden.

Auflösung. Die Projectionsebene werde durch die Erdaxe und den ersten Meridian gelegt, und das Auge erhalte seine Stellung in dem Aequator der Erde in einer Länge von 90° oder von 270°, je nachdem man den Theil der Erde von 180 bis 360° oder von 0° bis 180° projiciren will. Man ziehe in der Projectionsebene senkrecht auf die Erdaxe, die Axe der y, und lasse die Axe der x mit der Erdaxe zusammenfallen. Es sey nun (Fig. 5.) O das Auge, C der Mittelpunkt der Erde, xCy die Projectionsebene, in x der Nordpol, L ein Ort auf der Oberfläche der Erde, dessen geographische Breite $LD = p$, und Länge $yD = l$ ist; in F schneide die vom Auge O nach den Ort L gezogene Gesichtslinie OL die Projectionsebene, so dass F die Darstellung des Punktes L in der Charte ist. Nun hat man den Winkel $LOC = \frac{1}{2}\, LCE$, und da

$$\cos LE = \cos LD \cos DE$$
$$= \cos p.\ \sin l$$

ferner $LCE = LE$, so wird auch

$$\cos 2LOC = \cos p.\ \sin l.$$

Aus der Trigonometrie weiss man aber, dass

$$\tang LOC = \sqrt{\frac{1 - \cos 2LOC}{1 + \cos 2LOC}}.$$

und da im Dreieck FOC

$$CF = CO.\ \tang FOC = r.\ \tang LOC.$$

so wird auch

$$CF = r\sqrt{\frac{1 - \cos p.\ \sin l}{1 + \cos p.\ \sin l}}.$$

Ferner hat man

$$FG = x = CF.\ \cos FCx.$$
$$GC = y = CF.\ \sin FCx.$$

und da der ebene Winkel FCx durch den sphärischen LEx gemessen wird, so ist ebenfalls

$$x = CF.\ \cos LEx$$
$$y = CF.\ \sin LEx.$$

Man hat im sphärischen Dreieck LDE

$$\sin DE = \tang LD . \cot LED \quad \text{oder}$$

$$\cos l = \tang p . \tang LEx$$

folglich hieraus

$$\cos LEx = \frac{\sin p.}{\sqrt{1 - \cos p^2 \sin l^2}}$$

$$\sin LEx = \frac{\cos p \cos l}{\sqrt{1 - \cos p^2 \sin l^2}}.$$

Es ergiebt sich also nach den gehörigen Substitutionen und Zusammenziehungen

$$x = \frac{r \sin p.}{1 + \cos p \sin l}$$

$$y = \frac{r \cos p \cos l}{1 + \cos p. \sin l}.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen die Natur der Projectionen der Parallelkreise und der Meridiane zu bestimmen, muss man zuerst l und hierauf p eliminiren. Man dividire beide Gleichungen durch einander, so kommt

$$\cos l = \frac{y \tang p}{x} \quad \text{und hieraus}$$

$$\sin l = \frac{\sqrt{xx \cos p^2 - yy \sin p^2}}{x \cos p}.$$

Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man

$$1 = \frac{r \sin p.}{x + \sqrt{xx \cos p^2 - yy \sin p^2}} \quad \text{also}$$

$$xx \cos p^2 - yy \sin p^2 = (r \sin p - x)^2.$$

Entwickelt man das hintere Quadrat und dividirt dann die ganze Gleichung durch $\sin p^2$, so wird

$$xx + yy = 2x \frac{r}{\sin p} - rr.$$

also wird die Projection des Parallelkreises ein Kreis, da die Coefficienten von xx und yy einerlei sind. Sein Mittelpunkt liegt auf der Axe der x, d. h. auf der Projection der Erdaxe, weil jedem Werthe von x zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y

zugehören. Um den Halbmesser des Kreises und die Lage seines Mittelpunktes zu bestimmen, setze man $y = 0$, so erhält man für x zwei Werthe

$$\frac{r\,(1 + \cos p)}{\sin p}, \quad \frac{r\,(1 - \cos p)}{\sin p}.$$

Ihre halbe Summe giebt den Abstand des Mittelpunktes des Parallelkreises vom Mittelpunkte der Erde $= \frac{r}{\sin p}$, und ihre halbe Differenz $r \cot p$ giebt den Halbmesser des Kreises.

Die Gleichung $\cos l = \frac{y \tang p}{x}$ giebt auch

$$\cos p = \frac{y}{\sqrt{xx \cos l^2 + yy}}$$

folglich wenn dieser Werth in die Formel

$$y = \frac{r \cos p \cos l.}{1 + \cos p \sin l.}$$

gesetzt wird, so erhält man

$$\sqrt{xx \cos l^2 + yy} + y \sin l. = r \cos l. \quad \text{oder}$$
$$xx + yy = rr - 2yr \tang l.$$

Die Projectionen der Meridiane sind also ebenfalls Kreise, deren Mittelpunkte auf der Axe der y liegen, und man erhält durch dasselbe Verfahren als bei den Parallelkreisen angewendet wurde, indem man nur hier $x = 0$ annimmt, die Entfernungen des Mittelpunkts der Projection vom Mittelpunkte der Erde $= - r \tang l.$
und den Halbmesser $= r \sec l.$

Das negative Vorzeichen beim Abstande deutet an, dass der Mittelpunkt auf der Seite genommen werden muss, welche links von Cx liegt, wenn L sich rechts davon befindet, und umgekehrt.

§. 115.

Aufgabe. Die Centralprojection zu finden.

Auflösung. Man setze das Auge in den Mittelpunkt der Erde, und da man gewöhnlich nur kleinere Stücke der Erdoberfläche auf diese Weise darstellt, so lege man die Projectionsebene berührend an

nen Ort der Kugel, der ungefähr in der Mitte des projicirenden Stückes liegt. Die geographische eite dieses Ortes sey p', und den hindurchgehenden eridian kann man für den ersten nehmen. Ein jer Meridian liegt in einer Ebene die durch zwei inkte des Meridians und den Mittelpunkt der Erde ht, und da in diesem Punkte zugleich das Auge gt, so werden die Projectionen der Meridiane gera Linien bilden, welche sich auf der Projectionsene in demjenigen Punkte schneiden, der die Proction des Pols ausmacht. Wir wollen die Projecon des ersten Meridians, der durch den Berührungspunkt geht, als die Abscissenlinie betrachten, id den Anfang der Coordinaten in den Berührungsinkt vorlegen. Nehmen wir nun einen andern rt auf der Oberfläche der Kugel an, dessen geograische Breite p und Länge l ist, und bezeichnen den Vinkel, den die nach diesem Ort aus dem Mittelinkte der Erde mit der nach dem Berührungspunkte zogenen Linie macht, durch φ, und den Winkel elchen der durch diese beiden Oerter gelegte gröss Kreis mit den ersten Meridian macht, durch μ, sieht man leicht, dass

$$x = r \tan\varphi \cos\mu, \qquad y = r \tan\varphi \sin\mu$$

yn muss. Es ist aber auch

$$\cos\varphi = \sin p \sin p' + \cos p \cos p' \cos l.$$

$$\sin\mu = \frac{\cos p \sin l}{\sin\varphi}.$$

Hieraus folgt,

$$\sin l = \frac{\sin\mu.\ \sin\varphi.}{\cos p.}, \quad \cos l = \frac{\cos\varphi - \sin p.\ \sin p'}{\cos p \cos p'}.$$

Quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie isammen, so wird

$$\cos p^2 \cos p'^2 = \cos\varphi^2 - 2\cos\varphi \sin p \sin p'$$
$$+ \sin p^2 \sin p'^2 + \sin\mu^2 \sin\varphi^2 \cos p'^2.$$

att $\cos p^2 \cos p'^2$ setze man

$$1 - \sin p^2 - \sin p'^2 + \sin p^2 \sin p'^2.$$

wird

$$1 - \sin p^2 - \sin p'^2 = \cos\varphi^2 - 2\cos\varphi \sin p \sin p'.$$
$$+ \sin\mu^2 \sin\varphi^2 \cos p'^2,$$ oder auch

$$\sin p^2 - 2\cos\varphi \sin p \sin p' = 1 - \cos\varphi^2 - \sin p'^2$$
$$- \sin\mu^2 \sin\varphi^2 \cos p'^2.$$

Addirt man auf beiden Seiten $\cos\varphi^2 \sin p'^2$, so kann man die Gleichung auch so schreiben

$$\sin p^2 - 2\cos\varphi \sin p \sin p' + \cos\varphi^2 \sin p'^2$$
$$= \sin\varphi^2 - \sin p'^2 + \cos\varphi^2 \sin p'^2 - \sin\varphi^2 \cos p'^2$$
$$+ \cos\mu^2 \sin\varphi^2 \cos p'^2.$$

Es ist aber

$$\sin\varphi^2 - \sin p'^2 + \cos\varphi^2 \sin p'^2 - \sin\varphi^2 \cos p'^2 = 0$$

also $\sin p = \cos\varphi \sin p' + \sin\varphi \cos p' \cos\mu$.

Aus den beiden Gleichungen

$$x = r \tang\varphi \cos\mu, \quad y = r \tang\varphi \sin\mu.$$

erhält man

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{rr}{rr + xx + yy}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{xx + yy}{rr + xx + yy}}$$

$\cos\mu = \dfrac{x}{\sqrt{xx + yy}}$ folglich wenn diese Werthe in vorige Formel substituirt werden, so kommt

$$\sin p \sqrt{rr + xx + yy} = r \sin p' + \cos p'. x \quad \text{oder}$$
$$\sin p^2\, yy = xx(\cos p'^2 - \sin p^2) + rr(\sin p'^2 - \sin p^2)$$
$$+ 2rx \sin p' \cos p'.$$

Dies ist die Gleichung der Projection eines Parallelkreises, und man sieht daraus, dass dieselbe im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist. Um die Natur derselben etwas genauer zu untersuchen, wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in denjenigen Punkt verlegen, in welchem die krumme Linie die Abscissenlinie trifft.

Man bezeichne diesen Werth von x durch ξ, so hat man zur Bestimmung dieser Grösse, weil $y = 0$ wird $0 = \xi\xi(\cos p'^2 - \sin p^2) + rr(\sin p'^2 - \sin p^2)$
$$+ 2r\xi \sin p' \cos p'.$$

Zieht man diese Gleichung von der obern ab, und setzt $x - \xi = t$, so wird

$$yy \sin p^2 = (t + 2\xi)\, t\, (\cos p'^2 - \sin p^2)$$
$$+ 2tr \sin p' \cos p'.$$

Die Gleichung für ξ giebt

$$\xi(\cos p'^2 - \sin p^2) + r \sin p' \cos p' = \pm r \sin p \cos p.$$

also $\xi = -\dfrac{r}{2} \cdot \dfrac{\sin 2p' \pm \sin 2p}{\cos p'^2 - \sin p^2}.$

Hieraus ergiebt sich, je nachdem man das obere ler das untere Zeichen nimmt und reducirt

$$\xi = -r\, tang(p' + p)$$
$$\xi = +r\, tang(p - p')$$

ıd wir müssen den zweiten als den kleinen Werth ›hmen, der eine positive Grösse für ξ angiebt. Ver-ittelst dieses Werthes von ξ kommt

$$yy \sin p^2 = 2tr\,[\sin p' \cos p' + \sin(p - p') \cos(p + p')] + tt \cos(p + p') \cos(p - p')$$

ıd man weiss, dass die Natur des Kegelschnitts von ›n Coefficienten von tt abhängt.

Ist $p + p' > 90°$, so wird der Coefficient ne-ıtiv, also die Projection eine Ellipse; ist $p + p'$ $< 90°$, so wird sie eine Hyperbel, wenn $p + p' = 90°$ wird sie eine Parabel. Ein Kreis entsteht, wenn

$$\cos(p + p') \cos(p - p') = - \sin p^2$$

so $\cos p' = 0$, d. h. $p' = 90°$ ist. In diesem Falle ird die Projectionsebene den Pol berühren.

§. 116.

Eine der merkwürdigsten Linien auf der Ober-äche der Erde ist die in der Schifffarth nothwendige ›xodromische Linie (λοξος schief und δρομος der auf). Diese Curve ist von der Beschaffenheit, dass e die Meridiane unter einem und demselben Win-el durchschneidet; sie gehört also zu den in der ıalytischen Geometrie bekannten Trajectorien. Ge-›hieht der Durchschnitt des Laufs des Schiffs mit em Meridian unter einem rechten Winkel, so ist ie loxodromische Linie ein Parallelkreis oder der equator selbst, in jedem andern Falle aber wird iese Linie kein Kreis seyn können. Wir wollen un die Beschaffenheit dieser Linie genauer unter-ıchen.

§. 117.

Hat man die Gleichungen zweier geraden Linien n Raume

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ z = a'x + b' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = Ax + B \\ z = A'x + B' \end{array}\right\},$$

und bezeichnet den Winkel welchen beide Linien mit einander bilden durch ε, so ist

$$\cos\varepsilon = \frac{1 + Aa + A'a'}{P.\,Q.}$$

wo der Kürze wegen

$$1 + aa + a'a' = PP$$
$$1 + AA + A'A' = QQ$$

gesetzt worden ist.

Sind nun die erwähnten zwei Linien berührende an zwei krummen Linien im Raume, so wird, wenn die Coordinaten der ersten durch x', y', z', die der zweiten durch x'', y'', z'' bezeichnet werden,

$$a = \frac{dy'}{dx'},\quad a' = \frac{dz'}{dx'}$$
$$A = \frac{dy''}{dx''},\quad A' = \frac{dz''}{dx''}$$

folglich wenn man das Element der ersten durch ds', das der zweiten durch ds'' andeutet

$$\cos\varepsilon.\ ds'.\ ds'' = dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz''.$$

Nun sey die erste Curve der Meridian, die zweite die loxodromische Linie, und man beziehe die Coordinaten derselben auf drei rechtwinklichte Axen, die sich im Mittelpunkte der Erde schneiden, so dass die Axe der z die Erdaxe, die Axe der x in der Ebene des Aequators nach den Punkt, dessen Länge Null, gezogen ist. Da der Meridian entsteht indem man die Kugel vermittelst einer Ebene schneidet, die durch die Erdaxe geht, so sind die beiden Gleichungen desselben

$$x'x' + y'y' + z'z' = rr,\quad y' = \alpha x'$$

wo r den Halbmesser der Erde, und α eine Constante bedeutet die durch die Lage des Meridians bestimmt wird. Man erhält hieraus

$$dy' = \alpha dx'$$
$$dz' = -dx'\left(\frac{\alpha y'}{z'} + \frac{x'}{z'}\right)$$
$$= -dx'\,(1 + \alpha\alpha)\,\frac{x'}{z'}.$$
$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

$$= dx' \sqrt{1 + \alpha\alpha}. \frac{\sqrt{z'^2 + x'^2 (1 + \alpha\alpha)}}{z'}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung $\cos \varepsilon\, ds'. ds'' = dx'\, dx'' + dy'\, dy'' + dz'\, dz''$, kommt, indem die ganze Gleichung durch dz' dividirt und durch z' multiplicirt wird

$$\cos \varepsilon.\, ds'' \sqrt{1 + \alpha\alpha}. \sqrt{z'^2 + x'^2 (1 + \alpha\alpha)}$$
$$= z'\, dx'' + \alpha z'\, dy'' - (1 + \alpha\alpha)\, x'\, dz''.$$

Da nun aber die Bedingung des Durchschnitts iter gleichem Winkel, für alle Meridiane gelten soll, muss man α vermittelst der Gleichung $y' = \alpha x'$ iminiren. Nach dieser Elimination darf man, weil den Durchschnittspunkten die Coordinaten an bein Curven dieselben sind, statt x', y', z', die andern , y'', z setzen, und um die Accente zu vermeiden, ollen wir die Coordinaten der loxodromischen Cur- blos durch x, y, z bezeichnen. Man erhält daurch ihre Differentialgleichung

$$\cos \varepsilon.\, ds \sqrt{yy + xx}. \sqrt{xx + yy + zz}$$
$$= z(xdx + ydy) - (xy + yy)\, dz.$$

Die loxodromische Curve liegt auf der Kugel, also lt für dieselbe auch die Gleichung

$$xx + yy + zz = rr.$$

ierdurch verwandelt sich vorige Formel in

$$\cos \varepsilon.\, ds \sqrt{rr - zz} = rdz.$$

Setzt man nun

$$x = r \cos p. \cos l$$
$$y = r \cos p. \sin l.$$
$$z = r \sin p.$$

odurch der Gleichung der Kugel Genüge geleistet ird, und substituirt die daraus entspringenden Were in vorige Formel, so wird

$$\cos \varepsilon \sqrt{(dl^2 \cos p^2 + dp^2)} = dp.$$

ler wenn man aus dieser dl sucht

$$dl = \operatorname{tang} \varepsilon. \frac{dp}{\cos p}.$$

Hiervon ist das Integrat

$$l = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \varepsilon \log \frac{1 + \sin p}{1 - \sin p} + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, sey für den Ort der Abfarth des Schiffes

$$l = l', \; p = p', \text{ folglich auch}$$

$$l' = \tfrac{1}{2} \, tang \, \varepsilon. \, log \frac{1 + sin \, p'}{1 - sin \, p'} + \text{Const.}$$

und wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht

$$l - l' = \tfrac{1}{2} \, tang \, \varepsilon. \, log \frac{(1 + sin \, p)\,(1 - sin \, p')}{(1 - sin \, p)\,(1 + sin \, p')}$$

$$= tang \, \varepsilon. \, log \frac{tang\,(45 + \frac{1}{2} p)}{tang\,(45 + \frac{1}{2} p')}.$$

Für den Ort der Ankunft des Schiffes sey $p = p''$, $l = l''$, so hat man

$$l'' - l' = tang \, \varepsilon. \, log \frac{tang\,(45 + \frac{1}{2} p'')}{tang\,(45 + \frac{1}{2} p')}$$

aus welcher Gleichung der Winkel ε bestimmt wird.

§. 118.

Man sieht übrigens aus der Gleichung

$$cos \, \varepsilon. \, ds \sqrt{rr - zz} = rdz$$

dass die loxodromische Linie rectificabel ist. Setzt man statt z seinen Werth $r. \, sin \, p$, so erhält man

$$ds = \frac{rdp}{cos \, \varepsilon}$$

und wenn man zwischen den Gränzen $p = p'$ bis $p = p''$ integrirt, so erhält man die ganze Länge des zurückgelegten Weges

$$s = r. \, (p'' - p'). \, sec \, \varepsilon.$$

§. 119.

Wenn der Unterschied der Polhöhen der Oerter sehr klein oder wohl gar Null ist, so lässt sich die Formel für den zurückgelegten Weg nicht in der Gestalt

$$s = r. \, sec \, \varepsilon \, (p'' - p')$$

anwenden, weil dann $p'' - p'$ nahe Null und $sec \, \varepsilon$ beinahe unendlich ist. Man hat aber in diesem Fall

$$\frac{tang(45 + \frac{1}{2} p'')}{tang(45 + \frac{1}{2} p')} = \frac{tang(45 + \frac{1}{2} p' + \frac{1}{2} (p'' - p'))}{tang(45 + \frac{1}{2} p')}$$

$$= 1 + \frac{p'' - p'}{cos\, p'} \text{ also}$$

$$log \frac{tang(45 + \frac{1}{2} p'')}{tang(45 + \frac{1}{2} p')} = \frac{p'' - p'}{cos\, p'}$$

man wegen der vorausgesetzten Kleinheit von $p'' - p'$, alle höhern Potenzen vernachlässigen kann; ergiebt sich daher

$$l'' - l' = tang\, \varepsilon \frac{p'' - p'}{cos\, p'},$$

$$sec\, \varepsilon = \frac{\sqrt{cos\, p'^2 (l'' - l)^2 + (p'' - p)}}{p'' - p'}$$

$$= \frac{cos\, p' (l'' - l')}{p'' - p'}; \text{ folglich}$$

$$s = r\, cos\, p' (l'' - l').$$

§. 120.

Dass in dem Falle, wenn die beiden Endpunkte er loxodromischen Linie unter gleicher Polhöhe liegen, alle Punkte derselben in einem Parallelkreise ch befinden, lässt sich leicht folgendermassen darun. Aus der Gleichung

$$l'' - l' = tang\, \varepsilon\, log \frac{tang(45 + \frac{1}{2} p'')}{tang(45 + \frac{1}{2} p')}$$

lgt für $p'' = p'$, $tang\, \varepsilon = \infty$.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$l - l' = tang\, \varepsilon\, log \frac{tang(45 + \frac{1}{2} p)}{tang(45 + \frac{1}{2} p')}$$

ergiebt sich

$$log \frac{tang(45 + \frac{1}{2} p)}{tang(45 + \frac{1}{2} p')} = 0 \text{ und hieraus}$$

$$tang(45 + \tfrac{1}{2} p) = tang(45 + \tfrac{1}{2} p'); \quad p = p'.$$

§. 121.

Es segelt ein Schiff von Lissabon nach Rio Janeiro, man fragt unter welchem Winkel sein Lauf

die Meridiane durchschneidet, und wie gross die Länge des Weges sey. Man hat hier

$$l' = 11^\circ\ 28'\ 45''\ \text{östl. von Paris}$$
$$l'' = 45^\circ\ 5'\ 0''$$
$$p' = +38^\circ\ 42'\ 24''$$
$$p'' = -22^\circ\ 45'\ 10''.$$

Zuerst nehme man die Formel

$$tang\, \varepsilon = \frac{l'' - l'}{log\ tang(45 + \frac{1}{2} p'') - log\ tang(45 + \frac{1}{2} p')}$$

wobei man bemerken muss, dass die im Nenner stehenden Logarithmen natürliche sind. Man kann sich aber der briggschen bedienen, wenn man den Zähler $l'' - l'$ mit dem Modulus $m = 0{,}43429 \ldots$ multiplicirt; ferner muss $l'' - l'$ in Theilen des Halbmessers angegeben werden; daher verwandle man diese Grösse in Secunden, und dividire sie durch 206265. Man hat also

$$log\ tang\, \varepsilon = log(l'' - l') + log\, m - log\, 206265 - log\, \Delta.$$

wo Δ den Nenner des Bruches andeutet, und die daselbst zu nehmenden Logarithmen als briggsche behandelt werden. Nimmt man die beiden vorkommenden constanten Logarithmen zusammen, so ergiebt sich die Formel

$$log\ tang\, \varepsilon = log(l'' - l') + 4{.}32336 - (10 + log\, \Delta).$$

Im vorliegenden Falle hat man

$$l'' - l' = 33^\circ\ 36'\ 15'' = 120975''$$
$$45 + \tfrac{1}{2} p'' = 33^\circ\ 37'\ 25''$$
$$45 + \tfrac{1}{2} p' = 64^\circ\ 21'\ 12''$$
$$\Delta = -0{,}49584, \qquad \varepsilon = 152^\circ\ 48'\ 35''.$$

Um den Weg zu bestimmen hat man

$$s = \frac{r}{cos\, \varepsilon}(p'' - p').$$

Drückt man hierbei $p'' - p'$ auch in Secunden aus und setzt $r = 860$ Meilen, so ist die Formel

$$log\, s = log(p'' - p') + 7{.}62007 - 10 - log\ cos\, \varepsilon$$

anzuwenden.

Man hat im angegebenen Beispiel

$$p'' - p' = -61^\circ\ 27'\ 34'' = -221254''$$

also $\quad s = 1037$ Meilen.

§. 122.

Bei allen in den frühern Paragraphen angegebenen Projectionsarten der Erdoberfläche wird die loxodromische Linie eine Projection haben, deren Natur nur durch eine transscendente Gleichung ausgedrückt werden kann. Da es aber für die Schifffarth nothwendig ist, dass der Lauf des Schiffes schnell bestimmt und durch Zeichnung auf eine leichte Art in die Charten eingetragen werden könne, so musste man auf ein Mittel denken solche Charten zu verfertigen, bei denen die loxodromische Linie durch die einfachste Zeichnung nämlich durch eine gerade Linie dargestellt werden konnte. Man nennt diese Art von Darstellung Mercator's Projectionsmethode, und die Charten selbst, Seecharten oder reducirte Charten. Man sieht leicht, dass bei dieser Art von Darstellung der Erde zugleich alle Meridiane und Parallelkreise gerade Linien seyn werden, indem sie selbst zu den loxodromischen Curven gehören.

§. 123.

Die Differentialgleichung einer geraden Linie, die die Axe der y unter einem Winkel ε schneidet, ist bekanntlich $dy = cot\, \varepsilon .\, dx$.

Nun war die Differentialgleichung der loxodromischen Linie auf der Kugel

$$dl = tang\, \varepsilon . \frac{dp}{cos\, p}.$$

und man wird im Allgemeinen die Grössen l und p als Functionen der Coordinaten x und y in der Ebene darstellen können. Wir wollen die Abscissenlinie als die Darstellung des Aequators annehmen, und den Anfang der Coordinaten in dem Punkte festlegen, in welchem die Darstellung des ersten Meridians die des Aequators schneidet. Wir setzen ferner

$$dl = \alpha dx + \beta dy$$

$$\frac{dp}{cos\, p} = \alpha' dx + \beta' dy.$$

wo α, β, α', β' im Allgemeinen Functionen von x und

y seyn können, die nur so beschaffen seyn müssen, dass die Grössen $\alpha dx + \beta dy$, $\alpha' dx + \beta' dy$ vollkommene Differentiale sind. Setzt man diese angenommenen Werthe in die Differentialgleichung der loxodromischen Curve, so erhält man

$$\alpha dx + \beta dy = tang\,\varepsilon\,(\alpha' dx + \beta' dy). \text{ oder}$$

$$dy = \frac{\alpha'\,tang\,\varepsilon - \alpha}{\beta - \beta'\,tang\,\varepsilon}\,dx,$$

welches die Differentialgleichung der Darstellung der loxodromischen Linie in einer Ebene ist.

Soll diese Gleichung für eine gerade Linie gelten, die durch $dy = dx.\,cot\,\varepsilon$ ausgedrückt wird, so muss

$$\frac{\beta - \beta'\,tang\,\varepsilon}{\alpha'\,tang\,\varepsilon - \alpha} = tang\,\varepsilon$$

seyn, oder wenn man den Bruch auflösst

$$\beta - \beta'\,tang\,\varepsilon = \alpha'\,tang\,\varepsilon^2 - \alpha\,tang\,\varepsilon.$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von $tang\,\varepsilon$ richtig seyn soll, so muss

$$\beta = 0,\ \alpha' = 0,\ \alpha = \beta'$$

seyn. Hierdurch gehen die beiden Formeln

$$dl = \alpha dx + \beta dy,\quad \frac{dp}{cos\,p} = \alpha' dx + \beta' dy,$$

in diese über

$$dl = \alpha dx,\quad \frac{dp}{cos\,p} = \alpha dy.$$

Aus der Bedingung der Integrabilität dieser beiden Gleichungen ergiebt sich sogleich, dass α eine constante Grösse seyn muss; man hat also

$$l = \alpha x,\quad log\,tang(45 + \tfrac{1}{2}p) = \alpha y.$$

Die hinzuzufügenden Constanten kann man weglassen, da wir voraussetzten, dass für $l = 0$, $x = 0$, und für $p = 0$, $y = 0$ seyn sollte. Man sieht, dass die Längengrade alle einander gleich werden, die Breitengrade aber ungleich, und die Darstellung selbst kann sich nie bis zum Pol erstrecken, da für $p = 90°$, $log\,\infty = \infty$, also auch y unendlich wird.

§. 124.

Die Darstellung der Oberfläche der Erde in einer Ebene, lässt sich aber unter einer allgemeinern Ansicht

ffassen, als die der perspectivischen Projectionen
., zu welchen schon die zuletzt angegebene Projec-
nsmethode des Mercator nicht mehr gehört, da
an keine Stelle für das Auge angeben kann, aus
elcher die Parallelkreise und Meridiane zugleich
s gerade Linien erscheinen.

Die ersten allgemeinern Untersuchungen haben
gestellt, Lambert in seinen Beiträgen zum
ebrauch der Mathematik, Euler in den
etersburger Commentarien für das Jahr 1777,
agrange in den Berliner Memoiren für das
hr 1779, und aus dem allgemeinsten Gesichtspunkte
aufs in einer von der königlichen Gesellschaft der
Vissenschaften zu Copenhagen gekrönten Preisschrift,
e in den von Schumacher herausgegebenen
stronomischen Abhandlungen sich befindet.

§. 125.

Da eine geographische Charte nichts anders ist,
s eine regelmässige Darstellung der Erdoberfläche,
o könnte man die Verzeichnung der Meridiane und
arallelkreise in der Ebene nach irgend einem durch
ne analytische Formel ausdrückbaren Gesetz bestim-
en, und hierdurch die Lagen der verschiedenen
erter in der Charte eintragen, so dass, wenn x und
die Coordinaten eines Punktes in der Ebene sind,
er einem Punkte auf der Erdoberfläche entspricht,
essen Länge $= l$, und Breite $= p$ ist, im Allgemeinen

$$x = \varphi(p, l), \quad y = \psi(p, l)$$

o φ und ψ zwei ganz willkührliche Functionen an-
zeigen, gesetzt werden kann. Wollte man aber in
ir Auswahl der Formen dieser Functionen ganz will-
ihrlich verfahren, so könnte die grösste Deformität
ntstehen, so dass die gegenseitige Lage der Oerter
n der Darstellung, von der wahren auf der Ober-
äche der Erde so abweichend wäre, dass man nicht
n Stande seyn würde, die Umrisse der Länder wie-
er zu erkennen.

§. 126.

Man muss daher zur gehörigen Bestimmung der
ormen dieser Functionen noch ein Princip zum

Grunde legen, welches dahin abzweckt, die Gestalt der Länder auf der Charte der auf der Erde so ähnlich zu machen als möglich. Eine vollständige Aehnlichkeit würde wie schon §. 108. erwähnt ist in dem Falle statt finden, wenn die Erde eine abwickelungsfähige Fläche wäre; da sie aber eine solche nicht ist, so muss man wenigstens so viel zu bezwecken suchen, dass unendlich kleine Stücke der Erdoberfläche, denen auf der Charte ähnlich werden, so dass der Grundsatz einer Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen als Leitfaden bei der Verfertigung von Darstellungen der Erdoberfläche angenommen werden kann. Auch nach dieser Einschränkung wird die Aufgabe noch unbestimmt bleiben, da man nur die Form der Function bestimmt erhält, aber nicht ihre Beschaffenheit selbst; allein wie man dieselbe dann auch annehmen mag, so wird man doch nie eine missgestaltete Abbildung der Erdoberfläche erhalten.

§. 127.

Wir wollen uns nun mit der Untersuchung über die aus diesem Grundsatze abzuleitende Form der Functionen beschäftigen. Zu diesem Endzweck denken wir uns auf der Erdoberfläche drei einander unendlich nahe liegende Punkte, so bilden diese auf der Oberfläche der Erde ein unendlich kleines geradliniges Dreieck; diesen Punkten werden drei andere in der Darstellung in der Ebene entsprechen, die ebenfalls einander unendlich nahe liegen und ein geradlinigtes Dreieck ausmachen; beide Dreiecke können als die Flächenelemente der respectiven Oberfläche angesehen werden. Sollen nun diese Dreiecke einander ähnlich seyn, so müssen die Winkel in denselben einander gleich, folglich die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten einander proportional werden. Bezeichnet man also ein Linearelement der Oberfläche der Erde durch ds, und auf der Charte durch $d\sigma$, so wird

$$ds : d\sigma = 1 : m.$$

seyn müssen, folglich

$$d\sigma = mds.$$

und wenn m eine constante Grösse seyn könnte, so

würde die Aehnlichkeit vollkommen seyn. Man kann m das **Vergrösserungsverhältniss** nennen.

§. 128.

Indem man die Erde als einen Körper ansieht, der durch Umdrehung einer ebenen Figur um eine Axe entstanden ist, wird der Meridian durch die erzeugende Curve dargestellt werden, und die Parallelkreise unter rechten Winkeln durchschneiden. Dies lässt sich leicht auf folgende Art beweisen. Wir beziehen die Oberfläche des Revolutionskörpers auf drei rechtwinklichte Axen, wovon wir die Axe der z mit der Drehungsaxe zusammenfallen lassen, und die Axen der x und y durch irgend einen ihrer Punkte senkrecht auf dieselbe ziehen. Sind nun die Coordinaten eines Punktes x, y, z, so wird der Abstand desselben von der Axe durch

$$\sqrt{xx + yy}$$

ausgedrückt, und dieser Abstand bleibt für alle Punkte, welche gleichen Abstand von der Ebene der x, y haben, derselbe. Der letztere Abstand ist aber nichts anders als die Ordinate z, folglich hängen die Ausdrücke z und $xx + yy$ so mit einander zusammen, dass wenn der eine constant ist, auch der andere constant bleibt, und nothwendig mit der Aenderung des einen auch eine Aenderung des andern verknüpft ist. Es wird also

$$xx + yy = Fz.$$

die allgemeine Gleichung aller durch Umdrehung einer Curve entstandener Oberflächen seyn, wo F eine willkührliche Function bedeutet. Nun seyen die Coordinaten derjenigen Punkte, welche auf einem Meridian liegen x', y', z', so sind die beiden Gleichungen welche diese Punkte bestimmen

$$x'x' + y'y' = Fz', \qquad y' = ax',$$

wo a eine Constante ist. Bezeichnet man ferner die Coordinaten derjenigen Punkte, die auf einem Parallelkreise liegen durch x'', y'', z'', so sind die beiden Gleichungen für diesen Parallelkreis

$$x''x'' + y''y'' = Fz'', \qquad z'' = 6,$$

indem durch 6 eine constante Grösse angedeutet wird.

Den Winkel ε den zwei Berührungslinien mit einander machen wird nach §. 117. durch

$$\cos\varepsilon = \frac{dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz''}{ds'.\,ds''}.$$

Nun findet sich aber aus den vorigen Gleichungen

$$dz'' = 0,\quad x''\,dx'' = -\,y''\,dy'',\quad \alpha dx' = dy'.$$

und wenn man die beiden letzten Differentiale mit einander multiplicirt

$$\alpha x''\,dx'\,dx'' = -\,y''\,dy'\,dy''\ \text{. folglich}$$

$$dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz''$$

$$= dy'\,dy''\left(1 - \frac{y''}{\alpha x''}\right).$$

Im Durchschnittspunkte des Meridians und Parallelkreises wird aber auch $y'' = \alpha x''$, und daher hat man $dx'\,dx'' + dy'\,dy'' + dz'\,dz'' = 0$

$$\cos\varepsilon = 0,\quad \varepsilon = 90.$$

also durchschneiden sich beide krumme Linien unter rechten Winkeln.

§. 129.

Bezeichnet man die geographische Breite im allgemeinen Sinne des §. 59. genommen, durch p, den Krümmungshalbmesser durch ρ, so wird das Element des Meridians $= \rho dp$ seyn. Nennt man ferner die Länge des Ortes l, seine Entfernung von der Drehungsaxe R, so ist das Element des Parallelkreises $= R dl$.

Da beide Elemente am Orte einen rechten Winkel bilden, so wird die Entfernung zweier Orte von einander, deren der erste die Breite p, die Länge l, der zweite aber die Breite $p + dp$, die Länge $l + dl$ hat durch

$$ds = \sqrt{\rho\rho\,dp^2 + RR\,dl^2}$$

ausgedrückt werden.

Nun seyen die Coordinaten der Punkte der Darstellung in einer Ebene, x und y, so dass dem ersten Punkte auf der krummen Oberfläche, dessen Länge durch l und Breite durch p bestimmt wird, die Coordinaten x und y, dem zweiten, dessen Lage durch $p + dp$ und $l + dl$ angegeben wird, die Coordinaten

$x + dx$ und $y + dy$ entsprechen, so wird die Entfernung der dargestellten Punkte

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Substituirt man diese Werthe von ds und $d\sigma$, in die Gleichung $d\sigma = mds$ (§. 127.) so kommt

$$dx^2 + dy^2 = mm\,(\rho\rho dp^2 + RRdl^2).$$

Die Grössen ρ und R bestimmen sich aus der Natur der erzeugenden Curve, hängen daher blos von p ab, und der Differentialcoefficient $\frac{\rho}{R}$ mit dp multiplicirt, wird daher ein vollkommenes Differential einer bestimmten Function von p seyn, die sich in jedem besonderen Falle aus der Gleichung der sich drehenden krummen Linie angeben lässt. Man nehme der Kürze wegen

$$\rho dp = Rd\theta, \quad mR = u, \quad \text{so wird}$$

$$dx^2 + dy^2 = uu\,(d\theta^2 + dl^2),$$

und man muss nun x und y als Functionen von θ und l so zu bestimmen suchen, dass dieser Gleichung Genüge geleistet wird.

§. 130.

Um diese Functionen zu finden, nehmen wir folgende zwei Differentialgleichungen an:

$$dx = uqd\theta + utdl, \quad dy = uq'd\theta + ut'dl,$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung des vorigen Paragraphs

$$\begin{aligned} d\theta^2 + dl^2 = & \ (qq + q'q')\,d\theta^2 \\ & + (tt + t't')\,dl^2 \\ & + 2(qt + q't')\,d\theta\,dl. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von $d\theta$ und dl, ohne eine gewisse Relation dieser Differentiale anzunehmen, statt haben soll, so muss sie identisch seyn, folglich muss man folgende Relationen annehmen

$$qq + q'q' = 1$$
$$tt + t't' = 1$$
$$qt + q't' = 0.$$

Eine der vier Grössen q, t, q', t' ist also willkührlich, da wir nur drei Gleichungen für dieselben haben, und wir können also alle vier durch eine neue veränderliche Grösse so ausdrücken, dass die

drei Gleichungen wirklich erfüllt werden. Man sieht leicht, dass dieses geschieht indem

$$q = + \sin \xi, \qquad t = - \cos \xi,$$
$$q' = + \cos \xi, \qquad t' = + \sin \xi,$$

gesetzt wird.

§. 131.

Hierdurch erhalten die zur Bestimmung von x und y angenommenen Differentialgleichungen folgende Form:

$$dx = u \sin \xi \, d\theta - u \cos \xi \, dl$$
$$dy = u \cos \xi \, d\theta + u \sin \xi \, dl.$$

Man setze ferner um diese zu integriren

$$\theta + il = v, \qquad \theta - il = w.$$

wo $i = \sqrt{-1}$, so wird

$$dx = \tfrac{1}{2} u \sin \xi \, (dv + dw) + \tfrac{1}{2} iu \cos \xi \, (dv - dw).$$
$$idy = \tfrac{1}{2} u \sin \xi \, (dv + dw) + \tfrac{1}{2} iu \cos \xi \, (dv + dw)$$

oder auch

$$dx = \tfrac{1}{2} u (\sin \xi + i \cos \xi) \, dv + \tfrac{1}{2} u (\sin \xi - i \cos \xi) \, dw.$$
$$idy = \tfrac{1}{2} u (\sin \xi + i \cos \xi) \, dv. - \tfrac{1}{2} u (\sin \xi - i \cos \xi) \, dw.$$

Beide Gleichungen sind integrabel, wenn man annimmt, dass

$$u (\sin \xi + i \cos \xi) = \varphi' v.$$
$$u (\sin \xi - i \cos \xi) = \psi' w.$$

wo φ', ψ' zwei willkührliche Functionszeichen sind. Setzt man dann noch

$$\int \varphi' v . \, dv = \varphi v. \qquad \int \psi' w . \, dw = \psi w.$$

so erhält man durch Integration

$$x = \frac{\varphi v + \psi w}{2}, \qquad y = \frac{\varphi v - \psi w}{2i}.$$

Substituirt man hierin statt v und w, ihre durch θ und l angegebenen Werthe, so kommt

$$x = \frac{\varphi (\theta + il) + \psi (\theta - il)}{2}$$
$$y = \frac{\varphi (\theta + il) - \psi (\theta - il)}{2i.}$$

und hiermit ist die Aufgabe im Allgemeinen aufgelöst.

§. 132.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen

$$u\,(\sin\xi + i\cos\xi) = \varphi' v\,,$$
$$u\,(\sin\xi - i\cos\xi) = \psi' w\,,$$

mit einander und bemerkt, dass

$$(\sin\xi + i\cos\xi)\,(\sin\xi - i\cos\xi)$$
$$= \sin\xi^2 + \cos\xi^2 = 1.$$

so erhält man

$$uv = \varphi' v.\ \psi' w = \varphi'(\theta + il).\ \psi'(\theta - il).$$

und da $u = mR$, so ergiebt sich

$$m = \frac{\sqrt{\varphi'(\theta + il).\ \psi'(\theta - il)}}{R.}$$

wodurch das Vergrösserungsverhältniss gefunden wird.

§. 133.

Sollen die beiden Gleichungen (§. 131.)

$$dx = u\sin\xi\,d\theta - u\cos\xi\,dl.$$
$$dy = u\cos\xi\,d\theta + u\sin\xi\,dl$$

wirklich integrabel seyn, so ist bekannt, dass man für die Coefficienten von $d\theta$ und dl folgende Gleichungen haben muss:

$$\left(\frac{d.\ u\sin\xi}{dl}\right) = -\left(\frac{d.\ u\cos\xi}{d\theta}\right)$$

$$\left(\frac{d.\ u\cos\xi}{dl}\right) = +\left(\frac{d.\ u\cos\xi}{d\theta}\right)$$

oder wenn man die angezeigten Differentiationen wirklich ausführt

$$\left(\frac{du}{dl}\right)\sin\xi + u\cos\xi\left(\frac{d\xi}{dl}\right)$$
$$= -\left(\frac{du}{d\theta}\right)\cos\xi + u\sin\xi\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dl}\right)\cos\xi - u\sin\xi\left(\frac{d\xi}{dl}\right)$$
$$= +\left(\frac{du}{d\theta}\right)\sin\xi + u\cos\xi\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right).$$

Multiplicirt man die erste durch $\sin\xi$, die zweite durch $\cos\xi$ und addirt die Producte, so kommt

$$\left(\frac{du}{dl}\right) = u.\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right).$$

Multiplicirt man die erste durch $\cos\xi$, die zweite durch $\sin\xi$, und giebt die Producte von einander ab, so erhält man

$$u\left(\frac{d\xi}{dl}\right) = -\left(\frac{du}{d\theta}\right).$$

Nun war aber $u = mR$, wo m das Vergrösserungsverhältniss, und R eine Function von θ ist; soll daher das Vergrösserungsverhältniss ein constantes seyn, so wird

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = m\frac{dR}{d\theta},\qquad \left(\frac{du}{dl}\right) = 0$$

folglich gehen die beiden vorigen Gleichungen in diese über:

$$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) = 0,\qquad mR\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) = -m\frac{dR}{d\theta}$$

Differentiirt man die erste nach l, die zweite nach θ, und eliminirt auf diese Art ξ, so wird

$$d.\frac{dR}{Rd\theta} = 0,\ \text{oder wenn man integrirt:}$$

$$\frac{dR}{Rd\theta} = \text{Const.}$$

Da ferner aus §. 129.

$$Rd\theta = \rho dp$$

und letzteres das Element des Meridians ausnacht, so folgt, dass unter der Voraussetzung eines constanten Vergrösserungsverhältnisses, der Meridian der Erde eine solche Linie seyn muss, in welcher der Abstand von der Axe der Länge selbst proportional steht; dieses ist die Eigenschaft der geraden Linie, und die Erde würde in diesem Falle ein gerader Kegel seyn. Bei der wirklichen Beschaffenheit der Erde ist es also unmöglich, eine Darstellung ihrer Oberfläche so zu machen, dass das Vergrösserungsverhältniss ein constantes wird.

§. 134.

Es ist zu bemerken, dass wenn man für x und y reelle Werthe haben will, so muss man die beiden Functionen φ und ψ so annehmen, dass wenn man in der einen statt $+ i$, $- i$ setzt, daraus die andere entsteht. Man hat aus den beiden Gleichungen §. 131. wenn man die untere mit i multiplicirt und dann beide zusammenaddirt

$$x + iy = \varphi(\theta + il)$$

also muss x dem reellen und y den in i multiplicirten Theile der Function gleich gesetzt werden.

Nimmt man z. B.

$$\varphi(\theta + il) = ae^{-(\theta + il)}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und a eine Constante bedeutet, so hat man

$$x + iy = ae^{-(\theta + il)};$$

nun ist aber bekanntlich $e^{-il} = \cos l - i \sin l$,

folglich auch $x + iy = ae^{-\theta} (\cos l - i \sin l$,

und hieraus $x = + a. e^{-\theta}. \cos l.$

$$y = - a. e^{-\theta} \sin l.$$

Nimmt man an, die darzustellende Oberfläche sey eine Kugel, so hat man um die Grösse θ zu bestimmen die Gleichung (§. 129.)

$$\rho d\rho = R d\theta$$

und da für diese Oberfläche ρ constant ist, und der Abstand jedes Punktes von der Axe, dessen Breite p ist, gleich $\rho \cos p$ wird, so hat man indem dieser Werth statt R gesetzt wird

$$dp = d\theta. \cos p.$$

folglich wenn man auf beiden Seiten durch $\cos p$ dividirt, und dann integrirt

$$\theta = \log tang(45 + \tfrac{1}{2} p).$$

Man erhält daher

$$e^{-\theta} = \frac{1}{tang(45 + \frac{1}{2} p)} = tang(45 - \tfrac{1}{2} p)$$

und hierdurch

$$x = a\ tang(45 - \tfrac{1}{2} p) \cos l$$
$$y = a\ tang(45 - \tfrac{1}{2} p) \sin l$$

welche Darstellungsart die stereographische Polarprojection giebt.

§. 135.

Um das Vergrösserungsverhältniss zu finden hat man die Gleichung (§. 132.)

$$m = \frac{\sqrt{\varphi'(\theta + il) . \psi'(\theta - il)}}{R}.$$

Nun ist im vorliegenden Falle

$$\varphi(\theta + il) = ae^{-(\theta + il)}$$
$$\psi(\theta - il) = ae^{-(\theta - il)}$$

folglich wenn man differentiirt

$$\varphi'(\theta + il) = -ae^{-(\theta + il)}$$
$$\psi'(\theta - il) = -ae^{-(\theta - il)}$$ und hieraus

$$m = \frac{ae^{-\theta}}{R} = \frac{a}{\rho} . \frac{tang(45 - \frac{1}{2}p)}{cos\,p}$$
$$= \frac{a}{\rho} . \frac{1}{2.cos(45 - \frac{1}{2}p)^2}.$$

§. 136.

Die Darstellungsarten der Oberfläche werden der Leichtigkeit der Construction meistens so gewählt, dass die Meridiane und Parallelkreise gerade Linien oder Kreise sind. Da nun die gerade Linie ebenfalls als ein Kreis betrachtet werden kann, der mit unendlich grossen Halbmesser beschrieben ist, so kann die Darstellungsart der Meridiane und Parallelkreise als gerade Linien, gleich mit in der Darstellungsart derselben als Kreise begriffen werden, und wir wollen uns jetzt das allgemeine Problem vorlegen: Wie müssen die Functionen, welche x und y ausdrücken, beschaffen seyn, damit die Darstellungen der Meridiane und Parallelkreise in einer Ebene, Kreise werden.

§. 137.

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises durch a und b, seinen Halbmesser durch r, so wird die Gleichung desselben

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = rr$$

seyn. Um nun aber eine Gleichung für den Kreis zu erhalten, in welcher die Coordinaten a und b nicht mehr vorkommen, differentiire man die vorige Gleichung zweimal, indem man sowohl dy als dx als veränderlich ansieht, indem beide einzeln als Functionen der Grössen θ, l betrachtet werden müssen; hierdurch ergiebt sich

$$dy(y-b) + dx(x-a) = 0$$
$$dy^2 + dx^2 + ddy(y-b) + ddx(x-a) = 0$$

oder wenn man diese beiden mit der ersten verbindet, und $x-a$, $y-b$ eliminirt,

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, ddx - dx\, ddy} = r,$$

welche die verlangte Gleichung ist, und bekanntlich den Ausdruck des Krümmungshalbmessers enthält.

§. 138.

Nun war allgemein

$$dx = u \sin\xi\, d\theta - u \cos\xi\, dl,$$
$$dy = u \cos\xi\, d\theta + u \sin\xi\, dl.$$

So lange man auf einerlei Meridian bleibt ist l constant, also

$$dx = u \sin\xi\, d\theta, \qquad dy = u \cos\xi\, d\theta,$$

und hieraus durch Differentiation

$$ddx = d\theta^2 \left[\sin\xi \left(\frac{du}{d\theta}\right) + u \cos\xi \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)\right].$$

$$ddy = d\theta^2 \left[\cos\xi \left(\frac{du}{d\theta}\right) - u \sin\xi \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)\right].$$

Man erhält daher

$$dy.\, ddx - dx.\, ddy = u^2\, d\theta^3 \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)$$

$$(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}} = u^3\, d\theta^3$$

folglich wenn man den Halbmesser des Meridians durch M bezeichnet

$$M = u. \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)}, \text{ oder da nach §. 133.}$$

$$\frac{1}{u} \cdot \left(\frac{du}{dl}\right) = \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right), \text{ so wird auch}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{uu} \cdot \left(\frac{du}{dl}\right).$$

§. 139.

Für die Parallelkreise ist θ constant, da θ von der Breite p allein abhängt; folglich

$$dx = -u \cos \xi \; dl$$
$$dy = -u \sin \xi \; dl.$$
$$ddx = dl^2 \left[u \sin \xi . \left(\frac{d\xi}{dl}\right) - \cos \xi \left(\frac{du}{dl}\right)\right].$$
$$ddy = dl^2 \left[u \cos \xi \left(\frac{d\xi}{dl}\right) + \sin \xi \left(\frac{du}{dl}\right)\right].$$
$$dy. \, ddx - dx. \, ddy = u^2 \, dl^3 \left(\frac{d\xi}{dl}\right)$$
$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = u^3 . dl^3.$$

Bezeichnet man daher den Halbmesser des Parallelkreises durch P, so wird

$$P = \frac{u.}{\left(\frac{d\xi}{dl}\right)} \text{ und da}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dl}\right) = -\frac{1}{u} . \left(\frac{du}{d\theta}\right), \text{ so wird auch}$$

$$\frac{1}{P} = -\frac{1}{uu} . \left(\frac{du}{d\theta}\right).$$

§. 140.

Setzt man $\omega = \frac{1}{u}$, so hat man noch einfacher die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{M} = -\left(\frac{d\omega}{dl}\right), \quad \frac{1}{P} = +\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right).$$

Da nun M von der Breite des Ortes nicht abhängt, sondern blos von der Länge, P hingegen eine

ınction von θ allein seyn muss, weil der Halbmes-
r des Parallelkreises blos von seiner Entfernung
ım Aequator abhängt, so folgt, dass

$$\left(\frac{dM}{d\theta}\right) = 0, \quad \left(\frac{dP}{dl}\right) = 0,$$

yn wird. Beiden Bedingungen leistet die Gleichung
$\left(\frac{dd\omega}{d\theta dl}\right) = 0$, vollkommen Genüge, und die beiden
ınctionen φ, ψ müssen dieser Form gemäss be-
mmt werden.

§. 141.

Man hat aus §. 132.

$$uu = \varphi'(\theta + il). \psi'(\theta + il)$$

so wenn man

$$\frac{1}{\varphi'(\theta + il)} = [f(\theta + il)]^2$$

$$\frac{1}{\psi'(\theta - il)} = [F(\theta - il)]^2$$

tzt, so kommt

$$\omega = f(\theta + il). \ F(\theta - il).$$

Differentiirt man diese Gleichung noch θ, so wird

$$\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right) = f'(\theta + il). \ F(\theta - il) + f(\theta + il). \ F'(\theta - il)$$

ıd diese Gleichung nochmals nach l differentiirt

$$\left(\frac{dd\omega}{d\theta dl}\right) = i f''(\theta + il). \ F(\theta - il). - i f(\theta + il). \ F''(\theta - il).$$

Da wir ferner die Bedingung

$$\left(\frac{dd\omega}{d\theta dl}\right) = 0$$

funden haben, so muss

$$\frac{f''(\theta + il)}{f(\theta + il)} = \frac{F''(\theta - il)}{F(\theta - il)} \text{ werden.}$$

§. 142.

Im Allgemeinen ist der vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil eine Function von $\theta + il$, der hinter demselben befindliche eine Function von $\theta - il$; sollen nun beide Ausdrücke gleich seyn, so dürfen in jedem der beiden Ausdrücke die veränderlichen Grössen θ, l gar nicht mehr vorkommen, sondern dieselben constant seyn.

Bezeichnet man daher durch n eine constante Grösse, so wird

$$\frac{f''(\theta + il)}{f(\theta + il)} = n, \quad \frac{F''(\theta - il)}{F(\theta - il)} = n,$$

und diese beiden Gleichungen bestimmen die Formen der Functionen f, F, und dadurch werden auch die der Functionen φ, ψ bekannt.

§. 143.

Nimmt man der Kürze wegen

$$f(\theta + il) = z, \quad \theta + il = v,$$

so wird aus der Gleichung

$$\frac{f''(\theta + il)}{f(\theta + il)} = n, \text{ diese andere: } \frac{ddz}{z\,dv^2} = n.$$

Man multiplicire auf beiden Seiten mit $2zdz$, so wird $2\frac{dz.\,ddz}{dv^2} = 2nzdz$, also integrirt,

$$\frac{dz^2}{dv^2} = a + nz^2.$$

Hieraus ergiebt sich von Neuem

$$dv = \frac{dz}{\sqrt{a + nzz}},$$

wovon bekanntlich das Integral

$$v = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \log\left[\frac{z\sqrt{n} + \sqrt{a + nzz}}{\sqrt{a}}\right] + \frac{\log b}{\sqrt{n}}$$

ist. Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$e^{v\sqrt{n}} = \frac{b}{\sqrt{a}}\left[z\sqrt{n} + \sqrt{a + nzz}\right].$$

Man findet aus dieser Gleichung indem man z sucht

$$z = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{n}} \cdot [e^{v\sqrt{n}} - bb\, e^{-v\sqrt{n}}].$$

§. 144.

Quadrirt man diesen Ausdruck, und bemerkt, dass nach §. 141 und 143.,

$\frac{1}{zz} = \varphi' v$, so hat man

$$\varphi' v = \frac{4bb\,n}{a} \cdot \frac{1}{[e^{v\sqrt{n}} - bb.e^{-v\sqrt{n}}]^2}$$

$$= \frac{4bb\,n}{a} \cdot \frac{e^{2v\sqrt{n}}}{[e^{2v\sqrt{n}} - bb]^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dv und integrirt, so kommt, da

$$\int \varphi' v.\, dv = \varphi v,$$

$$\varphi v = -\frac{2bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{1}{e^{2v\sqrt{n}} - bb} + c.$$

folglich, wenn statt v sein Werth $\theta + il$ restituirt wird

$$\varphi(\theta + il) = -\frac{2bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{1}{e^{2\theta\sqrt{n} + 2il\sqrt{n}} - bb} + c.$$

§. 145.

Der leichtern Behandlung dieses Ausdrucks wegen, müssen wir denselben auf die Form $P + iQ$ reduciren. Man hat bekanntlich

$$e^{2il\sqrt{n}} = \cos 2l\sqrt{n} + i \sin 2l\sqrt{n}.$$

folglich

$$\frac{1}{e^{2\theta\sqrt{n} + 2il\sqrt{n}} - bb}$$

$$= \frac{1}{e^{2\theta\sqrt{n}}\cos 2l\sqrt{n} - bb + i\,e^{2\theta\sqrt{n}}\sin 2l\sqrt{n}}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches durch

$$e^{2\theta\sqrt{n}}\cos 2l\sqrt{n} - bb - i\,e^{2\theta\sqrt{n}}\sin 2l\sqrt{n}\,.$$

so kommt

$$\frac{1}{e^{2\theta\sqrt{n} + 2il\sqrt{n}} - bb}$$

$$= \frac{e^{2\theta\sqrt{n}}\cos 2l\sqrt{n} - bb}{e^{4\theta\sqrt{n}} - 2bb\,e^{2\theta\sqrt{n}}\cos 2l\sqrt{n} + b^4}$$

$$- i\,\frac{e^{2\theta\sqrt{n}}\sin 2l\sqrt{n}}{e^{4\theta\sqrt{n}} - 2bb\,e^{2\theta\sqrt{n}}\cos 2l\sqrt{n} + b^4}$$

folglich wenn man der Kürze wegen

$2\theta.\sqrt{n} = \eta$, $2l\sqrt{n} = \lambda$ setzt, so wird

$$\varphi(\theta + il) = \frac{2bb\sqrt{n}}{a}.\frac{e^{\eta}\cos\lambda - bb.}{e^{2\eta} - 2bb\,e^{\eta}\cos l + b^4} + c$$

$$- i.\frac{2bb\sqrt{n}}{a}.\frac{e^{\eta}\sin l}{e^{2\eta} - 2bb\,e^{\eta}\cos l + b^4}.$$

§. 146.

Die andere Function $\psi(\theta - il)$ lässt sich auf dieselbe Art finden, und man sieht aus dem ganzen Verfahren, dass um $\psi(\theta - il)$ zu erhalten, man nur in dem Ausdruck von $\varphi(\theta + il)$, statt $+i$, $-i$ zu setzen braucht, und im Allgemeinen statt der constanten Grössen a, b, c, drei andere a', b', c' einführt. Da aber wenn x und y reelle Grössen seyn sollen, die beiden Ausdrücke

$$\frac{\varphi(\theta + il) + \psi(\theta - il)}{2}, \quad \frac{\varphi(\theta + il) - \psi(\theta - il)}{2i}$$

ebenfalls reell seyn müssen, so ergiebt sich sogleich,

dass die Constanten a', b', c' den Constanten a, b, c gleich seyn müssen.

Man erhält dann

$$x = \frac{2bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{e^{\eta}\cos\lambda - bb}{e^{2\eta} - 2bb\,e^{\eta}\cos\lambda + b^4} + c.$$

$$y = -\frac{2bb\sqrt{n}}{a} \cdot \frac{e^{\eta}\sin\lambda}{e^{2\eta} - 2bb\,e^{\eta}\cos\lambda + b^4}.$$

§. 147.

Diese Werthe von x und y sind noch nicht die allgemeinsten, welche man aus voriger Auflösung ableiten kann, indem nur drei Constanten in denselben vorhanden sind, da der Natur der Sache gemäss sechs willkührliche Constanten in diesen Werthen enthalten seyn müssen. Dies kam aber daher, weil wir die Grössen a, b, c als reelle betrachteten; allein es verhindert nichts, dass wir dieselben nicht als imaginär ansehen können. Wir setzen zu diesem Zweck

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$bb = B(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$c = C(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

und substituiren diese Werthe in dem Ausdruck von $\varphi(\theta + il)$ §. 144. so kommt, wenn wie §. 145.

$$2\theta\sqrt{n} = \eta, \qquad 2l\sqrt{n} = \lambda,$$

der Kürze wegen gesetzt wird,

$$\varphi(\theta + il) = C(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$
$$- \frac{2B(\cos\beta + i\sin\beta)}{A(\cos\alpha + i\sin\alpha)}\sqrt{n}.\ \frac{1.}{e^{\eta+i\lambda} - B(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

Nun ist aber, wenn man die imaginären Ausdrücke gehörig reducirt

$$\frac{\cos\beta + i\sin\beta}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos(\beta - \alpha) + i\sin(\beta - \alpha)$$

$$\frac{1}{e^{\eta+i\lambda} - B(\cos\beta + i\sin\beta)}$$
$$= \frac{e^{\eta}\cos\lambda - B\cos\beta - i(e^{\eta}\sin\lambda - B\sin\beta)}{e^{2\eta} + BB - 2e^{\eta}B\cos(\lambda - \beta)}.$$

$$\frac{\cos 6 + i \sin 6}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \cdot \frac{1}{e^{\eta + i\lambda} - B(\cos 6 + i \sin 6)}$$

$$= \frac{e^{\eta} \cos(\lambda - 6 + \alpha) - B \cos \alpha}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB}$$

$$- i \frac{e^{\eta} \sin(\lambda - 6 + \alpha) - B \sin \alpha}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB}.$$

Setzt man diesen letztern Ausdruck

$$= P - iQ$$

so erhält man

$$\varphi(\theta + il) = C \cos\gamma - P \frac{2B}{A} \sqrt{n}$$

$$+ i \left[C \sin\gamma + Q \frac{2B}{A} \sqrt{n}\right].$$

§. 148.

In diesem Ausdruck von $\varphi(\theta + il)$ sind sechs Constanten enthalten, nämlich A, B, C, α, 6, γ, folglich brauchen wir in dem noch zu suchenden Ausdruck der Function $\psi(\theta - il)$, die ganz auf dieselbe Art gefunden wird und sich nur durch die Constanten und den Factor $-i$ statt $+i$, von $\varphi(\theta + il)$ unterscheidet, keine neuen Constanten anzuführen, sondern blos statt $+i$, $-i$ zu setzen. Hätte man also bei den drei Integrationen die zur Auffindung der Function $\psi(\theta - il)$ nothwendig sind, statt der drei Grössen a, b, c die in der Function $\varphi(\theta + il)$ vorkommen, die drei andern a', b', c' eingeführt, so wird

$$a' = A(\cos\alpha - i \sin\alpha)$$

$$b'b' = B(\cos 6 - i \sin 6)$$

$$c' = C(\cos\gamma - i \sin\gamma)$$

und hierdurch

$$\psi(\theta - il) = C \cos\gamma - P \frac{2B}{a} \sqrt{n}$$

$$- i \left[C \sin\gamma + Q \frac{2B}{A} \sqrt{n}\right].$$

§. 149.

Da nun aus §. 131.

$$x = \frac{\varphi(\theta + il) + \psi(\theta - il)}{2}$$

$$y = \frac{\varphi(\theta + il) - \psi(\theta - il)}{2i}.$$

so erhält man durch Einführung der gefundenen Werthe

$$x = C \cos\gamma - P \frac{2B}{A} \sqrt{n}.$$

$$y = C \sin\gamma + Q \frac{2B}{A} \sqrt{n}.$$

und diese beiden Gleichungen geben alle Darstellungen einer durch Umdrehung entstandenen Oberfläche, wenn die Darstellung in den unendlich kleinen Theilen ähnlich seyn, und zugleich die Parallelkreise und Meridiane durch Kreise dargestellt werden sollen.

§. 150.

Wir haben aus §. 143. die Gleichungen

$$f(\theta + il) = z$$

$$\theta + il = v.$$

$$z = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{n}} [e^{v\sqrt{n}} - bb\, e^{-v\sqrt{n}}]$$

und wenn wir bedenken, dass

$$\theta \sqrt{n} = \tfrac{1}{2}\eta, \qquad l\sqrt{n} = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

so erhalten wir

$$f(\theta + il) = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{n}} [e^{\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}i\lambda} - bb\, e^{-\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}i\lambda}].$$

Setzt man hierin statt $+ i$, $- i$, und statt a, b, resp. a', b', so kommt

$$F(\theta - il) = \frac{\sqrt{a'}}{2b'\sqrt{a}} [e^{\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}i\lambda} - b'b'\, e^{-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}i\lambda}].$$

Multiplicirt man diese beiden Functionen $f(\theta + il)$ und $F(\theta - il)$ mit einander, so ergiebt sich

$$f(\theta + il).\ F(\theta - il) =$$

$$\frac{\sqrt{aa'}}{4bb'n} [e^{\eta} - bb\, e^{-i\lambda} - b'b'\, e^{+i\lambda} + bb\, b'b'\, e^{-\eta}].$$

Nun ist aber (§. 147 und 148.)

$$a = A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$
$$a' = A(\cos \alpha - i \sin \alpha)$$
$$bb = B(\cos 6 + i \sin 6)$$
$$b'b' = B(\cos 6 - i \sin 6).$$

folglich

$$\sqrt{aa'} = A, \qquad bb' = B.$$

und da ausserdem

$$e^{-i\lambda} = \cos\lambda - i \sin\lambda.$$
$$e^{+i\lambda} = \cos\lambda + i \sin\lambda.$$

so wird auch

$$bb\, e^{-i\lambda} = B[\cos(6 - \lambda) + i \sin(6 - \lambda)].$$
$$b'b'\, e^{+i\lambda} = B[\cos(6 - \lambda) + i \sin(6 - \lambda)].$$

Durch die Substitution dieser Werthe ergiebt sich

$$f(\theta + il).\ F(\theta - il) =$$
$$\frac{A}{4Bn}[e^{\eta} - 2B\cos(6 - \lambda) + BB\, e^{-\eta}].$$

§. 151.

Vermittelst dieses Ausdrucks lässt sich das Vergrösserungsverhältniss m finden; denn man hat aus §. 132.

$$m = \frac{\sqrt{\varphi'(\theta + il).\ \psi'(\theta - il)}}{R}$$

und da nach §. 141.

$$\sqrt{\varphi'(\theta + il)} = \frac{1}{f(\theta + il)}$$
$$\sqrt{\psi'(\theta - il)} = \frac{1}{F(\theta - il)}$$

so wird auch

$$m = \frac{1}{R.f(\theta + il).\ F(\theta - il)}$$

und wenn man hierin statt des Products der beiden Functionen den im vorigen Paragraph entwickelten Werth substituirt, so kommt

$$m = \frac{4Bn\, e^{\eta}}{RA(e^{2\eta} - 2e^{\eta} B\cos(6 - \lambda) + BB)}.$$

Aus §. 147. findet man leicht, dass

$$e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(6 - \lambda) + BB.$$
$$= \frac{1}{PP + QQ}$$

folglich wird auch

$$m = \frac{4 Bn\, e^{\eta} (PP + QQ)}{R.\ A}.$$

§. 152.

Es ist nun noch nothwendig die Lage der Mittelpunkte und die Halbmesser der Kreise zu bestimmen, welche die Darstellungen der Meridiane und Parallelkreise in der Ebene angeben. Man hat hierzu aus §. 149. folgende zwei Gleichungen:

$$x = C \cos\gamma - \frac{2 P.\, B}{A} \sqrt{n}.$$
$$y = C \sin\gamma + \frac{2 Q\, B}{A} \sqrt{n}.$$

oder wenn man statt P und Q ihre Werthe setzt

$$x - C \cos\gamma$$
$$= - \frac{e^{\eta} \cos(\lambda - 6 + \alpha) - B \cos\alpha}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB} \cdot \frac{2B}{n} \sqrt{n}.$$
$$y - C \sin\gamma$$
$$= + \frac{e^{\eta} \sin(\lambda - 6 + \alpha) - B \sin\alpha}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B. \cos(\lambda - 6) + BB} \cdot \frac{2B}{A} \sqrt{n}.$$

Quadrirt man beide Gleichungen und addirt die Quadrate zusammen, so kommt

$$(x - C \cos\gamma)^2 + (y - C \sin\gamma)^2$$
$$= \frac{4 BBn}{AA} \cdot \frac{1}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB}.$$

Substituirt man den sich aus dieser Gleichung ergebenden Werth von

$$e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB$$

in vorige Gleichungen, so erhält man

$$\frac{x - C \cos\gamma}{(x - C \cos\gamma)^2 + (y - C \sin\gamma)^2}.$$

$$= -\frac{A}{2B\sqrt{n}} . [e^{\eta} \cos(\lambda - 6 + v) - \cos\alpha].$$

$$\frac{y - C \sin\gamma}{(x - C\cos\gamma)^2 + (y - C\sin\gamma)^2}$$

$$= \frac{A}{2B\sqrt{n}} [e^{\eta} \sin(\lambda - 6 + \alpha) - B \sin\alpha].$$

§. 153.

Eliminirt man aus den beiden vorigen Gleichungen η, so erhält man eine Gleichung die ausser x und y blos λ enthält, und daher den Kreis für irgend einen Meridian angiebt. Hierzu multiplicire man die erste Gleichung durch $\sin(\lambda - 6 + \alpha)$, die zweite durch $\cos(\lambda - 6 + \alpha)$, und addire die Producte, so kommt

$$\frac{(x - C\cos\gamma(\sin(\lambda - 6 + \alpha) + (y - C\sin\gamma)\cos(\lambda - 6 + \alpha)}{(x - C\cos\gamma)^2 + (y - C\sin\gamma)^2}$$

$$= \frac{A}{2\sqrt{n}} . \sin(\lambda - 6) \quad \text{oder auch}$$

$$(x - C\cos\gamma)^2 + (y - \sin\gamma)^2$$
$$- \frac{2\sqrt{n}}{A} (x - C \cos\gamma) \frac{\sin(\lambda - 6 + \alpha)}{\sin(\lambda - 6)}$$
$$- \frac{2\sqrt{n}}{A} (y - C \sin\gamma) \frac{\cos(\lambda - 6 + \alpha)}{\sin(\lambda - 6)} = 0.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes durch x', y', und den Halbmesser des Kreises durch M, so wird

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = MM$$

die Gleichung dieses Kreises seyn müssen, und vergleicht man dieselbe mit der Form der vorigen, so ergiebt sich

$$x' = C\cos\gamma + \frac{\sqrt{n}.\sin(\lambda - 6 + \alpha)}{A\sin(\lambda - 6)}$$

$$y' = C\sin\gamma + \frac{\sqrt{n}.\cos(\lambda - 6 + \alpha)}{A\sin(\lambda - 6)}$$

$$M = \pm \frac{\sqrt{n}}{A\ sin(\lambda - \beta)}.$$

§. 154.

Um die Parallelkreise zu bestimmen, muss man aus den beiden letzten Gleichungen des §. 152. die Grösse λ eliminiren; man schreibe die beiden Gleichungen so

$$\frac{(x - C\ cos\ \gamma)}{(x - C\ cos\ \gamma)^2 + (y - C\ sin\ \gamma)^2} - \frac{A\ cos\ \alpha}{2\sqrt{n}}$$
$$= - \frac{A}{2B\sqrt{n}}\ e^{\eta}\ cos(\lambda - \beta + \alpha)$$
$$\frac{(y - C\ sin\ \gamma)}{(x - C\ cos\ \gamma)^2 + (y - C\ sin\ \gamma)^2} + \frac{A\ sin\ \alpha}{2\sqrt{n}}$$
$$= \frac{A}{2B\sqrt{n}}\ e^{\eta}\ sin(\lambda - \beta + \alpha)$$

und addire ihre Quadrate zusammen; man erhält dann

$$\frac{1 + \frac{A}{\sqrt{n}}(y - C\,sin\,\gamma)\,sin\,\alpha - (x - C\,cos\,\gamma)\,cos\,\alpha . \frac{A}{\sqrt{n}}}{(y - C\ sin\ \gamma)^2 + (x - C\ cos\ \gamma)^2}$$
$$+ \frac{AA}{4n} = \frac{AA}{4BBn}\ e^{2\eta}$$

oder auch

$$(y - C\ sin\ \gamma)^2 + (x - C\ cos\ \gamma)^2$$
$$+ 4n . \frac{1 + \frac{A}{\sqrt{n}}(y - C\,sin\,\gamma)\,sin\,\alpha - (x - C\,cos\,\gamma)\,cos\,\alpha . \frac{A}{\sqrt{n}}}{AA\ BB - AA\ e^{2\eta}} . BB = 0.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes des Parallelkreises durch x'', y'' und den Halbmesser durch P, so ist

$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 = PP.$$

und man findet dann

$$x'' = C\ cos\ \gamma + \frac{2BB\sqrt{n}.\ cos\ \alpha}{ABB - A\ e^{2\eta}}$$

$$y'' = C \sin\gamma - \frac{2BB\sqrt{n}.\ \sin\alpha}{A\ BB - A\,e^{2\eta}}$$

$$P = \pm\frac{2B\sqrt{n}}{A}.\ \frac{e^{\eta}}{BB - e^{2\eta}}.$$

§. 155.

Die beiden Halbmesser M und P konnte man schon aus frühern Formeln finden; denn man hat (§. 140.)

$$\frac{1}{M} = -\left(\frac{d\omega}{dl}\right), \qquad \frac{1}{P} = +\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right).$$

und da (§. 141 und 150.)

$$\omega = f(\theta + il).\ F(\theta - il).$$

$$= \frac{A}{2Bn}\,[e^{\eta} - 2B\cos(6 - \lambda) + BB\,e^{-\eta}].$$

so wird, wenn man differentiirt

$$d\omega = \frac{A}{4Bn}\,[e^{\eta}\,d\eta - 2B\sin(6 - \lambda)\,d\lambda - BB\,e^{-\eta}\,d\eta].$$

oder da

$$d\eta = 2d\theta\sqrt{n}, \qquad d\lambda = 2dl\sqrt{n}$$

so kommt auch

$$d\omega = \frac{A}{2B\sqrt{n}}\,[e^{\eta}\,d\theta - 2B\sin(6 - \lambda)\,dl - BB\,e^{-\eta}\,d\theta].$$

und hieraus

$$\left(\frac{d\omega}{dl}\right) = -\frac{A}{\sqrt{n}}\sin(6 - \lambda)$$

$$\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right) = \frac{A}{2B\sqrt{n}}\,[e^{\eta} - BB\,e^{-\eta}].$$

Es ergiebt sich daher

$$M = \frac{\sqrt{n}}{A\sin(6 - \lambda)},$$

$$P = \frac{2B\sqrt{n}}{A}.\ \frac{e^{\eta}}{e^{2\eta} - BB}.$$

so dass man bei den vorigen Werthen die negativen Vorzeichen nehmen muss.

§. 156.

Die beiden Gleichungen §. 153.

$$x' = C \cos\gamma + \frac{\sqrt{n}.\ \sin(\lambda - 6 + \alpha)}{A \sin(\lambda - 6)},$$

$$y' = C \sin\gamma + \frac{\sqrt{n}.\ \cos(\lambda - 6 + \alpha)}{A \sin(\lambda - 6)}$$

geben, indem man die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ multiplicirt, und die Producte von einander abzieht

$$x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = C \cos(\gamma + \alpha) + \frac{\sqrt{n}}{A}.$$

und diese Gleichung zeigt, dass die Mittelpunkte aller Meridiane auf einer geraden Linie liegen.

§. 157.

Nimmt man die beiden Gleichungen §. 154. und schreibt sie folgendermassen:

$$x'' - C \cos\gamma = \frac{2BB \cos\alpha \sqrt{n}}{ABB - A e^{2\eta}}$$

$$y'' - C \sin\gamma = - \frac{2BB \sin\alpha \sqrt{n}.}{ABB - A e^{2\eta}}.$$

so erhält man, indem man die zweite durch die erste dividirt

$$\frac{y'' - C \cos\gamma.}{x'' - C \cos\gamma} = - \operatorname{tang} \alpha.$$

woraus man sieht, dass ebenfalls die Mittelpunkte aller Parallelkreise auf einer geraden Linie liegen.

§. 158.

Man wird die allgemeinen Gleichungen sehr vereinfachen, indem man die beiden geraden Linien, auf denen die Mittelpunkte der Parallelkreise und der

Meridiane liegen, als die Coordinatenaxen annimmt, und zwar die erste als die Axe der x; die zweite als die Axe der y. Man muss daher die beiden Gleichungen haben

$$y'' = 0, \quad x' = 0.$$

und da allgemein

$$y'' = -x'' \tang \alpha + C \cos\gamma \tang \alpha + C \sin\gamma$$

$$x' = +y' \tang \alpha - C \frac{\cos(\gamma + \alpha)}{\cos \alpha} - \frac{\sqrt{n}}{A \cos \alpha}$$

so muss man die Relationen

$$\tang \alpha = 0,$$

$$C \cos\gamma \tang \alpha + C \sin\gamma = 0,$$

$$C \frac{\cos(\gamma + \alpha)}{\cos \alpha} + \frac{\sqrt{n}}{A \cos \alpha} = 0,$$

haben. Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = 0,$$

$$C \sin\gamma = 0,$$

$$C \cos\gamma + \frac{\sqrt{n}}{A} = 0.$$

§. 159.

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Meridiane und der Parallelkreise erhält man hierdurch nach §. 153 und 154.

$$x' = 0, \quad y' = \frac{\sqrt{n}}{A} . \cotg(\lambda - 6),$$

$$M = \frac{\sqrt{n}}{A} . \frac{1}{\sin(6 - \lambda)}$$

$$y'' = 0, \quad x'' = \frac{\sqrt{n}}{A} . \frac{BB + e^{2\eta}}{BB - e^{2\eta}}$$

$$P = \frac{2B\sqrt{n}}{A} . \frac{e^{\eta}}{e^{2\eta} - BB}$$

und die allgemeinen Coordinaten (§. 152.) werden

$$x = -\frac{\sqrt{n}}{A} . \frac{e^{2\eta} - BB.}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB}$$

$$y = \frac{2B\sqrt{n}}{A} . \frac{e^{\eta} \sin(\lambda - 6)}{e^{2\eta} - 2e^{\eta} B \cos(\lambda - 6) + BB}$$

§. 160.

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so er-
ilt man §. 134.

$$\theta = log\ tang(45 + \tfrac{1}{2} p)$$

o p die geographische Breite bedeutet, und da

$$\eta = 2\theta \sqrt{n}$$

wird

$$e^{-\eta} = tang(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2\sqrt{n}}$$

lglich wenn man diesen Werth in vorige Ausdrücke r Coordinaten substituirt, und zugleich statt λ, ! $\sqrt{n}$ setzt.

$$= -\frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{1 - BB\,tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{4\sqrt{n}}}{1 - 2B cos(2l\sqrt{n} - \beta) tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2\sqrt{n}} + BB tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{4\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{2B\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{sin(2l\sqrt{n} - \beta)\ tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2\sqrt{n}}}{1 - 2B cos(2l\sqrt{n} - \beta) tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2\sqrt{n}} + BB tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{4\sqrt{n}}}.$$

§. 161.

Um aus diesen beiden Gleichungen einige Projec-
ınen besonders abzuleiten, mache man noch folgende
ınderungen der Constanten. Man nehme

$$Ah = n,$$

$$2\sqrt{n} = k.$$

$$\beta = 2\sqrt{n}.\ g.$$

dass an die Stelle der drei ersten Constanten, A, , β, die neuen h, k, g, eingeführt werden. Dann hält man

$$= -\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB\ tang(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2k}}{1 - 2B\ cos k\,(l - g)\ tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{k} + BB\ tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2k}}$$

$$= \frac{4Bh}{k} \cdot \frac{sin k\,(l - g)\ tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{k}}{1 - 2B\ cos k\,(l - g)\ tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{k} + BB\ tg(45 - \tfrac{1}{2} p)^{2k}}$$

§. 162.

Setzen wir $k = 0$, so werden scheinbar beide leichungen unendlich; allein man kann doch be-
immte Werthe aus denselben ableiten, wenn man ierst k nur so klein annimmt, dass die höhern Po-

tenzen vernachlässigt werden können. Da nun in diesem Falle

$$tang(45-\tfrac{1}{2}p)^k = 1 + k \log tang(45-\tfrac{1}{2}p)$$
$$tang(45-\tfrac{1}{2}p)^{2k} = 1 + 2k \log tang(45-\tfrac{1}{2}p)$$
$$\sin k\,(l-g) = k\,(l-g)$$
$$\cos k\,(l-g) = 1.$$

so erhält man

$$y = 4Bh.\ \frac{(l-g)\,(1+k \log tg(45-\tfrac{1}{2}p))}{(1-B^2-2Bk\,(1-B) \log tg(45-\tfrac{1}{2}p)}$$

und wenn jetzt $k=0$ genommen wird

$$y = \frac{4Bh}{(1-B)^2}\,(l-g).$$

Eben so kommt auch

$$x = -\frac{2h}{k}.\frac{1-BB-2kBB \log tg(45-\tfrac{1}{2}p)}{(1-B)^2-2Bk\,(1-B) \log tg(45-\tfrac{1}{2}p)}$$

$$= -\frac{2h}{k}.\frac{\frac{1+B}{1-B}-\frac{2k\,BB}{(1-B)^2} \log tg(45-\tfrac{1}{2}p)}{1-\frac{2Bk}{1-B} \log tg(45-\tfrac{1}{2}p)}$$

oder wenn man mit dem Nenner wirklich dividirt

$$x = +\frac{2h}{k}.\frac{B+1}{B-1}-\frac{4Bh}{(B-1)^2} \log tang(45-\tfrac{1}{2}p).$$

Man sieht, dass wenn x nicht unendlich gross werden soll, wenn man $k=0$ setzt, $B+1$ durch k theilbar seyn muss; man nehme daher

$$B+1 = fk$$

so wird

$$B-1 = fk-2,$$

und wenn man diese Werthe in vorige Gleichung setzt, und dann $k=0$ nimmt

$$x = -hf + h \log tang(45-\tfrac{1}{2}p)$$
$$y = -h\,(l-g).$$

Vergleicht man diese Werthe mit den §. 123. angegebenen, so sieht man, dass beide mit einander übereinstimmen, wenn nur x und y mit einander vertauscht werden, welches an sich gleichgültig ist, und ausserdem die Constanten $f=0$, $g=0$, $h=-\alpha$ gesetzt werden, da

$$\log tang(45-\tfrac{1}{2}p) = -\log tang(45+\tfrac{1}{2}p).$$

ist. Wir haben daher die Mercator'sche Projections-

art aus der allgemeinen Darstellungsmethode durch unsere Operationen abgeleitet, und wir schliessen daraus, dass diese Projectionsart die Erdoberfläche in ihren unendlich kleinen Theilen ähnlich darstellt.

§. 163.

Um das bei dieser Projectionsart statt findende Vergrösserungsverhältniss zu haben, hat man aus §. 151.

$$m = \frac{4Bn\ e^{\eta}}{RA.(e^{2\eta} - 2e^{\eta}\ B\ \cos(\beta - \lambda) + BB}$$

oder da $R = \rho\ \cos p$, wenn durch ρ der Halbmesser der Erde bezeichnet wird, so erhält man auch

$$m = \frac{4Bh.\ tg(45 - \tfrac{1}{2}p)^{k}}{\varrho \cos p\,[1 - 2B \cos k(g-l)\, tg(45 - \tfrac{1}{2}p)^{k} + BB\, tg(45 - \tfrac{1}{2}p)^{2k}]}$$

$$= \frac{h}{\varrho\ \cos p}.$$

§. 164.

Setzt man in den Formeln für x und y, §. 161. $B = 1$, $k = 1$, so folgt nach den gehörigen Reductionen

$$x = -\ 2h.\ \frac{\sin p}{1 - \cos p\ \cos(l - g)}$$

$$y = +\ 2h.\ \frac{\sin(l - g)\ \cos p}{1 - \cos p\ \cos(l - g)}.$$

Bestimmt man die Constante g noch dadurch, dass man sie $= 90°$ annimmt, so erhält man

$$x = -\ 2h\ \frac{\sin p}{1 + \cos p\ \sin l}$$

$$y = +\ 2h.\ \frac{\cos l\ \cos p}{1 + \cos p\ \sin l}.$$

welches die stereographische Aequatorealprojection (§. 114.) ist. Das Vergrösserungsverhältniss wird durch die Gleichung

$$m = \frac{2h}{\varrho\ (1 + \cos p\ \sin l)}$$

angegeben, wo ϱ den Halbmesser der Erde bedeutet.

§. 165.

Da die Grösse k sich durch Ausziehung der Quadratwurzel aus n findet, so kann man dieselbe sowohl positiv als negativ nehmen, und wir wollen untersuchen, welche Aenderung hierdurch in Werthe von x und von y hervorgebracht wird. Bezeichnet man der Kürze wegen die Grösse $tang(45 - \frac{1}{2} p)$ durch t, so werden die Formeln von x und y (§. 161.)

$$x = -\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB.\, t^{2k}}{1 - 2B \cos k\,(l - g).\, t^k + BB\, t^{2k}}$$

$$y = +\frac{4Bh}{k} \cdot \frac{\sin k\,(l - g).\, t^{2k}}{1 - 2B \cos k\,(l - g)\, t^k + BB\, t^{2k}}$$

folglich wenn man k negativ nimmt,

$$x = +\frac{2h}{k} \cdot \frac{1 - BB.\, t^{-2k}}{1 - 2B \cos k\,(l - g).\, t^{-k} + BB.\, t^{-2k}}$$

$$y = +\frac{4Bh}{k} \cdot \frac{\sin k\,(l - g).\, t^{-k}}{1 - 2B \cos k(l - g).\, t^{-k} + BB\, t^{-2k}}$$

Man multiplicire die beiden Gleichungen Zähler und Nenner durch t^{2k}, so wird

$$x = \frac{2h}{k} \cdot \frac{t^{2k} - B.}{t^{2k} - 2B \cos k\,(l - g)\, t^k + BB}$$

$$y = \frac{4Bh}{k} \cdot \frac{\sin k\,(l - g).\, t^k}{t^{2k} - 2B \cos k\,(l - g)\, t^k + BB}$$

und wenn man noch

$$B = \frac{1}{B'}$$

setzt, und reducirt

$$x = -\frac{2h}{h} \cdot \frac{1 - B'B'.\, t^{2k}}{1 - 2B' \cos k\,(l - g)\, t^k + B'B'\, t^{2k}}.$$

$$y = +\frac{4B'h}{k} \cdot \frac{\sin k(l - g)\, t^k}{1 - 2B' \cos k\,(l - g).\, t^k + B'B'.\, t^{2k}}.$$

Da diese Gleichungen ganz die Form der ursprünglichen haben, so folgt, dass wenn statt $+ k$,

$-k$ gesetzt wird, blos statt B sein reciproker Werth genommen zu werden braucht.

§. 166.

Die Halbmesser der Meridiane

$$M = \frac{\sqrt{n}}{A.\ sin\,(6 - \lambda)}$$

und der Parallelkreise

$$P = \frac{4B\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{\eta}}{e^{2\eta} - BB}$$

erhalten durch die Einführung der Werthe von $\frac{\sqrt{n}}{A}$ und η folgende Form

$$M = \frac{2h}{k} \cdot \frac{1}{sin\,k\,(g - l)} \cdot$$

$$P = \frac{4Bh}{k} \cdot \frac{t^k}{1 - BB\,t^{2k}} \text{ oder } 180°.$$

Setzt man $g - l = 0$, so wird M unendlich gross, und wenn

$$t^{-2k} = BB.$$

so wird auch P unendlich, und die Werthe von x und y verschwinden beide durch diese Voraussetzungen. Da ein mit unendlich grossem Halbmesser beschriebener Kreis als eine gerade Linie betrachtet werden muss, so folgt, dass alle Oerter deren Länge $= l$, und deren Breite aus der Gleichung

$$t^{-2k} = BB$$

bestimmt werden, auf geraden Linien liegen. Dieser geradlinigte Meridian dient als Axe der x, und der geradlinigte Parallelkreis als Axe der y, und ihren Durchschnittspunkt kann man den Mittelpunkt der Charte nennen. Nimmt man also die geographische Breite dieses Punktes $= p'$, so wird

$$BB = tang.(45 - \tfrac{1}{2}\,p')^{-2k}$$

seyn müssen.

§. 167.

Die Lage der Oerter auf der Charte wird gefunden, indem man $p = +90°$, oder $p = -90°$ annimmt, wo ersterer Werth für den Nordpol, der zweite für den Südpol gilt. Für $p = +90°$, wird $t = 0$, für $t = -90°$, aber ist $t = \infty$, und man findet dadurch, dass für den ersten Werth $x = -\frac{2h}{k}$, für den zweiten $x = +\frac{2h}{k}$, y hingegen für beide Null wird. Um den angegebenen zweiten Werth für x zu erhalten, braucht man nur zuerst Zähler und Nenner der Formel durch t^{2k} zu dividiren, und hierauf $t = \infty$ zu setzen. Der Unterschied der beiden grössten Werthe von x giebt die Länge der zwischen den Polen enthaltenen Abscissenlinie an, und wir wollen diese Länge durch $2L$ bezeichnen, so dass

$$-\frac{2h}{k} = L$$

wird. Man kann durch die beiden Gleichungen

$$h = -\tfrac{1}{2}kL$$

$$BB = tang(45 - \tfrac{1}{2}p')^{-2k}$$

die beiden Constanten h und B bestimmen

§. 168.

Nimmt man noch der Kürze wegen

$$tang(45 - \tfrac{1}{2}p') = t'.$$

so erhält man

$$M = \frac{L}{\sin k\,(l-g)},$$

$$P = 2L.\ \frac{(tt')^k}{t'^{2k} - t^{2k}}.$$

Die Ordinate der Mittelpunkte der Meridiane ergiebt sich aus der (§. 159.) angegebenen Gleichung,

$$y' = \frac{\sqrt{n}}{A}\cot(\lambda - 6)$$

vermittelst der neu eingeführten Bezeichnungen,

$$y' = -L.\ \cot k\,(l-g).$$

Eben so findet sich die Ordinate der Mittelpunkte der Parallelkreise,

$$x'' = \frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{BB + e^{2\eta}}{BB - e^{2\eta}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{A} \cdot \frac{e^{-2\eta} + B^{-2}}{e^{-2\eta} - B^{-2}}$$

folglich auch

$$x'' = - L \frac{t^{2k} + t'^{2k}}{t^{2k} - t'^{2k}}$$

$$= + L \frac{t'^{2k} + t^{2k}}{t'^{2k} - t^{2k}}$$

wodurch für jeden beliebigen Werth von k die Projection verzeichnet werden kann, indem man die Lage der Parallelkreise und der Meridiane, so wie die Grösse ihrer Halbmesser erhält.

§. 169.

Die beiden Coordinaten x und y selbst, finden sich aus den Formeln §. 165. mit Einführung unserer neuen Bezeichnungen

$$x = + L. \frac{t'^{2k} - t^{2k}}{t'^{2k} + 2\cos k(l-g).\, t'^{k}\, t^{k} + t^{2k}}$$

$$y = + 2L. \frac{\sin k(l-g).\, t^{k}\, t'^{k}}{t'^{2k} + 2\cos k(l-g)\, t'^{k}\, t^{k} + t^{2k}}$$

indem man bei der Bestimmung von B aus der quadratischen Gleichung $BB = t^{-2k}$ das negative Vorzeichen nimmt. Das Vergrösserungsverhältniss erhält man

$$m = \frac{2kL}{p \cos p} \cdot \frac{t^{k}\, t'^{k}}{t'^{2k} + 2\cos k(l-g)\, t'^{k}\, t^{k} + t^{2k}},$$

aus der §. 163. angegebenen Formel. Bezeichnet man dasselbe an der Stelle der Charte wo $p = p'$, $l = g$ ist, durch m', so wird

$$m' = \frac{kL}{2\varrho \cos p'}.$$

folglich, wenn man vermittelst dieser Gleichung den Factor $\frac{kL}{p}$ eliminirt,

$$m = m'.\frac{\cos p'}{\cos p}.\frac{4t^k\, t'^k}{t'^{2k} + 2\cos k\,(l-g)\, t'^k\, t^k + t^{2k}}$$

In der Gegend des Nordpols wird $\cos p$ sowohl als t sich der Gränze Null nähern, so dass das Vergrösserungsverhältniss sich in dieser Gegend hauptsächlich durch den Ausdruck $\frac{t^k}{\cos p}$ bestimmt. Man hat nun, $\cos p = 2\sin(45 - \frac{1}{2}p)\cos(45 - \frac{1}{2}p)$: also.

$$\frac{t^k}{\cos p} = \frac{\tang(45 - \frac{1}{2}p)^k}{2\sin(45 - \frac{1}{2}p)\cos(45 - \frac{1}{2}p)}$$
$$= \frac{\tang(45 - \frac{1}{2}p)^{k-1}}{2\cos(45 - \frac{1}{2}p)^2}.$$

und diese Grösse wird für $p = 90°$ immer Null, so lange $k > 1$ ist.

§. 170.

Will man die Aufgabe der Darstellung einer Oberfläche noch weiter ausdehnen, und jede gegebene Oberfläche auf eine andere übertragen können, so dass die erste nicht die eines durch Umdrehung entstandenen Körpers, und letztere nicht eine Ebene ist, so kann man sich, um in diesem Falle die Form der Functionen zu bestimmen, der vom Herrn Hofr. Gaufs in der erwähnten Abhandlung gegebenen Auflösung bedienen.

Es seyen die Coordinaten eines Punktes der ersten Oberfläche x, y, z, die der zweiten X, Y, Z, so werden sich X, Y, Z als Functionen der ersten Coordinaten x, y, z darstellen lassen müssen; da aber die drei Grössen x, y, z durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so sind dieselben von einander nicht unabhängig, allein man kann jede derselben durch Einführung zweier neuen veränderlichen Grössen t, u bestimmen, so dass x, y, z als Functionen von t und u dargestellt werden. Sind z. B.

y, z die Coordinaten der Oberfläche einer Kugel, ren Gleichung durch

$$xx + yy + zz = aa.$$

rgestellt wird, wo a den Halbmesser der Kugel deutet, so hat man

$$x = a \cos t \cos u,$$
$$y = a \sin t \cos u,$$
$$z = a \sin u.$$

› t und u zwei Winkel bedeuten, die man als die ographische Länge und Breite des Punktes ansehen nn. Dass ferner diese drei angenommenen Werthe n x, y, z der angegebenen Relation zwischen x, z für die Kugeloberfläche Genüge leisten, sieht an daraus, dass

$$\cos t^2 . \cos u^2 + \sin t^2 \cos u^2 + \sin u^2 = 1$$

ird, wie die wirkliche Entwickelung zeigt.

§. 171.

Da die drei Coordinaten X, Y, Z von x, y, z hängig sind, und letztere durch t und u ausgedrückt werden, so folgt, dass auch X, Y, Z als inctionen von t und u dargestellt werden können. an wird daher durch Differentiation der sechs Funconen von x, y, z, X, Y, Z, für die Differentiale c, dy, dz, dX, dY, dZ folgende Gleichungen erlten

$$dx = adt + a'du.$$
$$dy = bdt + b'du.$$
$$dz = cdt + c'du.$$

$$dX = Adt + A'du$$
$$dY = Bdt + B'du$$
$$dZ = Cdt + C'du.$$

Die Bedingung, dass die abzubildende Oberfläche er abgebildeten in den unendlich kleinen Theilen hnlich sey, erfordert, dass in beiden Oberflächen wei unendlich kleine Dreiecke einander ähnlich sind, . h. dass zwei von einem Punkte in beiden Flächen usgehende gerade Linien welche die Linearelemente orstellen, einander ähnlich seyn, und zugleich gleich rosse Winkel einschliessen.

§. 172.

Das Linearelement auf der ersten Fläche
durch $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ausgedrückt, das auf
zweiten durch $\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$, oder v
man hierin die in vorigem §. angegebenen W
von dx, dy, dz, dX, dY, dZ substituirt, so e
man

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} =$$
$$\sqrt{\cdot}\left\{\begin{array}{l} + \quad (aa + bb + cc).\, dt^2 \\ + \; 2(aa' + bb' + cc').\, dt\, du \\ + \quad (a'a' + b'b' + c'c).\, du^2 \end{array}\right\}$$

$$\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2} =$$
$$\sqrt{\cdot}\left\{\begin{array}{l} + \quad (AA + BB + CC).\, dt^2 \\ + \; 2(AA' + BB' + CC').\, dt.du \\ + \quad (A'A' + B'B' + C'C').\, du^2 \end{array}\right\}$$

und wenn man die Proportionalität der Linea
mente durch m bezeichnet, so dass

$$\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2} = m\sqrt{dx^2 + dy^2 +}$$

so erhält man

$$\begin{array}{l} [(AA + BB + CC) - mm(aa + bb + cc)]\, dt^2 \\ + 2[(AA' + BB' + CC') - mm(aa' + bb' + cc')]\, dt\, du \\ + [(A'A' + B'B' + C'C') - mm(a'a' + b'b' + c'c')]\, du^2 \end{array}$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von dt
richtig seyn soll, so folgt, dass die Coefficienten
dt^2, $dtdu$, du^2 einzeln Null seyn müssen, d. h.
hat die drei Gleichungen

$$\begin{array}{l} AA + BB + CC = mm(aa + bb + cc \\ AA' + BB' + CC' = mm(aa' + bb' + cc' \\ A'A' + B'B' + C'C' = mm(a'a' + b'b' + c'c' \end{array}$$

§. 173.

Die drei vorigen Gleichungen geben die B
gung der Proportionalität der Linearelemente an,
wir haben nur noch die Gleichheit der Winkel
zudrücken. Man findet leicht aus §. 117. dass
von einem Punkte aus, zwei Linearelemente gez
sind, deren Endpunkte durch die Werthe t u
$t + dt$ und $u + du$, $t + kdt$ und $u + ldu$ besti

werden, der Cosinus des Winkels, den beide mit einander machen, durch

$$\frac{\begin{array}{l}(aa + bb + cc).\, kdt^2 \\ + (a'a' + b'b' + c'c')\, ldt^2. \\ + (aa' + bb' + cc').\, (k + l)\, dt\, du\end{array}}{\sqrt{\left[\begin{array}{l}(aa + bb + cc)\, dt^2 \\ + 2(aa' + bb' + cc')\, dt\, du \\ + (a'a' + b'b' + c'c')\, du^2\end{array}\right]} \cdot \sqrt{\left[\begin{array}{l}(aa + bb + cc).\, kkdt^2 \\ + 2(aa' + bb' + cc').\, kldt\, du \\ + (a'a' + b'b' + c'c').\, ll\, du^2\end{array}\right]}}$$

ausgedrückt wird. Eben so erhält man den Winkel der correspondirenden Elemente in der Darstellung, indem man statt a, b, c, a', b', c', die Grössen A, B, C, A', B', C' setzt, und es ist einleuchtend, dass wenn statt

$$AA + BB + CC,$$
$$AA' + BB' + CC',$$
$$A'A' + B'B' + C'C',$$

in diesem zweiten Werthe des Cosinus, die nach vorigem §. gleichgeltenden Grössen

$$mm(aa + bb + cc),$$
$$mm(aa' + bb' + cc'),$$
$$mm(a'a' + b'b' + c'c')$$

gesetzt werden, beide Ausdrücke ganz identisch seyn müssen. Die drei Gleichungen des vorigen Paragraphs drücken also sowohl die Proportionalität der Linearelemente, als auch die Gleichheit der Winkel aus.

§. 174.

Bezeichnen wir die Differentialgleichung

$$(aa + bb + cc)^2\, dt^2 + 2(aa' + bb + cc).\, dt\, du$$
$$+ (a'a' + b'b' + c'c')\, du^2 = 0$$

durch $\omega = 0$, so lässt dieselbe sich in zwei Factoren, welche eine unmögliche Form haben, zerlegen. Diese Factoren sind nämlich:

$$(aa + bb + cc)\, dt + (aa' + bb'\ cc')\, du$$
$$+ i\sqrt{[aa + bb + cc)\, (a'a' + b'b' + c'c')}$$
$$- (aa' + bb' + cc')^2]\, du = 0, \text{ und}$$

$$(aa + bb + cc)\, dt + (aa' + bb' + cc')\, du$$
$$- i\sqrt{[(aa + bh + cc)\, (a'a' + b'b' + c'c')}$$
$$- (aa' + bb' + cc')^2]\, du = 0.$$

wo die Grösse unter dem Radicalzeichen immer positiv ist, da sie auch durch die Summe dreier Quadrate

$$(ab' - a'b)^2 + (ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2$$

ausgedrückt werden kann. Der Buchstabe i bedeutet wie früher die eingebildete Grösse $\sqrt{-1}$, und jeder einzelne Factor musste gleich Null gesetzt werden.

§. 175.

Es ist bekannt, dass eine Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen sich im Allgemeinen vermittelst eines sogenannten integrirenden Factors integriren lässt. Bezeichnen wir also den integrirenden Factor der ersten durch R, den der zweiten durch R', so wird, wenn das Integral der ersten durch $p + iq =$ Const., das der zweiten durch $p - iq =$ Const. ausgedrückt werden, und man hat

$$(aa + bb + cc)\,dt + (a'a' + b'b' + c'c')\,du$$
$$+ i\sqrt{[(aa + bb + cc)(a'a' + b'b' + c'c')}$$
$$- (aa' + bb' + cc')^2]\,du = \frac{1}{R}(dp + idq).$$
$$(aa + bb + cc)\,dt + (aa' + bb' + cc')\,du$$
$$- i\sqrt{[(aa + bb + cc)(a'a' + b'b' + c'c')}$$
$$- (aa' + bb' + cc')^2]\,du = \frac{1}{R'}.(dp - idq).$$

folglich wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt und bedenkt, dass das vor dem Gleichheitszeichen stehende Product gleich

$$\left[\begin{array}{l}(aa + bb + cc)\,dt^2 \\ + 2(aa' + bb' + cc')\,dt\,du \\ + (a'a' + b'b' + c'c')\,du^2\end{array}\right].(aa + bb + cc)$$
$$= \omega(aa + bb + cc)$$

wird, so erhält man

$$\omega(aa + bb + cc) = \frac{1}{RR'}(dp^2 + dq^2).$$

Setzt man ferner der Kürze wegen

$$RR'(aa + bb + cc) = \frac{1}{n}$$

so kommt die Gleichung

$$\omega = n(dp^2 + dq^2).$$

in welcher n eine endliche Function der veränderlichen u und t seyn muss.

§. 167.

Auf gleiche Weise kann man nun auch die Differentialgleichung

$$(AA + BB + CC)\, dt^2 + 2(AA' + BB' + CC')\, dt\, du + (A'A' + B'B' + C'C')\, du^2 = 0$$

behandeln. Bezeichnet man dieselbe durch $\Omega = 0$, so lassen sich aus derselben zwei Integrale finden, die wir durch $P + iQ =$ Const. und $P - iQ =$ Const. bezeichnen wollen, so dass durch eine gleiche Reihe von Schlüssen wie im vorigen Paragraph, die Gleichung

$$\Omega = N\,(dP^2 + dQ^2)$$

gefunden wird, wo N eine endliche Function von t und u bedeutet. Man sieht nun, dass die Grössen ω, Ω nichts anders als die Ausdrücke $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ angeben, und da vermöge der Bedingung der Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen (§. 172.)

$$m\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

seyn soll, so hat man auch $mm\omega = \Omega$, oder wenn statt ω und Ω ihre Werthe gesetzt werden

$$mmn\,(dp^2 + dq^2) = N(dP^2 + dQ^2) \quad \text{oder}$$

$$\frac{mmn}{N} = \frac{(dP + idQ).\,(dP - idQ)}{(dp + idq).\,(dp - idq)}.$$

§. 177.

Da die vor dem Gleichheitszeichen befindliche Grösse $\frac{mmn}{N}$ eine endliche Function von t und u ist, so folgt, dass in dem hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Bruche, der Zähler durch den Nenner theilbar seyn muss, und dies erfordert, dass entweder

$$dP + idQ = h(dp + idq) \text{ und } (dP - idQ) = h'\,(dp - idq).$$

oder

$$dP + idQ = h''(dp - idq) \text{ und } (dP - idQ) = h'''(dp + idq).$$

Setzt man also $dp + idq = 0$, so wird zugleich $dP + idQ = 0$, folglich sind die Grössen $p + iQ$, $P + iQ$ zu gleicher Zeit constant; die eine muss also eine Function der andern seyn. Dieselben Schlüsse

lassen sich auch auf die andern drei Gleichungen anwenden, so dass man entweder

$$P + iQ = \varphi(p + iq) \text{ und } P - iQ = \psi(p - iq). \quad \text{oder}$$
$$P + iQ = \psi(p - iq) \text{ und } P - iQ = \varphi(p + iq).$$

annehmen muss. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass beide Voraussetzungen gleiche Resultate geben, wovon nur das eine rücksichtlich des Vorzeichens verschieden ist. Ausserdem muss die Function φ mit der Function ψ von einerlei Form seyn, weil beide Grössen $P + iQ$, $P - iQ$, nur durch $+ i$ und $- i$ unterschieden sind, und man wird daher die Aufgabe schon durch die einzige Gleichung

$$P + iQ = \varphi(p + iq).$$

aufgelöst haben, indem man P dem reellen, und iQ dem imaginären Theile der Function gleich setzt.

§. 178.

Wenn man der gebräuchlichen Bezeichnungsart zufolge annimmt, dass die Differentiale

$$d.\ \varphi(p + iq) = \varphi'(p + iq).\ (dp + idq),$$
$$d.\ \psi(p - iq) = \psi'(p - iq).\ (dp - idq),$$

so erhält man, da wir vorher setzten

$$P + iQ = \varphi(p + iq)$$
$$P - iQ = \psi(p - iq).$$

die beiden Gleichungen

$$dP + idQ = \varphi'(p + iq).\ (dp + idq)$$
$$dP - idQ = \psi'(p - iq).\ (dp - idp).$$

und hieraus

$$\frac{(dP + idQ).\ (dP - idQ)}{(dp + idq).\ (dp - idq)} = \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq)$$

also nach §. 176.

$$\frac{mmn}{N} = \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq).$$

Nun ist ferner

$$\Omega = N\,(dP^2 + dQ^2), \quad \omega = n\,(dp^2 + dq^2)$$

folglich wenn die erste Gleichung durch die zweite dividirt wird

$$\frac{N}{n} = \frac{\Omega}{\omega}.\ \frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2}$$

und wenn man diese Werthe in der vorigen Gleichung

$$mm = \frac{N}{n}\, \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq).$$

substituirt, so erhält man

$$m = \sqrt{\left[\frac{\Omega}{\omega}.\ \frac{dR^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2}.\ \varphi'(p+iq).\ \psi'(p-iq)\right]}.$$

wodurch das Vergrösserungsverhältniss gefunden ist.

§. 179.

Um von der Anwendung dieser Methode einige Beispiele zu haben, wollen wir das abgeplattete Sphäroïd, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, betrachten, und dessen Darstellung auf einer Ebene und auf der Kugel untersuchen. Bezeichnet man die grosse Axe der Ellipse durch $2a$, die kleine durch $2b$, legt den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Ellipse, und rechnet die Ordinate z auf der Umdrehungsaxe, so ist bekanntlich die Gleichung dieses Sphäroïds

$$aa\, zz + bb\,(xx + yy) = aa\, bb$$

und man wird die drei Coordinaten x, y, z so bestimmen können, dass

$$x = a \cos t.\ \cos u,\quad y = a \sin t\ \cos u,\quad z = b \sin u$$

wird. Differentiirt man diese drei Gleichungen um vermittelst der Differentiale das Linearelement ausdrücken zu können, so erhält man

$$dx = a\,(-\sin t\ \cos u.\ dt - \cos t\ \sin u.\ du)$$
$$dy = a\,(+\cos t\ \cos u.\ dt - \sin t\ \sin u.\ du)$$
$$dz = b.\ \cos u.\ du$$

und man findet hieraus $\omega = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

$$= aa \cos u^2\ dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2)\ du^2.$$

Setzt man dies Null und lösst die quadratische Gleichung auf, so kommt

$$dt = i\, \frac{\sqrt{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}}{a.\ \cos u}.\ du.$$

dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos u$, so wird

$$a\ dt = i\ du \sqrt{aa\ \mathrm{tang}\, u^2 + bb}$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man $a\ \mathrm{tang}\, u = b\ \mathrm{tang}\, v$, so wird

$$\sqrt{(aa\ \mathrm{tang}\, u^2 + bb)} = \frac{b}{\cos v}$$

lassen sich auch auf die andern drei Gleichungen anwenden, so dass man entweder

$P + iQ = \varphi(p + iq)$ und $P - iQ = \psi(p - iq)$. oder

$P + iQ = \psi(p - iq)$ und $P - iQ = \varphi(p + iq)$.

annehmen muss. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass beide Voraussetzungen gleiche Resultate geben, woron nur das eine rücksichtlich des Vorzeichens verschieden ist. Ausserdem muss die Function φ mit der Function ψ von einerlei Form seyn, weil beide Grössen $P + iQ$, $P - iQ$, nur durch $+ i$ und $- i$ unterschieden sind, und man wird daher die Aufgabe schon durch die einzige Gleichung

$$P + iQ = \varphi(p + iq).$$

aufgelöst haben, indem man P dem reellen, und iQ dem imaginären Theile der Function gleich setzt.

§. 178.

Wenn man der gebräuchlichen Bezeichnungsart zufolge annimmt, dass die Differentiale

$$d.\ \varphi(p + iq) = \varphi'(p + iq).\ (dp + idq),$$
$$d.\ \psi(p - iq) = \psi'(p - iq).\ (dp - idq),$$

so erhält man, da wir vorher setzten

$$P + iQ = \varphi(p + iq)$$
$$P - iQ = \psi(p - iq).$$

die beiden Gleichungen

$$dP + idQ = \varphi'(p + iq).\ (dp + idq)$$
$$dP - idQ = \psi'(p - iq).\ (dp - idp).$$

und hieraus

$$\frac{(dP + idQ).\ (dP - idQ)}{(dp + idq).\ (dp - idq)} = \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq).$$

also nach §. 176.

$$\frac{mmn}{N} = \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq).$$

Nun ist ferner

$$\Omega = N\ (dP^2 + dQ^2),\quad \omega = n\ (dp^2 + dq^2)$$

folglich wenn die erste Gleichung durch die zweite dividirt wird

$$\frac{N}{n} = \frac{\Omega}{\omega}.\ \frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2}$$

und wenn man diese Werthe in der vorigen Gleichung

$$mm = \frac{N}{n} \varphi'(p + iq) . \psi'(p - iq).$$

substituirt, so erhält man

$$m = \sqrt{\left[\frac{\Omega}{\omega} . \frac{dR^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2} . \varphi'(p+iq) . \psi'(p-iq)\right]}.$$

wodurch das Vergrösserungsverhältniss gefunden ist.

§. 179.

Um von der Anwendung dieser Methode einige Beispiele zu haben, wollen wir das abgeplattete Sphäroïd, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, betrachten, und dessen Darstellung auf einer Ebene und auf der Kugel untersuchen. Bezeichnet man die grosse Axe der Ellipse durch $2a$, die kleine durch $2b$, legt den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Ellipse, und rechnet die Ordinate z auf der Umdrehungsaxe, so ist bekanntlich die Gleichung dieses Sphäroïds

$$aa\, zz + bb\,(xx + yy) = aa\, bb$$

und man wird die drei Coordinaten x, y, z so bestimmen können, dass

$$x = a \cos t . \cos u, \quad y = a \sin t \cos u, \quad z = b \sin u$$

wird. Differentiirt man diese drei Gleichungen um vermittelst der Differentiale das Linearelement ausdrücken zu können, so erhält man

$$dx = a(- \sin t \cos u . dt - \cos t \sin u . du)$$
$$dy = a(+ \cos t \cos u . dt - \sin t \sin u . du)$$
$$dz = b . \cos u . du$$

und man findet hieraus $\omega = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

$$= aa \cos u^2\, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2)\, du^2.$$

Setzt man dies Null und lösst die quadratische Gleichung auf, so kommt

$$dt = i \frac{\sqrt{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}}{a . \cos u} . du.$$

dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos u$, so wird

$$a\, dt = i\, du \sqrt{aa \tan u^2 + bb}$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man $a \tan u = b \tan v$, so wird

$$\sqrt{(aa \tan u^2 + bb)} = \frac{b}{\cos v}$$

$$X \pm iY = kt \pm ki \log \left[tg(45 + \tfrac{1}{2} v) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right]$$

folglich wenn man sowohl die reellen als die imaginären Theile einander gleich nimmt,

$$X = kt, \quad Y = k \log tg(45 + \tfrac{1}{2} v) - \frac{k\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}.$$

Setzt man hierin $\varepsilon = 0$, so verwandelt sich das elliptische Sphäroïd in eine Kugel, und die Bestimmungen

$$X = kt, \quad Y = k \log tang(45 + \tfrac{1}{2} v)$$

geben die Mercator'sche Projectionsart.

§. 181.

Eine andere sehr brauchbare Darstellungsart erhält man, indem man für die Form der Function eine imaginäre Exponentialfunction wählt, und $\varphi(w) = k. e^{iw\lambda}$ setzt, wo k und λ zwei willkührliche constante Grössen bedeuten. Dann wird

$$X + iY = k. e^{i\lambda t}. tang(45 - \tfrac{1}{2} v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v} \right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

und da bekanntlich $e^{i\lambda t} = \cos \lambda t + i \sin \lambda t$, so ist auch

$$X + iY = k \cos \lambda t. \, tang(45 - \tfrac{1}{2} v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v} \right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$
$$+ ik \sin \lambda t. \, tang(45 - \tfrac{1}{2} v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v} \right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

folglich erhält man für X und Y die Gleichungen

$$X = k. \cos \lambda t. \, tang(45 - \tfrac{1}{2} v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v} \right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

$$Y = k. \sin \lambda t. \, tang(45 - \tfrac{1}{2} v)^{\lambda} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v} \right)^{\frac{\varepsilon\lambda}{2}}$$

und wenn man $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ setzt, so giebt diese Darstellung die stereographische Projectionsart.

§. 182.

Setzt man in der Gleichung $aa\,zz + bb\,(xx+yy) = aa\,bb$, $y = 0$, so erhält man $aa\,zz + bb\,xx = aa\,bb$, welches die Gleichung des ersten Meridians ist. Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$aa\,zdz + bb\,xdx = 0,\ \frac{dz}{dx} = -\frac{bb}{aa}\cdot\frac{x}{2}$$

oder wenn man hierin statt z seinen Werth

$$\frac{b}{a}\sqrt{aa - xx}$$

substituirt, so kommt

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{aa - xx}}.$$

Nun ist bekanntlich $\frac{dz}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Axe der Abscissen macht, und wenn wir dieses auf die Erde anwenden, so wird $\frac{dz}{dx}$ die Tangente des Complements der Polhöhe angeben. Es ist aber, indem $y = 0$ gesetzt wird, auch $a \sin t \cos u = 0$, folglich $t = 0$, und hieraus wird $x = a \cos u$, $\sqrt{aa - xx} = a \sin u$, also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, welches man wegen der Wurzelausziehung auch verändern kann, $\frac{dz}{dx} = \frac{b}{a} \cot u$. Vergleicht man diesen Ausdruck mit $a \tang u = b \tang v$ (§. 179.), so hat man $\cot v = \frac{dz}{dx}$, folglich ist v die Polhöhe des Ortes.

§. 183.

Ist das Sphäroïd dadurch entstanden, dass die Ellipse sich um die grosse Axe drehte, so muss man $b > a$ annehmen, da die Axe um welche die Drehung geschieht, durch b bezeichnet wird. Wir setzten

$aa(1 - \varepsilon\varepsilon) = bb$, also $\varepsilon\varepsilon = \frac{aa - bb}{aa}$, und man sieht, dass in diesem Falle $\varepsilon\varepsilon$ negativ, also ε selbst imaginär wird. Um unter diesen Umständen die Darstellung in der Ebene zu finden, setze man $\varepsilon = i\varepsilon'$, so verwandelt sich der Bruch $\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ in $\left(\frac{1 - i\varepsilon' \sin v}{1 + i\varepsilon' \sin v}\right)^{\frac{i\varepsilon'}{2}}$. Hiervon muss der Logarithme genommen werden, wie der Ausdruck der Function §. 179. zeigt, und man hat

$$\log \left(\frac{1 - i\varepsilon' \sin v}{1 + i\varepsilon' \sin v}\right)^{\frac{i\varepsilon'}{2}} = - \frac{i\varepsilon'}{2} \log \left(\frac{1 + i\varepsilon \sin v}{1 - i\varepsilon' \sin v}\right).$$

Nun ist aus der Theorie der imaginären Grössen bekannt, dass wenn ζ einen Winkel bedeutet

$$2\zeta i = \log \left(\frac{1 + i \operatorname{tang} \zeta}{1 - i \operatorname{tang} \zeta}\right)$$

seyn muss. Nimmt man daher $\operatorname{tang} \zeta = \varepsilon' \sin v$, so wird $\zeta = Arc(\operatorname{tang} = \varepsilon' \sin v)$, folglich

$$\log \left(\frac{1 - i\varepsilon' \sin v}{1 + i\varepsilon' \sin v}\right)^{\frac{i\varepsilon}{2}} = + \varepsilon' Arc(\operatorname{tang} = \varepsilon' \sin v).$$

und wenn man diesen Ausdruck in die für das abgeplattete Sphäroïd gefundene Formel substituirt, so erhält man die Gleichung für die Darstellung des verlängerten Sphäroïds

$$X \pm i.Y = \varphi\,[t \pm i\,[\log \operatorname{tang}(45 + \tfrac{1}{2} v) + \varepsilon' Arc(\operatorname{tang} = \varepsilon' \sin v)]].$$

§. 184.

Die Abbildung des abgeplatteten elliptischen Sphäroïds auf der Kugel lässt sich folgendermassen ausführen. Man bezeichne die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche der Kugel durch X, Y, Z, ihren Halbmesser durch A, so ist bekanntlich die Gleichung der Kugel $XX + YY + ZZ = AA$. Führt man statt der drei mit einander verbundenen veränderlichen X, Y, Z, zwei von einander unabhängige T und U ein, so dass

$X = A.\cos T.\cos U,\quad Y = A.\sin T.\cos U,\quad Z = A.\sin U,$ wird, so geschieht der Gleichung der Kugeloberfläche Genüge, und man hat indem diese Gleichungen differentiirt werden

$$dX = A.(-\sin T.\ \cos U.\ dT - \cos T.\ \sin U.\ dU)$$
$$dY = A.(+\sin T.\ \cos U.\ dT - \sin T.\ \sin U.\ dU)$$
$$dZ = A.\ \cos U.\ dU.$$

folglich $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \Omega = AA \cos U^2\, dT^2 + AA.\ dU^2$. Setzt man dies Null, so kommt

$$\cos U.\ dT \pm i.\ dU = 0 \text{ oder } dT \pm i \frac{dU}{\cos U} = 0.$$

Hiervon ist das Integral $T \pm i \log.\ tang(45 + \frac{1}{2} U) = Const.$ Setzt man dies der für das Ellipsoïd gefundenen Function (§. 179.) gleich, so erhält man für die Darstellung des Ellipsoïds auf der Kugel

$$T \pm i \log.\ tang(45 + \tfrac{1}{2} U)$$
$$= \varphi\left[t \pm i \log\left[tang(45 + \tfrac{1}{2} v)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right]$$

und bei jeder willkührlichen Annahme der Function muss man T dem reellen und $i \log tang(45 + \frac{1}{2} U)$ dem imaginären Theile gleich setzen.

§. 185.

Wir wollen als Beispiel der allgemeinen Function eine besondere Form beilegen, so dass wir $\varphi w = w \pm i \log k$ setzen, wo k eine willkührliche Constante bedeutet. Man hat dann

$$T \pm i \log tang(45 + \tfrac{1}{2} U)$$
$$= t \pm i \log\left[k\ tang(45 + \tfrac{1}{2} v)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right].$$

Hieraus ergeben sich zur Bestimmung von T und U die Gleichungen

$$T = t,\quad tang(45 + \tfrac{1}{2} U)$$
$$= k\ tang(45 + \tfrac{1}{2} v)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Um das Vergrösserungsverhältniss m zu bestimmen, hat man aus §. 178.

$$m = \sqrt{\left[\frac{\Omega}{\omega}.\ \frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2}.\ \varphi'(p + iq).\ \psi'(p - iq)\right]}.$$

wo die Formen φ', ψ' gleichgeltend sind. Nun war ferner

$$\omega = aa\cos u^2\, dt + (aa\sin u^2 + bb\cos u^2)du^2$$
$$\Omega = AA\cos U^2 . dT^2 + AA.\, dU^2$$

$$dp \pm idq = dt \pm i\,\frac{\sqrt{aa\sin u^2 + bb\cos u^2}}{a\cos u}\,du.$$

$$dP \pm idQ = dT \pm i\,\frac{dU}{\cos U}.$$

$$dp^2 + dq^2 = dt^2 + \frac{aa\sin u^2 + bb\cos u^2}{aa\cos u^2}\,du^2$$

$$dP^2 + dQ^2 = dT^2 + \frac{dU^2}{\cos u^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die Factoren, die sich aufheben, weglässt

$$\frac{\Omega}{\omega}.\ \frac{dp^2 + dq^2}{dP^2 + dQ^2} = \frac{AA.\ \cos u^2}{aa.\ \cos u^2}.$$

Ferner war $\varphi w = w + i\log k$, also $\varphi' w = 1 = \psi' w$, und man findet $m = \dfrac{A\cos U}{a\cos u}$. Ausserdem hatten wir $a\,tang\,u = b\,tang\,v$, und da $b = a\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}$, so wird $tang\,u = tang\,v\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}$,

$$1 + tang\,u^2 = \frac{1}{\cos v^2} - \varepsilon\varepsilon\,tang\,v^2$$

folglich $$\cos u = \frac{\cos v}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\sin v^2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für m, so wird

$$m = \frac{A}{a}.\ \frac{\cos U}{\cos v}.\ \sqrt{1-\varepsilon\varepsilon.\ \sin v^2}$$

Wir müssen nun noch $\cos U$ durch v ausdrücken; hierzu nehme man die Gleichung

$$tang(45 + \tfrac{1}{2}U) = k\,tang(45 + \tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

quadrire dieselbe, addire auf beiden Seiten die Einheit, so kommt

$$\frac{1}{\cos(45+\frac{1}{2}U)^2} = 1 + kk\,tang(45+\tfrac{1}{2}v)^2 \left(\frac{1-\varepsilon\,sin\,v}{1+\varepsilon\,sin\,v}\right)^\varepsilon.$$

Nun weiss man aber, dass $\cos(45+\frac{1}{2}U)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,sin\,U$, folglich erhält man

$$\frac{2}{1-sin\,U} = 1 + kk\,tang(45+\tfrac{1}{2}v)^2 \left(\frac{1-\varepsilon\,sin\,v}{1+\varepsilon\,sin\,v}\right)^\varepsilon$$

$$sin\,U = \frac{kk.\,tang(45+\frac{1}{2}v)^4 \left(\frac{1-\varepsilon\,sin\,v}{1+\varepsilon\,sin\,v}\right)^\varepsilon - 1.}{kk\,tang(45+\frac{1}{2}v)^2 \left(\frac{1-\varepsilon\,sin\,v}{1+\varepsilon\,sin\,v}\right)^\varepsilon + 1.}$$

Aus dieser Gleichung findet man leicht

$$cos\,U = \frac{k\,cos\,v\,(1-\varepsilon\varepsilon\,sin\,v^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{kk\,sin(45+\frac{1}{2}v)^2(1-\varepsilon\,sin\,v)^\varepsilon + cos(45+\frac{1}{2}v)^2(1+\varepsilon\,sin\,v)^\varepsilon}$$

$$m = \frac{A}{a}.\ \frac{k.(1-\varepsilon\varepsilon\,sin\,v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{kk\,sin(45+\frac{1}{2}v)^2(1-\varepsilon\,sin\,v)^\varepsilon + cos(45+\frac{1}{2}v)^2(1+\varepsilon\,sin\,v)^\varepsilon}$$

§. 186.

Vermittelst dieses Vergrösserungsverhältnisses kann man für die Darstellung eines nicht zu grossen Theils des elliptischen Sphäroïds auf der Kugel, einen passenden Werth von k auffinden, so dass bei Anwendung desselben die Darstellung sich der vollkommnern Aehnlichkeit nähert. Dies wird der Fall seyn, wenn das Vergrösserungsverhältniss m für die kleinste und die grösste Breite v des auf dem Sphäroïd befindlichen, abzubildenden Theils der Oberfläche gleiche Werthe erhält. Man hat dann, indem die kleinste Breite durch v', die grösste durch v'' bezeichnet wird, zur Bestimmung von k die Gleichung

$$\frac{kk\,sin(45+\frac{1}{2}v')^2\,(1-\varepsilon\,sin\,v')^\varepsilon + cos(45+\frac{1}{2}v')^2\,(1+\varepsilon\,sin\,v')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\,sin\,v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}.}$$

$$= \frac{kk.\, sin(45 + \tfrac{1}{2} v'')^2 (1 - \varepsilon\, sin\, v'')^\varepsilon + cos(45 + \tfrac{1}{2} v'')^2 (1 + \varepsilon\, sin\, v'')^\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon\, sin\, v''^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}},$$

also

$$k = \sqrt{\frac{\dfrac{cos(45+\tfrac{1}{2}v')^2\,(1+\varepsilon\, sin\, v')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} - \dfrac{cos(45+\tfrac{1}{2}v'')^2\,(1+\varepsilon\, sin\, v'')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v''^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}}{\dfrac{sin(45+\tfrac{1}{2}v'')^2(1-\varepsilon\, sin\, v'')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v''^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} - \dfrac{sin(45+\tfrac{1}{2}v')^2(1-\varepsilon\, sin\, v')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}}}$$

wodurch das passendste Vergrösserungsverhältniss gefunden ist.

§. 187.

Die Gleichung

$$m = \frac{A}{a} \cdot \frac{cos\, U}{cos\, v} \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2}$$

giebt, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt

$$log\, m = log \frac{A}{a} + log\, cos\, U - log.\, cos\, v$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, log(1 - \varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2).$$

Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$\frac{dm}{m} = -\, tg\, U.\, dU + tg\, v.\, dv - \varepsilon\varepsilon \frac{sin\, v.\ cos\, v}{1 - \varepsilon\varepsilon\ sin\, v^2}.$$

Man hat ferner aus (§. 185.)

$$tang(45 + \tfrac{1}{2}\, U) = k.\ tang(45 + \tfrac{1}{2}\, v) \left(\frac{1 - \varepsilon\ sin\, v}{1 + \varepsilon\ sin\, v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

also wenn man die Logarithmen nimmt und dann differentiirt

$$\frac{dU}{cos\, U} = \frac{dv}{cos\, v} - \frac{\varepsilon\varepsilon\ cos\, v.\ dv.}{1 - \varepsilon\varepsilon\ sin\, v^2}.$$

Vermittelst dieses Werthes wird die vorige Gleichung für $\frac{dm}{m}$, in diese verwandelt

$$\frac{dm}{m} = -\sin U.\frac{dv}{\cos v} + \sin U.\frac{\varepsilon\varepsilon \cos v}{1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2}$$

$$+ \sin v.\frac{dv}{\cos v} - \sin v.\frac{\varepsilon\varepsilon \cos v\, dv}{1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2}$$

$$= \frac{dv}{\cos v}(\sin v - \sin U) - \frac{\varepsilon\varepsilon \cos v.dv}{1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2}(\sin v - \sin U)$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\, dv}{\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2)}(\sin v - \sin U).$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Differentialcoefficient $\frac{dm}{dv}$ dann Null wird, wenn $\sin v - \sin U = 0$, oder $U = v$ wird. Für diesen Werth wird daher m ein Minimum oder ein Maximum. Setzt man in diesem Falle $v = V$, also $U = V$, so giebt die Gleichung

$$\operatorname{tang}(45 + \tfrac{1}{2}U) = k.\operatorname{tang}(45 + \tfrac{1}{2}v)\left(\frac{1-\varepsilon \sin v}{1+\varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$k = \left(\frac{1+\varepsilon \sin V}{1-\varepsilon \sin V}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\sin V = \frac{k^{\frac{2}{\varepsilon}} - 1}{k^{\frac{2}{\varepsilon}} + 1}.\frac{1}{\varepsilon}.$$

§. 188.

Um zu entscheiden, ob bei diesem Werthe von v das Vergrösserungsverhältniss ein Maximum oder ein Minimum wird, muss man die Gleichung

$$\frac{dm}{m} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\, dv}{\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2)}(\sin v - \sin U)$$

noch einmal differentiiren, und im Differential $v = V$, $U = V$ setzen. Man erhält daher

$$\frac{ddm}{mdv^2} - \left(\frac{dm}{mdv}\right)^2$$

$$= \left(\cos v - \cos U.\frac{dU}{dv}\right)\frac{1-\varepsilon\varepsilon}{\cos v\,(1-\varepsilon\varepsilon \sin v^2)}$$

$$+ (1 - ee)(\sin v - \sin U) \frac{1 - ee \sin v^2 + 2 \cos v^2}{\cos v^2 (1 - ee \sin v^2)} \sin v.$$

Setzt man hierin $v = U = V$, so wird $\sin v - \sin U = 0$, und $\frac{dm}{dv} = 0$, also bleibt blos

$$\frac{ddm}{mdv^2} = \left(1 - \frac{dU}{dv}\right) \cdot \frac{1 - ee}{\cos V (1 - ee \sin V^2)}$$

Die Gleichung im vorigen Paragraph

$$\frac{dU}{\cos U} = \frac{dv}{\cos v} - \frac{ee \cos v . dv}{1 - ee \sin v^2},$$

giebt unter denselben Bedingungen, dass $v = U = V$ seyn soll

$$\frac{dU}{dv} = 1 - \frac{ee \cos V^2}{1 - ee \sin V^2}$$

also wenn man diesen Werth in die Formel für ddm substituirt

$$\frac{ddm}{dv^2} = \frac{m (1 - ee)\, ee \cos V}{(1 - ee \sin V^2)^2}.$$

Da dieser Ausdruck immer positiv ist, so folgt, dass m für den Werth $v = V$ ein Minimum seyn muss.

§. 189.

Substituirt man den vorhin gefundenen Werth von

$$k = \left(\frac{1 + e \sin V}{1 - e \sin V}\right)^{\frac{e}{2}}, \text{ in die Gleichung}$$

$$m = \frac{A}{a} \cdot \frac{k . (1 - ee \sin v^2)^{\frac{1+e}{2}}}{kk \sin(45 + \tfrac{1}{2} v)^2 (1 - e \sin v)^e + \cos(45 + \tfrac{1}{2} v)^2 (1 + e \sin v)^e}$$

indem man zugleich $v = V$ setzt, so erhält man den wirklich kleinsten Werth von m,

$$m = \frac{A}{a} . \sqrt{1 - ee \sin V^2},$$

so dass wenn man den Halbmesser der Kugel $= a (1 - ee \sin V^2)^{-\frac{1}{2}}$ nimmt, so wird die Darstellung des Sphäroïds auf der Kugel, in der Breite V der wirklichen Oberfläche gleich seyn.

§. 190.

Will man die in den vorigen Paragraphen über die Darstellung des elliptischen Sphäroïds auf der Kugel angestellten Berechnungen auf die Erde anwenden, indem man dieselbe als ein solches Sphäroïd betrachtet, so thut man am besten, wenn man alle Ausdrücke in Reihen verwandelt, die nach den Potenzen von ε fortschreiten. Diese Reihen werden sehr schnell convergiren, da ε bei der Erde eine sehr kleine Grösse ist, so dass man alle Potenzen von ε, welche die vierte übersteigen, ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Zu diesem Ende suche man die Entwickelung des Bruches

$$\frac{(1+\varepsilon\, sin\, v)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} = \mu.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man

$$\varepsilon\, log(1+\varepsilon\, sin\, v) - \frac{1+\varepsilon}{2}\, log(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2) = log\, \mu.$$

$$\varepsilon\, log(1+\varepsilon\, sin\, v) = \varepsilon\varepsilon\, sin\, v - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3\, sin\, v^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^4\, sin\, v^3,$$

$$\frac{1+\varepsilon}{2}\, log(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2) = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3\, sin\, v^2$$
$$- \tfrac{1}{4}\varepsilon^4\, sin\, v^4,$$

und hieraus ergiebt sich

$$log\, \mu = \varepsilon\varepsilon(sin\, v + \tfrac{1}{2} sin\, v^2) + \varepsilon^4(\tfrac{1}{3} sin\, v^3 + \tfrac{1}{4} sin\, v^4).$$

Nun ist aber vermittelst der bekannten Exponentialausdrücke

$$\mu = 1 + log\, \mu + \tfrac{1}{2}\, log\, \mu^2$$

also wenn man hierin den Werth von $log\, \mu$ substituirt

$$\mu = 1 + \varepsilon\varepsilon(sin\, v + \tfrac{1}{2} sin\, v^2) + \varepsilon^4(\tfrac{1}{2} sin\, v^2 + \tfrac{5}{6} sin\, v^3$$
$$+ \tfrac{3}{8} sin\, v^4).$$

Hieraus findet sich leicht der Werth des andern in den frühern Ausdrücken vorkommenden Bruches

$$\frac{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

der, wie man leicht sieht aus dem vorigen dadurch entsteht, dass man an die Stelle von $+ sin\, v$, $- sin\, v$ setzt, so dass seine Entwickelung durch

$$1 - \varepsilon\varepsilon(\sin v - \tfrac{1}{2}\sin v^2) + \varepsilon^4(\tfrac{1}{2}\sin v^2 - \tfrac{5}{6}\sin v^3 + \tfrac{3}{8}\sin v^4)$$

dargestellt wird.

§. 191.

Man erhält daher, wenn statt $\cos(45 + \frac{1}{2}v)^2$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin v$ gesetzt wird

$$\frac{\cos(45 + \frac{1}{2}v')^2\,(1 + \varepsilon\sin v')^\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon\sin v^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} =$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin v' + \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(\sin v' - \tfrac{1}{2}\sin v'^2 - \tfrac{1}{2}\sin v'^3) + \tfrac{1}{4}\varepsilon^4(\sin v^2 + \tfrac{2}{3}\sin v'^3 - \tfrac{11}{12}\sin v'^4 - \tfrac{3}{4}\sin v'^5)$$

$$\frac{\cos(45 + \frac{1}{2}v'')^2\,(1 + \varepsilon\sin v'')^\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} =$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin v'' + \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(\sin v' - \tfrac{1}{2}\sin v''^2 - \tfrac{1}{2}\sin v''^3) + \tfrac{1}{4}\varepsilon^4(\sin v''^2 + \tfrac{2}{3}\sin v''^3 - \tfrac{11}{12}\sin v''^4 - \tfrac{3}{4}\sin v''^5).$$

Zieht man den letztern Ausdruck vom ersten ab, so erhält man den Zähler des Bruches welcher k (§. 186.) ausdrückt, und wenn man zugleich vermittelst der identischen Gleichungen

$$\sin v''^2 - \sin v'^2 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v'' + \sin v')$$

$$\sin v''^3 - \sin v'^3 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^2 + \sin v''\sin v' + \sin v^2).$$

$$\sin v''^4 - \sin v'^4 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^3 + \sin v''^2\sin v' + \sin v''\sin v'^2 + \sin v'^3)$$

$$\sin v''^5 - \sin v'^5 = (\sin v'' - \sin v')(\sin v''^4 + \sin v''^3\sin v' + \sin v''^2\sin v'^2 + \sin v''\sin v'^3 + \sin v'^4)$$

die gehörigen Reductionen anbringt, so kommt

$$\frac{\cos(45 + \frac{1}{2}v')^2\,(1 + \varepsilon\sin v')^\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon\sin v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} - \frac{\cos(45 + \frac{1}{2}v'')^2\,(1 + \varepsilon\sin v'')^\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon\sin v''^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sin v'' - \sin v') - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(\sin v'' - \sin v')[1 - \tfrac{1}{2}(\sin v'' + \sin v') - \tfrac{1}{2}(\sin v''^2 + \sin v''\sin v' + \sin v'^2)]$$

$$-\tfrac{1}{4}\varepsilon^4(\sin v''-\sin v')\left[\begin{array}{l}(\sin v''+\sin v')\\ +\tfrac{2}{3}(\sin v''^2+\sin v''\sin v'\\ \quad+\sin v'^2)\\ -\tfrac{11}{12}(\sin v''^3+\sin v''^2\sin v'\\ \quad+\sin v''\sin v'^2+\sin v'^3)\\ -\tfrac{3}{4}(\sin v''^4+\sin v''^2\sin v'\\ \quad+\sin v''^2\sin v'^2+\sin v''\\ \quad\sin v'^3+\sin v'^4)\end{array}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sin v''-\sin v')(1-\varepsilon\varepsilon(1-\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)$$
$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha+\tfrac{2}{3}\beta-\tfrac{11}{12}\gamma-\tfrac{3}{4}\delta))$$

indem man der Kürze wegen

$$\sin v''+\sin v'=\alpha$$
$$\sin v''^2+\sin v''\sin v'+\sin v'^2=\beta$$
$$\sin v''^3+\sin v''^2\sin v'+\sin v''\sin v'^2+\sin v'^3=\gamma$$
$$\sin v''^4+\sin v''^3\sin v'+\sin v''^2\sin v'^2+\sin v''\sin v'^2+\sin v'^4=\delta$$

setzt. Den Nenner des Bruches, welcher k angiebt, findet man ohne weitere Rechnungen aus dem Zähler indem man $\sin v''$ und $\sin v'$ in dem vorigen Ausdrucke negativ nimmt, und dem ganzen das entgegengesetzte Vorzeichen giebt; man muss daher statt α, γ die entgegengesetzten $-\alpha$, $-\gamma$ nehmen, so dass

$$\frac{\sin(45+\frac{1}{2}v'')^2(1-\varepsilon\sin v'')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'')^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}-\frac{\sin(45+\frac{1}{2}v')^2(1-\varepsilon\sin v')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin v'^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$
$$=\tfrac{1}{2}(\sin v''-\sin v')(1-\varepsilon\varepsilon(1+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)$$
$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha-\tfrac{2}{3}\beta-\tfrac{11}{12}\gamma+\tfrac{3}{4}\delta))$$

folglich wird endlich

$$k=\sqrt{\frac{1-\varepsilon\varepsilon(1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta)-\frac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha+\frac{2}{3}\beta-\frac{11}{12}\gamma-\frac{3}{4}\delta)}{1-\varepsilon\varepsilon(1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta)+\frac{1}{2}\varepsilon^4(\alpha-\frac{2}{3}\beta-\frac{11}{12}\gamma+\frac{3}{4}\delta)}}.$$

§. 192.

Vermittelst der Logarithmen lässt sich k noch leichter berechnen; man findet nämlich nach den gehörigen Reductionen

$$2\log k=\alpha\varepsilon\varepsilon-(\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{11}{12}\gamma)\varepsilon^4.$$

oder da, wie man leicht sieht $\gamma=\alpha(\sin v'^2+\sin v''^2)$, so wird auch

$$\log k=\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(\sin v''+\sin v')[1-\varepsilon\varepsilon(\tfrac{1}{2}-\tfrac{11}{12}(\sin v'^2+\sin v''^2)].$$

Es ist aber auch

$$\sin v'' + \sin v' = 2 \sin \frac{v'' + v'}{2} . \cos \frac{v'' - v'}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{12} (\sin v'^2 + \sin v''^2) = - \tfrac{5}{12} + \tfrac{11}{12} \cos(v'' + v') \cos(v'' - v')$$

folglich, wenn man diese Werthe in obige Gleichung substituirt

$$\log k = \varepsilon\varepsilon \sin \frac{v'' + v'}{2} . \cos \frac{v'' - v'}{2}$$

$$\left[1 - \frac{\varepsilon\varepsilon}{12} (11 \cos(v'' + v') \cos(v'' - v') - 5)\right].$$

Nachdem man aus dieser Formel k gefunden hat, ergiebt sich U aus der Gleichung

$$\log tang(45 + \tfrac{1}{2} U) = \log k + \log tang(45 + \tfrac{1}{2} v)$$
$$- \varepsilon\varepsilon \sin v \, (1 + \tfrac{1}{3} \varepsilon\varepsilon \sin v^2).$$

Es ist zu bemerken, dass bei den hier vorkommenden Logarithmen immer die hyperbolischen zu verstehen sind. Bei der Anwendung dieser Formeln auf die Darstellung der Erdoberfläche, muss $\varepsilon\varepsilon = 0{,}0066915$ gesetzt werden.

§. 193.

Wir wollen als ein hierher gehöriges Beispiel $v' = 45°$, $v'' = 55°$ setzen, so erhält man nach vorigem §. den Werth von k durch die Formel

$$hyp. \log k = \varepsilon\varepsilon \sin 50° . \cos 5° \left[1 + \frac{\varepsilon\varepsilon}{24} (11 \sin 20° + 5)\right]$$

folglich wenn man die Rechnung wirklich ausführt

$$\log 11 = 1.0413927$$
$$\sin 20° = 9.5340517$$
$$\overline{0.5754444.}$$

Hierzu gehört die Zahl 3,762222, also

$$\log(11 \sin 20° + 5) = 0.9426143$$
$$\log \varepsilon\varepsilon = 7.8255235$$
$$\text{Compl.} \log 24 = 8.6197888$$
$$\overline{7.3879256} = 0{,}0024430.$$

$$\log\left(1+\frac{\varepsilon\varepsilon}{24}(11 \sin 20^\circ+5)\right) = 0.0010597$$

$$\begin{aligned} \log \varepsilon\varepsilon &= 7.8255235 \\ \sin 50^\circ &= 9.8842540 \\ \cos 5^\circ &= 9.9983442 \\ \hline & \ 7.7091814. \end{aligned}$$

Dies ist der briggsche Logarithmen des hyperbolischen Logarithmen von k. Addirt man hierzu den Logarithmen des Modulus des briggschen Systems $= 9.6377843$, so erhält man den briggschen Log. des brigg. Log. von k, $= 7.3469657$. Hiervon ist die Zahl 0.00222313, und wenn man diese wieder als einen Logarithmen betrachtet und die entsprechende Zahl aufsucht, so erhält man $k' = 1{,}0051321$.

§. 194.

Um den Winkel V zu finden hat man die Formel (§. 186.)

$$\sin V = \frac{k^{\frac{2}{\varepsilon}} - 1}{k^{\frac{2}{\varepsilon}} + 1} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

und der leichtern Berechnung wegen setze man $k^{\frac{\varepsilon}{2}} = \tan g(45+\theta)$, so wird

$$\sin V = \frac{\tan g(45+\theta)}{\tan g(45+\theta)} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\tan g\,\theta}{\varepsilon}.$$

Bezeichnet man durch ll den doppelt zu nehmenden brigg. Logarithmen, so ist

$$\begin{aligned} ll\,\tan g(45+\theta) &= \log 2 - \log \varepsilon + ll.\,k \\ ll\,k &= 7.3469657. \\ \log 2 &= 0.3010300 \\ \text{Compl. } \log \varepsilon &= 1.0872383. \\ \hline l.\,l.\,\tan g(45+\theta) &= 9.7352340 \\ \log \tan g(45+\theta) &= 0.0543543 \\ \theta &= 3^\circ\ 34'\ 34''\,01. \\ \tan g\,\theta &= 8.7958531. \\ \log \varepsilon &= 8.9127617. \\ \hline \sin V &\ 9.8830914 \\ V &= 49^\circ\ 49'\ 4''. \end{aligned}$$

§. 195.

Für den kleinsten Werth des Vergrösserungsverhältnisses m hat man die Gleichung (§. 189.)

$$m = \frac{A}{a} \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin V^2}$$

und da der Winkel θ so bestimmt ist, dass $\varepsilon \sin V = \tan \theta$, so kann man diesen Werth auch so schreiben

$$m = \frac{A}{a} . \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\cos \theta} .$$

Man hat nun

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 9.9966075. \\ \text{halbirt} &= 9.9983037 \\ \cos \theta &= 9.9991535 \\ & 9.9991502 \end{aligned}$$

also $m = \frac{A}{a} . 0{,}9980452.$

Nimmt man ferner um den Winkel U zu finden, der dem Werthe $v = 45°$ entspricht, die Formel

$$\log \tan(45 + \tfrac{1}{2} U) = \log \tan(45 + \tfrac{1}{2} v) + \log k - \varepsilon\varepsilon \sin v \, (1 + \tfrac{1}{3} \varepsilon\varepsilon \sin v^2)$$

so hat man im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} \sin v^2 &= 9.6989700 \\ \log \varepsilon\varepsilon &= 7.8255235 \\ \text{Compl. } \log 3 &= 9.5228788 \\ & 7.0473723 \\ & 0{,}0011152. \\ \log(1 + \tfrac{1}{3} \varepsilon\varepsilon \sin v^2) &= 0.0004840 \\ \sin v &= 9.8494850 \\ \log \varepsilon\varepsilon &= 7.8255235 \\ \log \text{Modul.} &= 9.6377843 \\ & 7.3132768 \\ \text{Zahl} &= 0{,}0020572. \end{aligned}$$

Die Multiplication mit dem Modulus musste deswegen geschehen, weil in der Formel natürliche Logarithmen vorausgesetzt sind, und die folgende Rechnung mit gewöhnlichen Logarithmen ausgeführt ist.

[redacted]

$$\begin{aligned} \log tang(45 + \tfrac{1}{2} v) &= 0.3827757 \\ \log k \,.\,.\,.\,.\,. &= 0.0022231 \\ -\ 0{,}0020572 &= \underline{9.9979428} \\ & \ 0.3829416 \\ 45 + \tfrac{1}{2} U &= 67^\circ\ 30'\ 27''85 \\ U &= 45^\circ\ \ 0'\ 55''78. \end{aligned}$$

§. 196.

Endlich haben wir noch das Vergrösserungsverhältniss m an der Gränze der Darstellung, wo $v = 45^\circ$ ist, zu berechnen. Hierzu bedienen wir uns der Formel (§. 187.)

$$m = \frac{A}{a} \cdot \frac{\cos U}{\cos v} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon.\ \sin v^2}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \log(1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2) &= 9.9992726 \\ \cos U &= 9.8493677 \\ \text{Compl. } \cos v &= \underline{0.1505150} \\ & \ 9.9991553 \end{aligned}$$

also $m = \frac{A}{a}\ 0{,}9980569$. Vergleicht man dieses mit dem kleinsten Vergrösserungsverhältniss $\frac{A}{a}.\ 0{,}9980452$, so sieht man, dass der ganze Unterschied nur $\frac{1}{85303}$ beträgt.

§. 197.

Wir haben bisher immer uns blos der allgemeinen Auflösung $P + iQ = \varphi(p + iq)$ bedient; allein da die Gleichung $P + iQ = \varphi(p - iq)$ mit gleichem Rechte bei der Darstellungsmethode angewendet werden kann, so ist es nothwendig zu untersuchen, welchen Unterschied die Anwendung der letztern Formel hervorbringt. Man wird sehen, dass beide Auflösungen nur darin unterschieden sind, dass allemal bei der einen Auflösung die Theile in der Darstellung eine ähnliche Lage haben wie im Urbilde, bei der andern aber verkehrt liegen. Man kann nur dann einen Unterschied zwischen der gleichen und verkehr-

ten Lage der Theile machen, wenn man bei den Flächen zwei Seiten unterscheidet, eine obere und eine untere; denn stellt man nicht eine solche Bestimmung fest, so fällt der Unterschied beider Darstellungen weg, da man blos nöthig hat die Fläche umzudrehen, um die verkehrte Darstellung in die gleiche zu verwandeln. Wir müssen also zuerst ein Princip aufstellen, vermöge dessen man a priori entscheiden kann, welches die obere und welches die untere Seite der Oberfläche ist. Es sey f eine bestimmte Function der drei veränderlichen Grössen x, y, z, so kann man die Gleichung $f = 0$ als die Gleichung ansehen, welche die Natur einer Oberfläche bestimmt, indem x, y, z als die drei Coordinaten eines Punktes derselben angesehen werden, und der Werth von f wird im Allgemeinen auf der einen Seite der Oberfläche positiv, auf der andern negativ seyn, und wir wollen die erste Seite als die obere, die zweite als die untere betrachten. Dieselben Bestimmungen sollen auch für eine andere Oberfläche gelten, deren Gleichung durch $F = 0$ vorgestellt wird, wo F eine bestimmte Function der drei Coordinaten X, Y, Z ist. Die erste Oberfläche mag die darzustellende seyn, und auf der zweiten die Darstellung liegen.

§. 198.

Durch die Differentiation der zwei Grössen f und F, wird man die Gleichungen erhalten

$$df = edx + gdy + hdz$$
$$dF = EdX + GdY + HdZ.$$

wo e, g, h Functionen von x, y, z; E, G, H aber Functionen von X, Y, Z sind, und bekanntlich die partiellen Differentiale der Functionen f und F angeben.

Man kann nun, um die Darstellung der einen Fläche auf der andern zu finden, mehrere beliebige Zwischendarstellungen wählen, und wir wollen daher den Uebergang vom Urbilde auf der Fläche, deren Gleichung $f = 0$ ist, zu der letzten Darstellung auf der Fläche, deren Gleichung durch $F = 0$ dargestellt wird, durch sechs Zwischendarstellungen in

Ebenen machen, so dass wenn die Coordinaten eines Punktes des Urbildes durch x, y, z bezeichnet werden, die Coordinaten des correspondirenden Punktes in den Ebenen durch $x, y, 0$; $t, u, 0$; $p, q, 0$; $P, Q, 0$; $T, U, 0$; $X, Y, 0$; und die Coordinaten der Darstellung in der letzten Fläche durch X, Y, Z bestimmt werden. Wir haben daher folgendes Tableau der Coordinaten in den acht Darstellungen:

1) x, y, z.	5) $P, Q, 0$.
2) $x, y, 0$.	6) $T, U, 0$.
3) $t, u, 0$.	7) $X, Y, 0$.
4) $p, q, 0$.	8) X, Y, Z.

Bei den Darstellungen in der Ebene betrachten wir die Seite als die obere, auf welcher sich die positiven Coordinaten befinden, die einer auf derselben senkrechten Axe parallel sind.

§. 199.

Sieht man x und y als constant an, so wird $df = hdz$; für ein positives Increment dz wird df rücksichtlich seines Vorzeichens, vom Vorzeichen des Coefficienten h abhängen; ist dieser daher positiv, so wird man durch positive Incremente von z auf die obere Seite gelangen und die Darstellungen 1 und 2 ähnliche Lagen haben. Ist hingegen h negativ, so finden in beiden Darstellungen verkehrte Lagen statt. Dasselbe findet in der Verbindung der Darstellungen 7 und 8 rücksichtlich des Coefficienten H statt.

Es sey ferner die Länge eines unendlich kleinen Linearelements, dessen Endpunkte die Coordinaten x und y, $x + dx$ und $y + dy$ haben, $= ds$, der Winkel, den dasselbe mit der Abscissenlinie macht, $= l$, so ist $dx = ds. \cos l$, $dy = ds. \sin l$. Eben so sey die Länge eines Linearelements in der dritten Darstellung $d\sigma$, und der Winkel desselben mit der Abscissenlinie $= \lambda$, so wird $du = d\sigma. \sin \lambda$, $dt = ds. \cos \lambda$. Die beiden Winkel l und λ müssen immer so gerechnet werden, dass die positiv wachsende Abscissenlinie als feste Linie, in welcher der Winkel Null ist, betrachtet wird, und die Zählung nach der positiven Seite der Axe der Ordinaten y oder u zu wächst. Man hat nun

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy.$$

$$dt = \left(\frac{dt}{dx}\right) dx + \left(\frac{dt}{dy}\right) dy.$$

oder wenn man, statt du, dt, dx, dy ihre Werthe setzt

$$\sin\lambda.\, d\sigma = \left(\frac{du}{dx}\right) ds.\, \cos l + \left(\frac{du}{dy}\right) ds.\, \sin l.$$

$$\cos\lambda.\, d\sigma = \left(\frac{dt}{dx}\right) ds.\, \cos l + \left(\frac{dt}{dy}\right) ds.\, \sin l.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so kommt

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)\cos l + \left(\frac{du}{dy}\right)\sin l.}{\left(\frac{dt}{dx}\right)\cos l + \left(\frac{dt}{dy}\right).\sin l.}$$

Will man blos die Veränderungen betrachten, welche die Lage des einen Elements durch die Veränderung des andern erleidet, während man die Elemente immer als aus einem und demselben Punkte ausgehend ansieht, so muss man diese Gleichung differentiiren und die partiellen Differentialcoefficienten, die nicht von λ und l abhängen, als constant betrachten. Man erhält auf diese Art

$$\frac{d\lambda}{\cos\lambda^2} = \frac{\frac{dt}{dx}.\frac{du}{dy} - \frac{du}{dx}.\frac{dt}{dy}}{\left(\frac{dt}{dx}.\cos l + \frac{dt}{dy}.\sin l\right)^2}.\, dl.$$

Man sieht hieraus sogleich, dass das Verhältniss $\frac{d\lambda}{dl}$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Zähler des Bruches $\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)$ einen positiven oder negativen Werth erhält, also geschehen im ersten Falle die Aenderungen der Lage der Elemente in demselben Sinne, im zweiten Falle im entgegengesetzten, so dass im ersten die Darstellungen

und 3 ähnlich liegend, im zweiten aber verkehrt
d.

§. 200.

Eben so wird die Darstellung 6 der siebenten
nlich liegend oder verkehrt liegend seyn, je nach-
m $\left(\frac{dT}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right)$ positiv oder ne-
tiv ist.

Folglich werden die Darstellungen in 1 und 3,
ler in 8 und 6 gleiche oder verkehrte Lagen haben,
nachdem die Quotienten

$$\frac{\left(\frac{dt}{dx}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right)}{h.},$$

$$\frac{\left(\frac{dT}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right)}{H.}$$

sitive oder negative Werthe haben.

§. 201.

Auf gleiche Weise erhält man den Uebergang
er dritten Darstellung zur vierten, und der sechsten
ur fünften, indem man nur in der Formel

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right)$$

tatt t, u, x, y resp. p, q, t, u setzt, und in dem
ndern Ausdruck

$$\left(\frac{dT}{dX}\right)\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\left(\frac{dT}{dY}\right)$$

ür T, U, X, Y resp. P, Q. T, U setzt, so dass
lie positiven oder negativen Werthe der durch diese
Substitution entstehenden Formeln

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dq}{du}\right) - \left(\frac{dq}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dp}{du}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dU}\right) - \left(\frac{dQ}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dP}{dU}\right)$$

bestimmen, ob die Darstellung der vierten mit der dritten, und der fünften mit der sechsten, ähnliche oder verkehrte Lagen haben.

§. 202.

Wir haben nun blos die vierte und fünfte Darstellung mit einander zu vergleichen, die beide in Ebenen liegen. Da in diesem Falle $\omega = dp^2 + dq^2$, $\Omega = dP^2 + dQ^2$, so hat man entweder $P + iQ = \varphi(p + iq)$ und $P - iQ = \varphi(p - iq)$, oder $P + iQ = \varphi(p - iq)$ und $P - iQ = \varphi(p + iq)$, wo P und Q die Coordinaten eines Punktes in der fünften, und p und q die Coordinaten des correspondirenden Punktes in der vierten Darstellung sind. Es wird also, indem wir den ersten Fall betrachten.

$$P + iQ = \varphi(p + iq), \quad P - iQ = \varphi(p - iq).$$

also durch Differentiation, indem wir der Kürze halber setzen

$$\varphi'(p + iq) = \pi + i\lambda, \quad \varphi'(p - iq) = \pi - i\lambda$$
$$dP + idQ = (\pi + i\lambda)(dp + idq)$$
$$dP - idQ = (\pi - i\lambda)(dp - idq).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$dP = \pi dp - \lambda dq, \quad dQ = \lambda dp + \pi dq.$$

Setzt man nun

$$\pi = \sigma.\cos\gamma, \quad \lambda = \sigma.\sin\gamma.$$
$$dp = ds.\cos g, \quad dq = ds.\sin g$$
$$dP = dS.\cos G, \quad dQ = dS.\sin G$$

so ergiebt sich durch diese Substitution dieser Werthe in vorige Gleichungen

$$dS.\cos G = \sigma.ds.\cos(g + \gamma)$$
$$dS.\sin G = \sigma.ds.\sin(g + \gamma)$$

folglich, wenn man σ als positiv betrachtet, was immer geschehen kann, da das etwanige negative Verzeichen dem Winkel zugetheilt werden kann

$$dS = \sigma.ds, \quad g + \gamma = G.$$

Da nun ds, dS als die Linearelemente in beiden Ebenen betrachtet werden können, während g, G ihre Neigungen gegen die Abscissenlinie sind, so folgt, dass σ das Vergrösserungsverhältniss darstellt. Der Winkel γ ist von g unabhängig, und bestimmt sich blos durch die Coordinaten des Punktes in welchem sich das Element befindet, so dass für einen

und denselben Punkt, bei beliebiger Veränderung der Richtung der Elemente, γ einen constanten Werth erhält, also wird $dg = dG$, d. h. die Verrückung der Lage der Elemente geschieht in beiden Darstellungen in einerlei Sinn, so dass sie ähnlich liegend sind.

§. 203.

Betrachten wir hingegen den zweiten Fall, in welchem gesetzt werden muss

$$P + iQ = \varphi(p - iq), \quad P - iQ = \varphi(p + iq).$$

so erhält man durch Differentiation und Substitution der Werthe von $\varphi'(p - iq)$, $\varphi'(p + iq)$ aus vorigem Paragraph die Gleichungen

$$dP + idQ = (\pi - i\lambda)(dp - idq)$$
$$dP - idQ = (\pi + i\lambda)(dp + idq).$$
$$dP = \pi dp - \lambda dq, \quad dQ = -\lambda dp - \pi dq$$

folglich auch

$$dS. \cos G = \sigma. ds. \cos(g + \gamma)$$
$$dS. \sin G = -\sigma. ds \sin(g + \gamma)$$

und hieraus $dS = \sigma ds$, $G = -(g + \gamma)$. Da also in diesem Falle $dG = -dg$, so wird die eine Darstellung gegen die andere eine verkehrte Lage haben.

§. 204.

Es ist nun einleuchtend, dass die Anzahl der verkehrten Darstellungen, in den acht genommenen, angiebt, ob die Darstellung der Fläche $f = 0$, auf der Fläche $F = 0$ eine ähnlich oder verkehrt liegende ist. Ist nämlich die Anzahl der verkehrten Darstellungen gerade, so ist die letzte ähnlich liegend; ist dieselbe ungerade, so ist sie verkehrt liegend. Wenn daher unter den vier Grössen

$$\frac{\left(\frac{dt}{dx}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dy}\right)}{h},$$

$$\frac{\left(\frac{dT}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dU}{dY}\right) - \left(\frac{dU}{dX}\right)\cdot\left(\frac{dT}{dY}\right)}{H}$$

$$\frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dq}{du}\right) - \left(\frac{dq}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dp}{du}\right)}{\left(\frac{dP}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dU}\right) - \left(\frac{dQ}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dP}{dU}\right)}$$

keine, zwei oder vier negative sind, und die letzte Darstellung soll ähnlich liegend seyn, so muss man die Auflösung $P + iQ = \varphi(p + iq)$ annehmen; kommen hingegen eine oder drei negative darunter vor, so muss man um noch eine verkehrte Zwischendarstellung zu erhalten, sich der Auflösung $P + iQ = \varphi(p - iq)$ bedienen, um die letzte Darstellung ähnlich liegend zu erhalten. Soll die Darstellung verkehrt liegend seyn, so braucht man nur die beiden Auflösungen mit einander zu vertauschen.

Genauere Bestimmung der Grösse und Gestalt der Erde durch Gradmessungen.

§. 205.

Man hatte bis gegen das Ende des siebenzehnten Jahrhunderts den Erdkörper bei allen Messungen als eine Kugel angesehen, und um ihre Grösse auszumitteln, war es nur nöthig, einen Bogen auf einem Meridian zu messen, und den Unterschied der Polhöhen an den beiden Endpunkten des gemessenen Bogens zu bestimmen. Denn bezeichnet man

den Halbmesser der Kugel durch a,
den Unterschied der beiden Polhöhen durch φ,
die Länge des gemessenen Bogens durch l,

so hat man aus den Elementen der Geometrie die Gleichung $\frac{2a\pi\varphi}{360} = l$, da die Proportion $2a\pi : l = 360^\circ : \varphi$, wo φ in Graden und Theilen des Grades ausgedrückt wird, statt finden muss. Man erhält daraus $a = \frac{180\, l}{\pi\varphi}$, so dass durch eine einzige Messung die Grösse der Erde bestimmt werden konnte,

wobei das Resultat freilich immer durch die bei der wirklichen Ausführung der Messung unvermeidlichen Fehler, einer Ungewissheit unterworfen war, die bei den ältern Messungen oft sehr bedeutend ausfiel, da die angewendeten Instrumente und Methoden im Allgemeinen sehr mangelhaft waren.

§. 206.

Schon in den frühesten Zeiten sind zu diesem Zwecke Messungen angestellt worden, von denen wir die hauptsächlichsten hier anführen wollen. **Eratosthenes**, der 276 v. C. G. geboren wurde, suchte aus der Entfernung der beiden Oerter, Syene und Alexandrien, die Grösse der Erde zu bestimmen, indem er annahm, dass beide auf demselben Erdmeridian liegen. Er wusste, dass zur Zeit des Sonnenstillstandes, die Sonne des Mittags in Syene auf den Grund eines tiefen Brunnens schien, woraus zu schliessen war, dass zu dieser Zeit die Sonne sich im Zenith des Ortes befand. In Alexandrien fand er zu derselben Zeit den Abstand der Sonne vom Zenith gleich dem funfzehnten Theile der ganzen Peripherie des Kreises, also gleich 7° 12′, so dass der Unterschied der Polhöhen beider Oerter den besagten Winkel gleich kam. Aus den Berichten der Reisenden erfuhr Eratosthenes ferer, dass die Entfernung beider Oerter von einander 5000 Stadien betrug, also ergab sich hieraus der Umfang der Erde zu 50 mal 5000 oder 250000 Stadien, und die Grösse eines Grades selbst zu 694 Stadien; Eratosthenes gab daher um die Länge eines Grades genau gleich 700 Stadien zu erhalten, den Umfang der Erde zu 252000 Stadien an.

§. 207.

Man sieht aus dem ganzen Verfahren, wie höchst ungenau diese Methode, die Grösse der Erde zu bestimmen, ist, da nirgends eine wirkliche Messung, ausser bei der Auffindung des Abstandes der Sonne vom Zenith zu Alexandrien geschehen ist, und dieser selbst ist nicht viel zu trauen, da die Messung durch den Schatten eines Stifts bewerkstelligt wurde, und

man nicht weiss, ob Eratosthenes den dabei statt findenden Halbschatten mit berücksichtigt hat oder nicht, welcher das Resultat um 15 bis 16′ (als so viel der scheinbare Halbmesser der Sonne beträgt) vergrössern oder verkleinern kann. Ausserdem ist die Annahme, dass Syene und Alexandrien unter einem und demselben Meridiane liegen, höchst unrichtig, indem ersterer Ort sich drei Grad östlicher befindet als letzterer. Es wird daher die Länge des Bogens von 7° 12′ auf dem Meridian gemessen, kürzer seyn als 5000 Stadien, und man kann durch folgende Betrachtungen leicht ausmitteln, wie viel nach den gemachten Annahmen die eigentliche Länge des besagten Meridianbogens beträgt.

Man bezeichne die Punkte auf der als Kugel betrachteten Erde, in welchen die beiden Oerter Syene und Alexandrien liegen, durch ihre Anfangsbuchstaben S und A, den Punkt in welchem der Nordpol der Erde sich befindet, durch P, so erhält man durch die Verbindung dieser drei Punkte vermittelst grösster Kreise, ein sphärisches Dreieck ASP, in welchem man zwei Seiten AP, SP, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ASP kennt. Man hat nämlich $AP = 90^\circ$ — der geographischen Breite von Alexandrien, $PS = AP + 7^\circ\ 12'$, den Winkel APS gleich dem Längenunterschiede beider Oerter = 3 Grad; die dritte Seite AS giebt die Entfernung zwischen Alexandrien und Syene in Bogen an. Da nun nach den neuern Beobachtungen die geographische Breite von Alexandrien 30° 13′ beträgt, so hat man

$$AP = 58^\circ\ 47', \qquad PS = 65^\circ\ 59'$$

folglich nach den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$\cos AS = \cos(58^\circ\ 47').\ \cos(65^\circ\ 59') + \sin(58^\circ\ 47)\ \sin(65^\circ\ 59').\ \cos 3^\circ.$$

Führt man die Rechnung wirklich aus, so findet man $AS = 7^\circ\ 41'$ als die Entfernung in Bogen zwischen Syene und Alexandrien; dieser Bogen ist es also eigentlich dessen Grösse zu 5000 Stadien angenommen werden muss, und bezeichnet man die Länge die den Bogen von 7° 12′ entspricht, durch x, so hat man die Proportion

$$7^\circ\ 41' : 7^\circ\ 12' = 5000\ \text{St.} : x$$

ıd hieraus x = 4686 Stadien, so dass also der Umıg der Erde nur 50.4686 oder 234300 Stadien beıgen würde. Dividirt man dieses Resultat durch 0, so findet man die Länge eines Grades des Meliians = 650,82 Stadien. Um dies auf die jetzt geäuchlichen Maasse zu reduciren, nehme man die inge der Stadie zu 95 Toisen an, so erhält man 830 Toisen für einen Grad, welches mit unsern zigen Messungen verglichen, um mehr als 3800 T. gross ist. Dieser Unterschied rührt theils daher, ss wir die Grösse der Stadien, deren es selbst veriedene Arten gab, in Vergleichung mit den jetzt bräuchlichen Längenmaassen nicht kennen, theils ss die Länge von 5000 Stadien wegen den unvereidlichen Krümmungen des Weges selbst zu gross, da man wohl nicht annehmen kann, dass die isenden genau einen grössten Kreis bei der Zurückung des Weges beobachtet haben.

§. 208.

Ungefähr zweihundert Jahr nach Eratosthenes llte Possidonius eine neue Messung über die össe der Erde an, indem er in Rhodus und Alendrien den Stern erster Grösse Canopus im rnbilde des Schiffes Argo, rücksichtlich seiner he über dem Horizont beobachtete; in Rhodus war ser Fixstern genau im Horizont sichtbar, wenn er h im Meridian dieses Ortes befand, in Alexandrien gegen war derselbe bei seiner Culmination um ı 48sten Theil der Peripherie des Kreises über n Horizont erhoben, d. h. seine mittägliche Höhe rug 7° 30′. Hieraus folgte, dass Alexandrien um 7½° llicher lag als Rhodus; die Entfernung beider Oersetzte Possidonius gleich 5000 Stadien, und nahm gleich an, dass sie einen gemeinschaftlichen Meriın hätten. Aus diesen Angaben findet man leicht Länge eines Grades zu 666⅔ Stadien.

§. 174.

Diese Messung ist aber wohl noch ungenauer als des Eratosthenes; denn erstens weiss man jetzt

dass Rhodus und Alexandrien keinesweges unter einem und ebendemselben Meridian liegen, sondern ihr Meridianunterschied ungefähr 1½ Grad beträgt; zweitens musste bei der Seereise von Rhodus nach Alexandrien die Bestimmung der Entfernung von 5000 Stadien der Natur der Sache gemäss, viel ungewisser seyn, als bei der Landreise von Alexandrien nach Syene, welche Eratosthenes zum Grunde legte; drittens macht die dem Possidonius unbekannte und daher von ihm vernachlässigte Verbesserung der beobachteten Höhen der Sterne über dem Horizont wegen der astronomischen Strahlenbrechung, einen bedeutenden Unterschied. In Rhodus nämlich, wo der Stern sich im Horizont befand, muss wegen der Strahlenbrechung ein Winkel von 33 Minuten von der scheinbaren Höhe des Sterns abgezogen werden, so dass eigentlich der Stern noch 33 Minuten unter dem Horizont stand, während in Alexandrien wo der Stern höher über dem Horizont stand, nur ungefähr 4 Minuten abzuziehen sind, so dass der gemessene Bogen von 7° 30′ um 33 — 4 = 29 Minut. vergrössert wird, und daher eigentlich 7° 59′ beträgt. Dieser Unterschied der geographischen Breiten beider Oerter ist aber bedeutend zu gross, er findet sich aus den neuern Beobachtungen nur zu 5° 14′. Man kann bemerken, dass der alexandrinische Astronom Ptolomäus der erste gewesen ist, welcher zeigte, dass, um die Grösse der Erde zu bestimmen, es keinesweges nöthig sey, den Bogen auf dem Meridian selbst zu nehmen, sondern dass derselbe in jeder beliebigen Richtung gemessen werden könne, wenn nur der Winkel, welchen diese Richtung mit dem Meridian macht, bekannt ist.

§. 210.

Eine geraume Zeit hindurch wurde bei dem eingetretenen Verfall der Wissenschaften keine Operation dieser Art vorgenommen, bis die Araber unter der Regierung der Caliphen anfingen, sich mit den mathematischen und astronomischen Wissenschaften zu beschäftigen. Der Caliph Al Maimon in Bagdad, welcher bei dem Frieden, den er mit den Griechen schloss,

Bedingung die Auslieferung der Werke der griechischen Philosophen und Aerzte gemacht hatte, liess ie Menge Mathematiker zusammen kommen, welche Grösse eines Grades bestimmen sollten; sie theil sich in zwei Abtheilungen, von denen die eine n einem bestimmten Punkte aus in der Wüste njar am arabischen Meerbusen, in nördlicher Richg, die andere von demselben Punkte aus in südher Richtung einen Grad des Meridians maassen. e eine Parthei fand 56, die andere 56⅔ arabische eilen für die Länge eines Grades, und bei einer f Al Maimon's Befehl angestellten Wiederholung r Arbeit ergab sich dasselbe Resultat. Alfragas giebt der arabischen Meile 4000 Ellen zu 24 ll, und der damalige Zoll machte den Raum aus, n sechs an einander gelegte Gerstenkörner einnahm. Der Holländer Snellius fand, dass im Mittel Gerstenkörner einen rheinländischen Fuss ausichten, und man erhält hierdurch die Länge der abischen Meile in rheinländischen Fuss ausgedrückt $\frac{4000 \cdot 24 \cdot 6}{89} = 6472$. Nimmt man nun den rheinl. ss $= 0{,}16103$ Toisen und die Länge des gemessenen ades im Mittel zu 56⅓ Meile, so erhält man in isen die Länge des Grades $= 58710$ Toisen, wenstens 1700 Toisen zu gross.

§. 211.

Diese arabische Messung ist bis zum Anfange des chszehnten Jahrhunderts die einzige welche wir nnen, da die Wissenschaften nur kurze Zeit hinrch bei den Arabern blühten, und die europäischen ölker vorzüglich in den Naturwissenschaften, in tiefste Unwissenheit versunken waren, so dass gar die Lehre von der runden Gestalt der Erde rloren ging. Ein Franzose Fernel, war in den neern Zeiten der erste, welcher wieder eine Messng über die Grösse der Erde unternahm. Er suchte Polhöhe von Paris, und ging darauf auf dem ege nach Amiens nordwärts fort, bis er an eine elle kam, die einen Grad von der Pariser Polhöhe

verschieden war. Hierauf fuhr er in einen Wagen, welcher die Umläufe der Räder zählte, von Paris bis nach der besagten Stelle hin, und fand die Länge dieses Grades zu 57070 Toisen. Dieses Resultat ist von den jetzigen Messungen nur wenig verschieden, und man muss es einem glücklichen Zufalle zuschreiben, dass eine so unbehülfliche Messungsmethode die Länge so genau angab. Dass sein Instrument, die Polhöhe zu beobachten, nicht sehr genau seyn konnte, sieht man daraus, weil er die Polhöhe von Paris zu 48° 38′ angab, welche 12 bis 13 Minuten zu klein ist. Ausserdem hatte er für die Krümmungen des Weges von den gezählten Umläufen der Räder nach einer willkührlichen Schätzung etwas abgezogen, um den Weg auf die gerade Linie zu reduciren.

Man schlug, um die Grösse der Erde zu finden, folgendes Mittel vor: Nachdem die Höhe eines Berges bestimmt worden ist, entferne man sich so weit von demselben, bis seine Spitze am Horizont unsichtbar wird, und messe dann die Entfernung dieses Punktes vom Berge, so lässt sich daraus die Grösse der Erde bestimmen; denn es sey h die Höhe des Berges, a der Halbmesser der Erde, l die Entfernung des besagten Punktes vom Berge, so ist, wenn man von der Spitze des Berges und von dem zweiten Punkte nach den Mittelpunkt der Erde gerade Linien zieht, und den Winkel den beide mit einander bilden, durch φ bezeichnet, $a = (a + h) \cos \varphi$ und $l : 2a\pi = \varphi : 2\pi$, also $\varphi = \frac{l}{a}$. Nun ist aber $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi\varphi$, so lange φ klein ist, was man hierbei immer voraussetzen kann, also geht die Gleichung $a = (a + h) \cos \varphi$, in diese über $2h = \varphi\varphi(a + h)$. Setzt man hierin statt φ, $\frac{l}{a}$, so kommt $2h = \frac{ll}{aa}(a + h)$, und da $a + h$ von a nur wenig verschieden ist, $2h = \frac{ll}{a}$, also $a = \frac{ll}{2h}$. Diese Methode ist nun wohl geometrisch betrachtet richtig, allein in der Ausübung würde sie sehr abweichende

Verthe für den Halbmesser der Erde geben, da die on dem Gipfel des Berges ausgehenden Lichtstrahm in der Luft so unregelmässig gebrochen werden, ass die Bestimmung der Entfernung, in welcher der ipfel verschwindet, viel zu unsicher wird.

§. 212.

Snellius in Leyden gebrauchte im Jahre 1615 nerst die Methode den Bogen eines Meridians durch ine Triangulirung und vermittelst einer genau geessenen Standlinie trigonometrisch zu bestimmen. r maass zwischen Leyden und Souterwoude auf den elde eine Linie, deren Länge 316 rheinländische uthen und 4 Fuss betrug, und gelangte nach und ach durch zusammenhängende Dreiecke zu einem ogen des Meridians zwischen Alkmaar und Bergenpzoom, an dessen Endpunkte er die geographischen reiten bestimmte, deren Unterschied er zu 1° 11′ 30″ nd. Er schloss daraus die Grösse eines Grades der reite in Holland zu 28500 rheinländischen Ruthen, ad rechnet man die zwölffüssige rheinländische Rue zu 1,93236 Toisen, so erhält man für die Länge s Grades 55072 Toisen. Snellius selbst giebt 55021 oisen an. Er fand aber bald nachher, dass er soohl in den Messungen als den Berechnungen Fehler gangen hatte, und maass daher im Januar des Jahs 1622 auf dem Eise in den Umgegenden von Leyen eine neue Standlinie, indem er zugleich die Trigulirung wiederholte; allein es scheint nicht als) er seine zweiten Messungen zu einer neuen Beimmung der Länge eines Grades, wirklich der Bechnung unterworfen habe, da zu seiner Zeit die garithmische Berechnungsart noch nicht bekannt ar, und er sich daher genöthigt sah, alle Multiplitionen und Divisionen der grossen Zahlen, die die igonometrischen Proportionen erfordern, wirklich szuführen, wovon er durch die Langwierigkeit der perationen, und die dadurch leicht zu begehenden echnungsfehler, das zweite Mal abgeschreckt wurde. [usschenbroek ein Nachfolger und Verwandter s Snellius, bewerkstelligte im Jahre 1729 die Rechng nach dem Manuscript des Snellius, nachdem

er der grössern Sicherheit wegen die Winkel der Dreiecke von Neuem gemessen hatte, wobei freilich Unterschiede von mehreren Minuten vorkommen, und fand die Länge des Grades in Holland gleich 57033 Toisen.

§. 213.

Aus den Nachrichten des Pierre Picard, welcher im Jahre 1669 eine etwas genauere Gradmessung in Frankreich unternahm, ist uns eine Messung von einem Niederländer Wilhelm Bleau, oder nach der damaligen Methode die Namen zu latinisiren, Caesius genannt, bekannt geworden; allein man kann nicht recht wissen, ob diese Messung wirklich angestellt worden, da sich Picard bei Erwähnung derselben eines ziemlichen Anachronismus schuldig macht, indem er sich mit einem Verstorbenen unterhält. Dieser Bleau war ein Schüler des berühmten Astronomen Tycho de Brahe, und Picard, welcher im Jahre 1671 nach Uranienburg, der damals schon sehr verfallenen Sternwarte des Tycho reisste, um die Lage der Mittagslinie daselbst auszumitteln, da man über die richtige Bestimmung derselben von Seiten des Tycho de Brahe in Paris verschiedene Zweifel hegte, erzählt sein Zusammentreffen mit Bleau folgendermassen: Als ich hörte, dass Bleau in Amsterdam, vor nicht langer Zeit eben so wie ich eine Gradmessung angestellt hätte, wünschte ich sehr mich mit ihm über dieselbe zu unterhalten, und ich darf sagen dass wir beide, sowohl der gute Alte als ich, eine ausserordentliche Freude hatten, als wir sahen, dass wir bei der Bestimmung der Grösse eines Grades so genau zusammentrafen, indem der ganze Unterschied nicht einmal 60 rheinländische Fuss betrug. Ich weiss nicht, ob das Manuscript je herausgegeben worden ist, allein ich kann behaupten, dass Snellius selbst nichts so Grosses zu Stande gebracht hat.

Aus dieser Erzählung muss man nun urtheilen, dass Picard den Urheber der Messung Wilhelm Bleau

selbst gesprochen habe, welches aber sehr unwahrscheinlich ist, da Tycho de Brahe, dessen Schüler doch Bleau war, schon 1601 im fünf und funfzigsten Jahre seines Alters gestorben ist. Die blosse Unwahrscheinlichkeit wird aber zur Unmöglichkeit, durch die Nachricht welche uns Friedrich Foppens in seiner 1739 zu Brüssel erschienenen Bibliotheca belgica giebt, wo ausdrücklich gesagt wird, dass dieser Schüler und Freund des Tycho de Brahe am 18ten October 1638 im sieben und sechszigsten Jahre seines Alters verstorben ist.

Es wäre also blos möglich, dass, wenn überhaupt diese Nachricht wahr ist, und Picard dieselbe nicht erfunden hat, um seiner Messung ein grösseres Gewicht, durch die Uebereinstimmung mit einer andern beizulegen, er mit einem von den Söhnen des Wilhelm Bleau gesprochen habe, die aber Kaufleute und keine Gelehrte waren, so dass man nicht wohl begreift wie der gute Alte an einer Sache, die ihm nichts anging und die er vielleicht nicht einmal verstand, solche ausserordentliche Freude haben konnte.

Uebrigens ist das Manuscript nie erschienen, da ausserdem im Jahre 1672 das Haus des Bleau mit allen Magazinen, Druckereien und Werkstätten abbrante.

§. 214.

Kurze Zeit nach Snellius maass der Engländer Norwood von 1633 bis 1635 zwischen London und York einen Grad der Breite, und fand, dass derselbe 57300 oder nach anderen Angaben 57424 Toisen betrug. Er wendete bei dieser Messung sowohl die Methode des Fernel als die des Snellius an, und bestimmte die Polhöhen der Endpunkte des Bogens vermittelst eines Sextanten von 5 Fuss Halbmesser. Diese Messung scheint lange Zeit unbekannt geblieben zu seyn, da Newton, als er im Jahre 1666 seine ersten Untersuchungen über die Schwere anstellte, eine so unrichtige Grösse des Grades zum Grunde legte, dass er verleitet wurde, seine Arbeiten zu verlassen, da er keine Uebereinstimmung zwischen seiner Theorie und den wirklichen Erscheinun-

gen fand, und erst mehrere Jahre nachher auf dieselben zurückkam, nachdem ihm eine genauere Bestimmung der Grösse eines Grades bekannt geworden war.

§. 215.

Der vorhin erwähnte Pierre Picard stellte im Jahre 1669 einer Verordnung von Ludwig XIV. zufolge, eine Messung des Meridians zwischen Malvoisine und Amiens an, welche ziemlich sorgfältig ausgeführt wurde, wodurch er sehr genau mit den neuesten Messungen übereinstimmend die Länge eines Grades der Breite in der Gegend von Amiens zu 57060 Toisen fand; doch ist diese Genauigkeit nur zufällig durch die Compensation mehrerer begangenen Fehler entstanden, wie Lacaille späterhin nachwiess. Dieser zeigte, dass die von Picard bei der Messung der ersten Dreiecksseite gebrauchte Toise, sich zu der Fundamentaltoise, welche die Academie der Wissenschaften besass, wie 999 zu 1000 verhielt, also zu kurz war. Demohngeachtet fand Lacaille, nachdem er diese Bestimmung gemacht, und die Winkel der an die Standlinie gränzenden Dreiecke von Neuem untersucht, auch die astronomischen Beobachtungen vermittelst der Aberration und Nutation, welche Picard noch nicht kannte, verbessert hatte, fast genau dasselbe Resultat. Lahire dehnte die Messung nördlich nach Dünkirchen, und Cassini südlich nach Perpignan aus. Im Jahre 1718 machte Cassini diese Messungen öffentlich bekannt, und zeigte, dass ein Grad der Breite zwischen Paris und Bourges 57098 Toisen, zwischen Paris und Amiens 57060 Toisen, und zwischen Paris und Dünkirchen 56970 Toisen betrug, woraus sich ergab, dass die Grösse der Grade vom Aequator nach den Polen zu abnahm.

§. 216.

Schon vorher hatten Newton und Huygens aus theoretischen Gründen abgeleitet, dass wenn die Erde anfangs ein flüssiger Körper war, so würde

die Oberfläche der Flüssigkeit, vermöge der aus ihrer Umdrehung entstehenden Schwungkraft, ein elliptisches Sphäroïd bilden, dessen kleine Axe den Durchmesser durch die Pole der Erde, und dessen grosse Axe den Durchmesser des Aequators bildet. Huygens fand das Verhältniss der beiden Durchmesser wie 577:578, Newton wie 229:230, wo das letztere das richtige durch die Theorie gegebene Verhältniss ist, indem Huygens die Auflösung der Aufgabe über die Bestimmung der Oberfläche der Flüssigkeit nicht allgemein genug genommen hatte. Wie dem nun auch sey, so ergab sich doch aus beiden Theorien eine Abplattung der Erde an den Polen, und hieraus folgte, dass die Grösse eines Grades immer wachsen muss, je näher man den Polen kommt. Diess lässt sich leicht folgendermassen zeigen. Wir hatten in §. 179. das Linearelement der Oberfläche des Ellipsoïds, dessen grosse Axe durch a, und halbe kleine Axe durch b bezeichnet wird

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$= \sqrt{aa \cos u^2\, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2)\, du^2}$$

gefunden, wo t die geographische Länge eines Punktes auf der Oberfläche, und u einen blos von der geographischen Breite abhängenden Winkel bedeutet. Bleibt man nun auf einem und demselben Meridian, so ist die geographische Länge aller auf dieser Linie liegenden Punkte constant, also $dt = 0$, und es wird daher, wenn ds die Länge eines Elements des Meridians bezeichnet

$$ds = du \sqrt{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}.$$

Da ferner §. 179. $a \tang u = b \tang v$ gesetzt wurde, wo wie §. 182. bewiesen ist, v die geographische Breite oder Polhöhe bedeutet, so hat man

$$du = \frac{ab\, dv}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

$$\cos u^2 = \frac{aa \cos v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

$$\sin u^2 = \frac{bb \sin v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

folglich, wenn man diese Werthe in obigen Ausdruck von ds substituirt

$$ds = \frac{aabb\, dv}{(aa\, cos\, v^2 + bb\, sin\, v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man noch $bb = aa(1 - \varepsilon\varepsilon)$, wo ε die Excentricität der Ellipse bedeutet, durch deren Umdrehung um die kleine Axe das Sphäroïd entstanden ist, so wird

$$ds = \frac{a(1 - \varepsilon\varepsilon)\, dv}{(1 - \varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lässt man v immer um gleich viel wachsen, so wird der Zähler $a(1 - \varepsilon\varepsilon)\, dv$ des Bruches, der ds ausdrückt, für alle Werthe von v constant seyn, allein der Nenner $(1 - \varepsilon\varepsilon\, sin\, v^2)^{\frac{3}{2}}$, wird immer kleiner je mehr v von 0 bis 90° wächst, d. h. je grösser die Polhöhe wird, folglich wird der ganze Bruch zugleich mit v grösser, und hieraus folgt, dass wenn v', v'' zwei Werthe von v sind und v' kleiner als v'' ist, auch zugleich das Integral $\int \frac{a(1 - \varepsilon\varepsilon)\, dv}{(1 - \varepsilon\varepsilon)\, sin\, v^2)^{\frac{3}{2}}}$ von $v = v'$ bis $v = v' + k$ genommen, als dasselbe Integral von $v = v''$ bis $v = v'' + k$ genommen, ausfallen muss, ohne dass man nöthig hat die Integration wirklich auszuführen, die sich ausserdem nicht unter endlicher Form, sondern blos durch Entwickelung der Radicalgrösse in eine Reihe, bewerkstelligen lässt.

§. 217.

Es war also in einem Gegenstande von so grosser Wichtigkeit, die theoretische Bestimmung der Erfahrung entgegengesetzt, denn die Messungen Cassini's ergaben eine Verlängerung der Erde an den Polen, und es kam nun darauf an, durch neue Untersuchungen diesen Gegenstand genauer zu beleuchten. Denn obgleich gegen die theoretischen Angaben nichts wesentliches eingewendet werden konnte, so waren doch diejenigen Arten von Betrachtungen, welche bei dieser Aufgabe angewendet werden mussten, den damaligen Mathematikern und Astronomen wegen ihrer Neuheit zu wenig geläufig, als dass der grösste Theil derselben im Stande gewesen wäre, ihre Klarheit und genaue Schlussfolge einzusehen und

als unwidersprechlich anzunehmen, da ausserdem die practischen Messungen so ausdrücklich dagegen sprachen. Eine Beobachtung, welche sehr für die Newton'schen Angaben zeugte, hatte schon im Jahre 1672. Richer auf der Insel Cayenne, die fünf Grade vom Aequator entfernt liegt, gemacht. Dieser war nach dieser Gegend geschickt worden, um theils über die astronomische Strahlenbrechung, theils über einige Hauptpunkte der Bewegung der Sonne, Beobachtungen anzustellen; und fand dass das Pendel an der Uhr, die er von Paris mitgenommen hatte, seine Schwingungen in längerer Zeit in Cayenne als in Paris vollbrachte, so dass er genöthigt war, um das Secundenpendel zu erhalten, dasselbe um 1¼ Linie zu verkürzen. Man schrieb diese Erscheinung anfangs der grössern Hitze in den tropischen Gegenden zu, durch welche die Pendelstange verlängert worden wäre, allein die über die Ausdehnung der Metalle in grosser Hitze angestellten Versuche zeigten, dass die grössere Wärme allein, die ausserdem nicht sehr von der in Paris verschieden war, diese Veränderung nicht hervorbringen konnte, indem die durch den geringen Wärmeunterschied entstehende Verlängerung der Pendelstange, als fast unmerklich gefunden wurde. Schon vorher hatte Halley dieselbe Erscheinung auf der Insel Helena bemerkt, allein die Verkürzung des Pendels, welche nothwendig war um der Uhr den richtigen Gang zu geben, nicht weiter beobachtet. Es blieb also nichts weiter übrig, als eine wirkliche Verminderung der Schwerkraft, oder einen langsamern Fall der Körper in den Gegenden des Aequators anzunehmen, welche theils aus der Anschwellung der Erde in dieser Gegend, theils aus der grössern Schwungkraft der Körper entstehen konnte.

§. 218.

Der über diesen Gegenstand entstandene Streit wurde lange Zeit mit grossen Eifer zwischen den Anhängern des Newton und Huygens, und ihren Gegnern den Anhängern des Cassini geführt, bis man zuletzt einsah, dass die geringe Ausdehnung des

Theils der Erde in welchem die Messung geschehen war, gegen den ganzen Umfang der Erde genommen, den Streit nicht wohl zu unterscheiden vermöchte, da die bei einer solchen Messung fast unvermeidlichen Fehler einen zu grossen Einfluss auf das Resultat ausüben konnten: Es wurde daher in Frankreich der Entschluss gefasst in Peru selbst am Aequator einen Grad messen zu lassen, wohin Bouguer, Condamine und Godin im Jahre 1735 absegelten, und unter dem Aequator die Länge eines Grades = 56753 Toisen fanden.

Während der Zeit, dass die besagten Mathematiker in den Gegenden des Aequators maassen, schickte der Minister Maurepas auf Anrathen des Maupertuis eine andere Expedition nach Lappland, die aus den Academikern Maupertuis, Clairaut, Lemonnier, Camus und dem Gehülfen Outhier bestand. Mit ihnen verband sich nach ihrer Ankunft in Schweden, der berühmte Celsius. Sie bestimmten die Länge eines Grades unter der Breite von 66° 20′ zu 57437 Toisen. Diese beiden Messungen sowohl unter einander als mit der in der Gegend von Paris angestellten, verglichen, zeigen eine Abplattung der Erde an, so wie es die Theorie verlangte, und wir wollen aus diesen Messungen, der peruanischen und der lappländischen, die Grösse und Gestalt der Erde bestimmen.

§. 219.

Bedeuten a und b die halbe grosse und halbe kleine Axe der Erde, so nennt man den Quotienten $\frac{a-b}{a}$ die Abplattung der Erde, die wir durch α bezeichnen wollen; wegen der Kleinheit derselben können wir in diesen Rechnungen alle Potenzen von α, welche die erste übersteigen, vernachlässigen. Die Gleichung $\frac{a-b}{a} = \alpha$ giebt $b = a(1-\alpha)$ und $bb = aa(1-2\alpha)$. Da ferner $bb = aa(1-\varepsilon\varepsilon)$, so wird auch $\varepsilon\varepsilon = 2\alpha$ werden, also wenn dieser Werth von $\varepsilon\varepsilon$ in der Gleichung

$$ds = \frac{a(1-\varepsilon\varepsilon)\,dv.}{(1-\varepsilon\varepsilon\,\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

substituirt wird, so erhält man

$$ds = \frac{a(1-2\alpha)\,dv.}{(1-2\alpha\,\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entwickelt man das Radical in eine Reihe, so erhält man

$$ds = a(1-2\alpha)\,dv\,(1+3\alpha\,\sin v^2)$$
$$= a\,dv\,(1-2\alpha+3\alpha\,\sin v^2) \text{ und da}$$
$$\sin v^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2v, \text{ so wird auch}$$
$$ds = adv\,[1-\tfrac{1}{2}\alpha\,(1+3\cos 2v)].$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch die Integration folgenden Werth:

$$s = \text{Const.} + av\,(1-\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{3}{4}\,a\,\alpha\,\sin 2v.$$

Um die Constante zu bestimmen, fange der gemessene Bogen in der Stelle an, wo $v = v'$ ist, so hat man für diesen Werth $s = 0$, also

$$0 = \text{Const.} + av'\,(1-\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{3}{4}\,a\alpha\,\sin 2v'.$$

und wenn man diese Gleichung von der obern abzieht,

$$s = a\,(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\,(v-v') - \tfrac{3}{2}\,a\alpha\,\sin(v-v')\cos(v+v').$$

Nennt man die Länge des ganzen gemessenen Bogens s', und bezeichnet die geographische Breite des nördlichsten Endpunktes desselben durch v'', so hat man die Gleichung

$$1)\quad s' = a\,(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\,(v''-v') - \tfrac{3}{2}\,a\alpha\,(\sin(v''-v')\cos(v''+v')).$$

An einer andern Stelle der Erde habe man zwischen den Polhöhen v''', v^{IV}, die Länge des Bogens $= s''$ gefunden, so wird ebenfalls

$$2)\quad s'' = a\,(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\,v^{\text{IV}} - v''') - \tfrac{3}{2}\,a\alpha.\,\sin(v^{\text{IV}}-v''')\cos(v^{\text{IV}}+v''').$$

Sind nun die Unterschiede $v''-v'$, $v^{\text{IV}}-v'''$ einander gleich, und wie aus den Messungen folgt, jeder gleich einem Grad, so erhält man, indem dieser Unterschied $= \delta$ gesetzt und die zweite Gleichung durch die erste dividirt wird

$$\frac{s''}{s'} = \frac{(1-\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{3}{2}\alpha.\,\frac{\sin\delta}{\delta}.\,\cos(v^{\text{IV}}+v''')}{(1-\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{3}{2}\alpha.\,\frac{\sin\delta}{\delta}.\,\cos(v''+v')}$$

Nun sind aber die Winkel v^{IV}, v''' und v'', v' nur um einen Grad verschieden, man kann daher ohne merklichen Fehler $v'' + v' = 2v'$ und $v^{IV} + v''' = 2v'''$ indem man nur statt v', v''' die mittlern Breiten welche in vorigem §. angegeben sind, nimmt. Ferner kann ohne merklichen Fehler wegen der Kleinheit des Winkels δ, $\sin\delta = \delta$ gesetzt werden, so dass

$$\frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha) - \frac{3}{2}\alpha \cos 2v'''}{(1 - \frac{1}{2}\alpha) - \frac{3}{2}\alpha \cos 2v'} = \frac{s''}{s'}$$

wird. Führt man die Hülfsgrösse μ ein, so dass $\frac{s''}{s'} = 1 + \mu$, wo der Natur der Sache gemäss μ immer sehr klein seyn wird, da die Längen der verschiedenen Grade nur wenig von einander abweichen, so wird

$$\tfrac{3}{2}\alpha \cos 2v' - \tfrac{3}{2}\alpha \cos 2v''' = \mu(1 - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{3}{2}\alpha \cos 2v').$$

Vernachlässigt man das Product $\mu\alpha$, welches geschehen kann da μ dieselbe Dimension als α hat, so wird

$$\alpha = \tfrac{2}{3}.\frac{\mu}{\cos 2v' - \cos 2v'''}$$

oder da bekanntlich

$$\cos 2v' - \cos 2v''' = 2\sin(v''' - v')\sin(v''' + v')$$

so wird auch

$$\alpha = \tfrac{1}{3}.\frac{\mu}{\sin(v''' - v').\sin(v''' + v')}.$$

§. 220.

Nimmt man nun die in §. 218. aufgestellten Angaben, so hat man

$s'' = 57437$ Toisen, $s' = 56753$ Toisen.

$v''' = 66^\circ\ 20'$, $v' = 0^\circ\ 0'$.

$$\begin{aligned} \log s'' &= 4.7591917 \\ \log s' &= 4.7539888 \\ \hline \log(1+\mu) &= 0.0052029 \\ \hline 1 + \mu &= 1{,}012052;\ \mu = 0{,}012052. \end{aligned}$$

In unserm Falle ist nun

$v''' - v' = v''' + v' = 66^\circ\ 20'$, also

$$
\begin{aligned}
2 \log \sin 66^\circ\, 20' &= 9.9236926 \\
\log 3 &= 0.4771212 \\
\text{Compl.} \log \mu &= \underline{1.9189409} \\
\log \frac{1}{\alpha} &= 2.3197547
\end{aligned}
$$

also $\alpha = \frac{1}{209}$, welches die gesuchte Abplattung ist.

Verbindet man die französische Messung zu Amiens mit der peruanischen, so wird in diesem Falle

$$s'' = 57060 \text{ Toisen}; \quad s' = 56753 \text{ Toisen}$$
$$v''' = 49^\circ\, 54', \qquad v' = 0^\circ\, 0'$$
$$\mu = 0{,}0054095, \qquad \alpha = \frac{1}{324}.$$

Aus der Verbindung der lappländischen Messung mit dem Grad von Amiens ergiebt sich $\alpha = \frac{1}{115}$, und man sieht aus diesen drei Werthen der Abplattung der Erde, wie unsicher die Messungen in dieser Rücksicht sind. Die lappländische vorzüglich ist allgemein als unrichtig anerkannt worden, und von diesen dreien mag allein die peruanische als zur Vergleichung zulässig betrachtet werden, da dieselbe mit grossem Fleiss ausgeführt ist.

§. 221.

Die Gradmessung in Peru ist unter den bis jetzt angegebenen die erste, welche mit der gehörigen Genauigkeit ausgeführt wurde, und bei welcher man alle nothwendigen Vorsichtsmaassregeln anwendete, sowohl bei den Operationen die die terrestrische Messung betrafen, als auch bei denjenigen, welche auf die astronomischen Bestimmungen Bezug hatten. Man fing bald darauf an auch in andern Ländern Messungen anzustellen, um durch die Menge der Beobachtungen, die Gestalt der Erde so genau als möglich auszumitteln, allein nicht alle seitdem bewerkstelligten Messungen, sind von gleichem Werthe.

L a c a i l l e ging im Jahre 1750 nach dem Vorgebirge der guten Hoffnung, eigentlich in der Absicht, Beobachtungen über die noch wenig bekannten Sterne

des südlichen Himmels anzustellen; er benutzte aber seinen Aufenthalt daselbst zugleich zur Ausführung einer Gradmessung, die freilich wohl etwas eilig gemacht ist, da er die ganze Operation in zwei Monaten vollendete, und zu diesem Zweck seine Instrumente nicht fein genug waren. Er bestimmte die Länge eines Grades unter der südlichen Breite von 33° 18′ 30″ zu 57040 Toisen, welches etwas zu gross ist, und diese Messung hat hauptsächlich Anlass zu der Behauptung gegeben, dass die nördliche und südliche Hälfte der Erdkugel einander nicht ähnlich seyen; allein man hat hierbei eine zu übereilte Folgerung gemacht, da wir weder aus der Theorie noch sonst aus der Erfahrung eine Erscheinung angeben können, die diese Behauptung unterstützte, und es mag die Ursache der Abweichung wohl grösstentheils in der Ungenauigkeit der Messung selbst liegen.

§. 222.

In Italien massen Lemaire und Boscowich 1751—1753, so wie auch Beccaria 1768, in Oestreich Liesganig. Mason und Dixon führten 1764 in Pensylvanien eine Messung aus die von 38° 27′ 35″ bis 39° 56′ 19″ nördlicher Breite sich erstreckte, und wo der ganze Bogen von 538078 englischen Fuss mit der Kette gemessen wurde. Zu denjenigen Messungen aber, welche bei der genauern Bestimmung der Gestalt der Erde angewendet werden können, gehören ausser der peruanischen, die in England von Mudge, in Lappland von Svanberg und Öfverbom, welche als Revision der Messung des Maupertuis auf Anstiften von Melanderhielm angestellt wurde, und die Unrichtigkeit der frühern lappländischen Messung deutlich zeigte; zwei Messungen in Ostindien von Lambton, welche einen Bogen von 7 Grad umfassen, die französische von Delambre Mechain, Biot und Arago, welche von Formentera bis Dünkirchen reicht, deren Parallelkreise 12½ Grad von einander entfernt sind, und endlich die in Hannover von Gaufs, welche Göttingen mit Altona verbindet. Von der liefländischen Messung unter Struve's Direction, sind mir bis

jetzt blos die Bestimmungen der Polhöhen von den drei Hauptpunkten bekannt geworden, nämlich

Polhöhe von	Dorpat	58°	22'	47''	38
— —	Jacobstadt	56.	30.	4.	94
— —	Hochland	60.	5.	10.	05

§. 223.

Es ist aus §. 219 und §. 220. einleuchtend, dass zwei Gradmessungen die Gestalt der Erde völlig bestimmen, allein man wird aus jedem Paar von Messungen immer einen andern Werth für die Abplattung der Erde sowohl, als für den Durchmesser des Aequators finden, wie sich schon aus dem §. 220. gegebenen Beispiel zeigt. Zum Theil liegt die Abweichung der verschiedenen Resultate in einem Fehler, dem alle, auch die vorzüglichsten Messungen unterworfen sind, und welcher vorzüglich die astronomischen Beobachtungen betrifft, indem bei den meisten Beobachtungen der Polhöhen der Endpunkte oder der Zwischenpunkte der gemessenen Bogen, ein Fehler von einer und mehr Secunden vorfallen kann. Der hauptsächlichste Grund dieser Abweichungen ist aber in einer ganz andern Ursache zu suchen, die man nicht hinwegschaffen kann, wenn auch jede astronomische Beobachtung an sich absolut genau wäre. Betrachten wir nämlich den Meridian als eine Ellipse, so wird die Amplitude des gemessenen Bogens durch den Winkel bestimmt, den die beiden an den Endpunkten dieses Bogens gezogenen Normalen mit einander bilden, und dieser Winkel ist dem Unterschiede derjenigen zwei Winkel gleich, welchen die Normalen mit der Aequatorsebene machen. Man nimmt nun an, dass die Lage des Pendels an jedem Ort wirklich die Normale angiebt, und da der Winkel, den das Pendel mit der Aequatorsebene bildet, die Polhöhe des Ortes ausmacht, so wird der Unterschied der Polhöhen an beiden Endpunkten des gemessenen Meridianbogens als die Amplitude desselben angesehen.

Die Lage des Pendels selbst, wird durch die Anziehung aller einzelnen Theile der Erde auf dasselbe bestimmt, und sie würde wirklich mit der der Nor-

male zusammenfallen, wenn die Erde aus einer gleichförmig dichten Materie bestünde. Dies findet aber, wie die Erfahrung zeigt, nicht statt, indem schon in den der Oberfläche der Erde am nächsten liegenden Materien, eine grosse Verschiedenheit der Dichtigkeit bemerkt wird.

Man ist daher keineswegs berechtigt, die Lage des Pendels an einem bestimmten Orte mit der der Normale auf das elliptische Sphäroïd, als zusammenfallend anzunehmen, und der Unterschied der Polhöhen wird eben so wenig genau die Amplitude des Bogens angeben, an dessen Endpunkten die Polhöhen gemessen wurden.

Dass an manchen Stellen der Erdoberfläche durch in der Nähe befindliche grössere Berge, wirklich das Pendel von der eigentlichen Verticallinie abgelenkt wurde, hat man beobachtet. Untersuchungen dieser Art stellten an, Bouguer in den Cordilleras, Beccaria in den Apenninen, Maskelyne in Schottland am Berge Shehallien in der Provinz Pertshire, und man wurde hierdurch geneigt, Messungen die in bergigten Gegenden angestellt wurden als unzuverlässiger anzusehen, als solche die in Ebenen statt fanden.

Dieses mag wohl in vielen Fällen wahr seyn, allein nichts berechtigt uns zu der Annahme, dass in ebenen Gegenden das Pendel gar keiner Abweichung von der Verticallinie unterworfen sey; im Gegentheil kann in vielen Ebenen diese Ablenkung des Pendels bedeutender ausfallen als in sehr bergigten Gegenden, und wir dürfen wohl annehmen, dass an allen Stellen der Erde eine Abweichung statt findet, so dass es gar nicht zu verwundern ist, wenn jede Combination von zwei Gradmessungen eine andere Abplattung giebt, gesetzt auch dieselben seyen von allen Beobachtungsfehlern frei. Wird z. B. das Pendel am südlichen Endpunkte nach Norden, am nördlichen Endpunkte nach Süden abgelenkt, so wird der aus dem Unterschiede der Polhöhen sich ergebende Winkel grösser seyn als die eigentliche Amplitude des Bogens. Das Gegentheil findet statt, wenn am südlichen Endpunkte das Pendel nach Süden, am nördlichen nach Norden abgelenkt wird.

§. 224.

Man muss sich also bei der Untersuchung über die Gestalt und Grösse der Erde damit begnügen, ein ideales elliptisches Sphäroïd aufzusuchen, welches sich den vorzüglichsten Messungen so genau als möglich anschliesst, und da man aus dem Vorigen sieht, dass der Hauptgrund der verschiedenen, sich aus den Messungen ergebenden Gestalten der Erde, in dem astronomischen Theile derselben liegt, und man die terretrischen Messungen als völlig genau, wenigstens im Vergleich mit den astronomischen, ansehen kann, so wird man dieses Ellipsoïd so suchen müssen, dass die gemessenen Bogen der Meridiane genau dargestellt werden, und seine Dimensionen den aus den Polhöhen abgeleiteten wahrscheinlichsten Werth erhalten.

Walbeck hat schon diese Aufgabe behandelt, in der Dissertation de forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani definiendis, indem er das Princip zum Grunde legte, dass die Abplattung und der 360 Theil des Erdmeridians so zu bestimmen wären, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Amplituden ein Minimum sey. Theils hat er aber blos die Endpunkte der ganzen Messungen in Betracht gezogen, theils auch sich auf die erste Potenz der Abplattung beschränkt. Er fand durch diese Methode die wahrscheinlichsten Werthe

für den 360 Theil des Erdmeridians 57009,758 Toisen

für die Abplattung $\frac{1}{302,78}$.

Auf Veranlassung des Herrn Hofrath Gauſs habe ich die Berechnung ausführlicher wiederholt, in welcher die Dimensionen des Erdsphäroïds so gefunden werden, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Polhöhen ein Minimum ist. Ausserdem habe ich das Quadrat der Abplattung noch mit in Betracht gezogen, und die hannoversche Gradmessung, die bei Walbeck fehlt, mit hinzugenommen.

§. 225.

In §. 216. ist das Element der Ellipse oder des Meridians

$$ds = \frac{a(1 - ee)\,dv}{(1 - ee\ sin\ v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

angegeben, wo a die halbe grosse Axe, ae die Eccentricität, v die Polhöhe bedeutet. Da wir das Quadrat der Abplattung α mit berücksichtigen wollen, und $ee = 2\alpha - \alpha\alpha$ ist, so müssen wir den Nenner des Bruchs, der ds ausdrückt, bis zur vierten Potenz von e inclusive, entwickeln. Man erhält hierdurch

$$\frac{ds}{a} = (1 - ee)\,dv\,(1 + \tfrac{3}{2}\,e^2\ sin\,v^2 + \tfrac{15}{8}\,e^4\ sin\,v^4).$$

oder da $sin\,v^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,cos\,2v,$
$sin\,v^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\,cos\,2v + \frac{1}{8}\,cos\,4v.$

$$\frac{ds}{a} = dv\left[\begin{array}{l}1 - \tfrac{1}{4}\,ee\,(1 + 3cos\,2v) \\ \quad - \tfrac{3}{64}\,e^4\,(1 + 4cos\,2v - 5cos\,4v)\end{array}\right]$$

$$= dv\left[\begin{array}{l}(1 - \tfrac{1}{4}\,ee - \tfrac{3}{64}\,e^4) - 3cos\,2v\,(\tfrac{1}{4}\,ee + \tfrac{1}{16}\,e^4) \\ \quad + \tfrac{15}{64}\,cos\,4v.\ e^4\end{array}\right].$$

Man setze hierin statt ee seinen durch α ausgedrückten Werth, so wird

$$\frac{ds}{a} = dv\left[\begin{array}{l}(1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{16}\,\alpha\alpha) - \tfrac{3}{2}\,\alpha\ cos\,2v. \\ \quad + \tfrac{15}{16}\,\alpha\alpha.\ cos\,4v\end{array}\right]$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{s}{a} = \text{Const.} + v\,(1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{16}\,\alpha^2) - \tfrac{3}{4}\,\alpha\ sin\,2v$$
$$+ \tfrac{15}{64}\,\alpha\alpha.\ sin\,4v.$$

Bezeichnet man den 360 Theil des Erdmeridians durch f, so ist das obige Integral vom Aequator bis zum Pol d. h. von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}\pi$ genommen $s = 90f$; zu gleicher Zeit wird aber auch $s = \frac{1}{2}\pi a$ $(1 - \frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{16}\,\alpha\alpha)$ folglich

$$90f = \tfrac{1}{2}\pi a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{16}\,\alpha\alpha).$$

Dasselbe Integral von $v = v'$ bis $v = v' + \delta$ genommen giebt für den zwischen diesen Polhöhen enthaltenen Bogen

$$\frac{s}{a} = \delta\,(1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{16}\,\alpha\alpha) - \tfrac{3}{2}\,\alpha\,\sin\delta.\ \cos(2v' + \delta)$$
$$+ \tfrac{15}{32}\,\sin 2\delta\,\cos(4v' + 2\delta).\ \alpha\alpha$$

oder wenn man a aus dieser Gleichung vermittelst der obern eliminirt

$$\frac{s\pi}{180f} = \delta - \tfrac{3}{2}\,\alpha\,(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha)\,\sin\delta.\ \cos(2v' + \delta)$$
$$+ \tfrac{15}{32}\,\sin 2\delta\,\cos(4v' + 2\delta).\ \alpha\alpha$$

Man hat nun bekanntlich

$$\sin\delta = \delta - \tfrac{1}{6}\,\delta^3 + \tfrac{1}{120}\,\delta^5 - \ldots.$$
$$\cos\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\,\delta^2 + \tfrac{1}{24}\,\delta^4 - \ldots.$$

also sehr nahe $\sin\delta = \delta\,\sqrt[3]{\cos\delta}$, $\sin 2\delta = 2\delta\,\sqrt[3]{\cos 2\delta}$, und hierdurch entsteht die Gleichung, indem man noch die Summe der beiden Polhöhen $v' + v' + \delta = p$ setzt,

$$\frac{s\pi}{180f} = \delta\left[\begin{array}{l} 1 - \tfrac{3}{2}\,\alpha\,(1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\,\sqrt[3]{\cos\delta}.\ \cos p. \\ \qquad + \tfrac{15}{16}\,\sqrt[3]{\cos 2\delta}.\ \cos 2p.\ \alpha\alpha \end{array}\right].$$

§. 226.

Es ergiebt sich hieraus, indem man mit dem Coefficienten von δ dividirt und der Kürze wegen

$$\tfrac{3}{2}\,(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha)\,\sqrt[3]{\cos\delta}.\ \cos p = A$$
$$\tfrac{15}{16}\,\sqrt[3]{\cos 2\delta}.\ \cos 2p = B \quad \text{setzt}$$
$$\delta = \frac{s\pi}{180f}.\ [1 + A\alpha - (B - AA)\,\alpha\alpha]$$

und man findet durch diese Formel δ in Theilen des Halbmessers, den Halbmesser als Einheit angenommen. Will man δ in Secunden haben, so muss man den hinter dem Gleichheitszeichen befindlichen Theil mit $\frac{180.3600}{\pi}$ multipliciren; dann wird

$$\delta = \frac{3600\,s}{f}\,(1 + A\alpha - (B - AA)\,\alpha\alpha).$$

Nun seyen f' und α' die schon bekannten genäherten Werthe von f und α, x und y seyen die Correctionen von f' und α', so dass

$$f = \frac{f'}{1+x}, \quad \alpha = \alpha'(1+y)$$

wo die Grössen x und y so klein sind, dass ihre höhern Potenzen so wie die Producte derselben, vernachlässigt werden können. Dann hat man

$$\delta = \frac{3600\,s.}{f'}(1+x).\,[1+\alpha'(1+y)A-\alpha'\alpha'(1+2y)(B-AA)].$$

und wenn durch δ' die Grösse

$$\frac{3600\,s}{f'}[1+\alpha'A'-\alpha'\alpha'(B-A'A')].$$

bezeichnet wird, wo A' den Werth von A bedeutet, welcher sich ergiebt, indem α' statt α gesetzt ist, so kommt

$$\delta = \delta' + x\delta' + y\alpha'.\frac{3600.\,s}{f'}[A'-2\alpha'(B-A'A')].$$

und da man im letzten Gliede

$$\frac{3600\,s}{f'} = \delta'(1-\alpha'A')$$

setzen kann, so wird auch

$$\delta = \delta' + \delta'x + \alpha'\delta'y\;[A'-2\alpha'(B-\tfrac{1}{2}A'A')].$$

Für die genäherten Werthe von f und α wollen wir setzen,

$$f' = 57009{,}76 \text{ Toisen}, \quad \alpha' = \frac{1}{302{,}78}.$$

$$\log\frac{3600}{f'} = 8.8003533 - 10.$$
$$\log \alpha' = 7.5188728 - 10.$$
$$\log \alpha'\alpha' = 5.0377456 - 10.$$

§. 227.

Als Beispiel wollen wir die Endpunkte der französischen Messungen von Delambre wählen. Man hat hierbei folgende Data

Polhöhe von Formentera $= + 38°\ 39'\ 56''{,}11.$
— — Dünkirchen $= + 51°\ 2'\ 8''{,}74.$
Länge des Meridianbogens $= 705189{,}4$ Toisen.

Man erhält also zur Berechnung der Grössen A und B, den Unterschied der Polhöhen beider Oerter,

$\delta = 12^\circ\ 22'\ 12''63 = 44532''63$, die Summe der Polhöhen $p = 89^\circ\ 42'\ 4''85$, die Grösse $s = 705189{,}4$. Es wird also

$$\cos\delta = 9.9897983.$$
$$\sqrt[3]{\cos\delta} = 9.9965994.$$
$$\cos p = 7.7169814$$
$$\log \tfrac{1}{2}\alpha'(1 + \tfrac{1}{2}\alpha') = 7.6951406$$
$$5.4087214 = \log \alpha' A.$$
$$\alpha' A' = + 0{,}0000256$$
$$(\alpha' A')^2 = + 0{,}0000000$$
$$\cos 2\delta = 8.9581883$$
$$\sqrt[3]{\cos 2\delta} = 9.9860628.$$
$$\cos 2p = 9.9999762\, n$$
$$\log \tfrac{1}{16}\alpha'\alpha' = 5.0097169$$
$$4.9957559\, n = \log \alpha'\alpha' B.$$
$$\alpha'\alpha' B = -\ 0{,}0000099.$$
$$1 + \alpha' A' - \alpha'\alpha' B + (\alpha' A)^2 = 1{,}0000355.$$
$$\log = 0.0000154$$
$$\log \frac{3600}{f'} = 8.8003533$$
$$\log s = 5.8483058$$
$$4.6486745 = \log \delta'.$$
$$\delta' = 44532''23$$
$$\alpha' A' - 2\alpha'\alpha' B + (\alpha' A)^2 = 0{,}0000455.$$
$$\log = 5.6570559.$$
$$\log \delta = 5.6586755.$$
$$0.3057404 = 2{,}021766 = \text{Coeff. von } y.$$

Man hat daher
$$\delta = 44532''23 + 44532\,\alpha + 2{,}02\,y.$$

Bei der Berechnung der Grössen A', B, so wie des Coefficienten von y, ist der Gebrauch von Logarithmen mit fünf Decimalstellen immer hinreichend. Es zeigt sich übrigens aus der gefundenen Gleichung, dass die Corectionen x und y äusserst klein ausfallen werden, da der beobachtete Werth von $\delta = 44532''63$ nur $0''40$ von dem aus den angenommenen Werthen des 360sten Theils des Erdmeridians und der Abplattung berechneten abweicht. Hätte man nun noch eine Gleichung, so könnte man x und y so bestim-

men, dass den beiden Messungen, aus welchen
zwei Gleichungen abgeleitet sind, vollkommen Gen
geleistet würde.

Wir wollen als zweites Beispiel die grös
ostindische Messung vornehmen. Hierbei hat m
folgende Beobachtungen:

Polhöhe von Punnae $= + 8^\circ\ 9'\ 38''39$.

— — Namthabad $= + 15^\circ\ 6'\ 0''64$.

Abstand der Parallelkreise $s = 393810{,}72$ Toisen

folglich $\delta = 6^\circ\ 56'\ 22''25 = 24982''25$

$p = 23^\circ\ 15'\ 39''03$

$$\cos\delta = 9.99682$$

$$\sqrt[3]{\cos\delta} = 9.99894$$
$$\cos p = 9.96318$$
$$\log\tfrac{3}{2}\alpha'(1+\tfrac{1}{2}\alpha') = 7.69514.$$

$$7.65726 = \log\alpha'A'.$$
$$\alpha'A' = 0{,}0045422$$
$$(\alpha'A')^2 = 0{,}0000206$$
$$\cos 2\delta = 9.98713$$

$$\sqrt[3]{\cos 2\delta} = 9.99571$$
$$\cos 2p = 9.83763$$
$$\log\tfrac{15}{16}\,\alpha'\alpha' = 5.00972$$

$$4.84306 = \log\alpha'\alpha'B.$$
$$\alpha'\alpha'B = 0{,}0000070.$$
$$1+\alpha'A'+(\alpha'A')^2-\alpha'\alpha'B = 1{,}0045558.$$
$$\log = 0.0019740$$
$$\log\frac{3600}{f'} = 8{,}8003533$$
$$\log s = 5.5952875.$$

$$4.3976148 = \log\delta'$$
$$\delta' = 24981''30$$
$$\alpha'A+(\alpha'A)^2-2\alpha'\alpha'B = 0{,}0045488$$
$$\log = 7.65790$$
$$\log\delta' = 4.49761$$

$$2.05551 = 113{,}635 = \text{Coeff. von } y.$$

Man hat also für diese Messung die Gleichung

$$\delta = 24981''30 + 24981\,x + 113{,}63\,y.$$

Zur Bestimmung von x und y erhält man al
indem in dieser sowohl als in der aus der franz

schen Messung abgeleiteten Gleichung statt δ die beobachteten Werthe gesetzt werden

$$0''40 = 44532\,x + 2{,}02\,y.$$
$$0''95 = 24981\,x + 113{,}63\,y.$$

Hieraus folgt $x = 0{,}00000870$, $y = 0{,}0064471$.

§. 228.

Um die wahrscheinlichsten Werthe von x und y nach dem in §. 224. aus einander gesetzten Princip zu finden, wird man folgendermassen verfahren müssen. Es sey N die beobachtete Polhöhe am südlichen Endpunkte der Messung, $N + \delta$ die an irgend einem andern Punkte beobachtete, so wird δ die beobachtete Amplitude seyn. Die Polhöhe N sey mit dem Fehler n, die Polhöhe $N + \delta$ mit dem Fehler n' behaftet, so dass die eigentlichen wahrscheinlichen Polhöhen $N + n$ und $N + \delta + n'$ sind; die wahrscheinlichste Amplitude wird daher $\delta + n' - n$ betragen, die sich aus der in den vorigen Paragraphen angestellten Rechnungen durch $\delta' + \delta' x + 6y$ darstellen lässt, so dass

$$\delta + n' - n = \delta' + \delta' x + 6y$$

und wenn man $\delta' - \delta = \Delta'$ setzt

$$n' = n + \Delta' + \delta' x + 6' y.$$

wo Δ, δ', $6'$ bekannte Grössen sind. Wenn daher in einer Messung die Polhöhen am m Punkten bestimmt ist, so erhält man $m - 1$ solcher Gleichungen in denen $m + 2$ unbekannte Grössen enthalten sind. Diese Gleichungen werden die **Bedingungsgleichungen** genannt. Für eine andere Messung seyen die Grössen die wir hierbei durch n, n', n''.... bezeichnet haben, n_0, n_0', n_0'' . . ., und so für alle übrigen Messungen die man mit in Betracht ziehen will. Bezeichnet man die Summe der Quadrate aller dieser Fehler durch V, so verlangt das zum Grunde gelegte Princip, dass V ein Minimum sey; nun sind die Fehler von x und y und den Fehlern der ersten Polhöhe in den Gleichungen abhängig gemacht, und da zwischen x und y keine Relation weiter statt findet so wenig als zwischen den Fehlern der ersten Polhöhen an den südlichen Endpunkten des Bogens,

so folgt aus den bekannten Bedingungen das Minimum, dass

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{dn}\right) = 0, \quad \left(\frac{dV}{dn_0}\right) = 0, \quad \left(\frac{dV}{dn_1}\right) = 0 \text{ etc.} -$$

auf welche Art man so viel Gleichungen erhält, als unbekannte Grössen x, y, n, n_0, n_1 .... zu bestimmen sind, und man nennt dieselben die **Fundamentalgleichungen.**

§. 229.

Man muss nun untersuchen auf welche Art sich die Fundamentalgleichungen am leichtesten aus den schon gebildeten Bedingungsgleichungen ableiten lassen. Um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, wollen wir zuerst eine Messung vornehmen, in welcher ausser den Polhöhen der beiden Endpunkte, noch die Polhöhen von drei Zwischenpunkten beobachtet sind, und die dabei statt findenden Fehler durch n, n', n''. n''', n^{IV} bezeichnen. Man erhält dann folgende vier Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} n' &= n + \Delta' + \delta' x + 6' y \\ n'' &= n + \Delta'' + \delta'' x + 6'' y \\ n''' &= n + \Delta''' + \delta''' x + 6''' y \\ n^{IV} &= n + \Delta^{IV} + \delta^{IV} x + 6^{IV} y \end{aligned}$$

und die Grösse $V = nn + n'n' + n''n'' + n'''n''' + n^{IV}n^{IV}$.

Sucht man daher die drei Fundamenlalgleichungen $\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{dV}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{dV}{dn}\right) = 0$, so ergiebt sich

$$0 = n'\left(\frac{dn'}{dx}\right) + n''\left(\frac{dn''}{dx}\right) + n'''\left(\frac{dn'''}{dx}\right) + n^{IV}\left(\frac{dn^{IV}}{dx}\right)$$

$$0 = n'\left(\frac{dn'}{dy}\right) + n''\left(\frac{dn''}{dy}\right) + n'''\left(\frac{dn'''}{dy}\right) + n^{IV}\left(\frac{dn^{IV}}{dx}\right)$$

$$0 = n + n'\left(\frac{dn'}{dn}\right) + n''\left(\frac{dn''}{dn}\right) + n'''\left(\frac{dn'''}{dn}\right) + n^{IV}\left(\frac{dn^{IV}}{dn}\right)$$

oder wenn man an die Stelle von n', n'' .... und ihren partiellen Differentialen ihre Werthe aus den Bedingungsgleichungen setzt

$$\left.\begin{array}{l} \delta'(n + \Delta' + \delta' x + 6' y) \\ \quad + \delta''(n + \Delta'' + \delta'' x + 6'' y) \\ + \delta'''(n + \Delta''' + \delta''' x + 6''' y) \\ \quad + \delta^{\text{IV}}(n + \Delta^{\text{IV}} + \delta^{\text{IV}} x + 6^{\text{IV}} y) \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} 6'(n + \Delta' + \delta' x + 6' y) \\ \quad + 6''(n + \Delta'' + \delta'' x + 6'' y) \\ + 6'''(n + \Delta''' + \delta''' x + 6''' y) \\ \quad + 6^{\text{IV}}(n + \Delta^{\text{IV}} + \delta^{\text{IV}} x + 6^{\text{IV}} y) \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} n + (n + \Delta' + \delta' x + 6' y) \\ \quad + (n + \Delta'' + \delta'' x + 6'' y) \\ + (n + \Delta''' + \delta''' x + 6''' y) \\ \quad + (n + \Delta^{\text{IV}} + \delta^{\text{IV}} x + 6^{\text{IV}} y) \end{array}\right\} = 0.$$

wo die erste die Fundamentalgleichung für x, die zweite für y, die dritte für n ist.

§. 230.

Aus der genauern Betrachtung der Zusammensetzung dieser Fundamentalgleichungen sieht man sogleich, dass dieselben aus den Bedingungsgleichungen folgendermassen gebildet werden können: Man füge zu den Gleichungen $n' = 0$, $n'' = 0$, $n''' = 0$, $n^{\text{IV}} = 0$, die auf die angegebene Art aus n, x, y gebildet sind, noch die Gleichung $n = 0$ hinzu, und um die zu einer unbekannten Grösse, etwa x, gehörende Fundamentalgleichung zu finden, multiplicire man die ganze Bedingungsgleichung mit demjenigen Coefficienten welchen x in ihr besitzt. Hierauf addirt man diese Producte, so giebt die Summe die verlangte Fundamentalgleichung an.

Auf dieselbe Art wird man auch zu verfahren haben, wenn mehrere Messungen die verschiedene Anfangspunkte haben, zu verbinden sind.

Uebrigens zeigt sich leicht, dass die Summe der Fehler der Polhöhen in jeder Messung Null seyn muss, d. h. $n + n' + n'' + n''' + n^{\text{IV}} = 0$, und man kann diesen Satz dazu anwenden, um die Richtigkeit der erhaltenen Resultate zu prüfen. Der Be-

weis ergiebt sich aus der dritten Fundamentalformel des vorigen Paragraphs.

§. 231.

Die Data, auf welche wir unsere Rechnungen bauen wollen, sind folgende:

Peruanische Messung.

	Polhöhen	δ	s in Toisen	Fehler
Tarqui	— 3° 4′ 30″83			+ π′
Cotchesqui	+ 0. 2.37.83	11228″66	176866,17	π″

Erste Ostindische Messung.

Trivandeporum	+ 11° 44′ 52″59			ω′
Paudree	13. 18.49,02	5696,43	89815,43	ω″

Zweite Ostindische Messung.

Punnae	8. 9. 38,39			Ω′
Putchapolliam	10. 59. 48,93	10210,54	160935,18	Ω″
Dodagoontah	12. 59. 59,91	17421,52	274678,94	Ω‴
Namthabad	15. 6. 0,64	24982,25	393810,72	Ω^{IV}

Französische Messung.

Formentera	38. 39. 56,11			φ′
Montjouy	41. 21. 45,45	9709,34	153605,8	φ″
Barcelona	41. 22. 47,16	9771,05	154554,8	φ‴
Perpignan	42. 41. 58,01	14521,90	229669,8	φ^{IV}
Carcassonne	43. 12. 54,31	16378,20	259104,8	φ^{V}
Evaux	46. 10. 42,19	27046,08	427951,5	φ^{VI}
Pantheon	48. 50. 48,94	36652,83	580244,6	φ^{VII}
Dünkirchen	51. 2. 8,74	44532,63	705189,4	φ^{VIII}

Hannoversche Messung.

Göttingen	51° 31. 47,85			γ′
Altona	53. 32. 45,27	7257,42	115163,27	γ″

Englische Gradmessung.

	Polhöhen	δ	s in Toisen	Fehler
Dunnose	50. 37. 8,21			ε'
Greenwich	51. 28. 40,00	3091,79	49057,1	ε''
Blenheim	51. 50. 27,90	4399,69	69825,3	ε'''
Arburyhill	52. 13. 28,19	5779,98	91691,3	ε^{IV}
Clifton	53. 27. 31,99	10223,78	162066,9	ε^{V}

Schwedische Gradmessung.

Mallörn	65. 31. 31,06			σ'
Pahtawara	67. 8. 51,41	5840,35	92760,73	σ''

§. 232.

Aus diesen Angaben erhält man nun folgende Bedingungsgleichungen, indem um die grossen Zahlen bei x zu vermeiden, $1000\,x = u$ gesetzt wird:

$$\pi' = \pi'$$
$$\pi'' = \pi' - 4{,}79 + 11{,}22\,u + 55{,}38\,y.$$

$$\omega' = \omega'$$
$$\omega'' = \omega' + 0{,}66 + 5{,}70\,u + 25{,}51\,y.$$

$$\Omega' = \Omega'$$
$$\Omega'' = \Omega' - 0{,}35 + 19{,}21\,u + 47{,}66\,y.$$
$$\Omega''' = \Omega' + 3{,}78 + 17{,}43\,u + 80{,}13\,y.$$
$$\Omega^{IV} = \Omega' - 0{,}95 + 24{,}98\,u + 113{,}63\,y.$$

$$\varphi' = \varphi'$$
$$\varphi'' = \varphi' - 1{,}17 + 9{,}71\,u + 8{,}52\,y.$$
$$\varphi''' = \varphi' - 2{,}91 + 9{,}77\,u + 8{,}56\,y.$$
$$\varphi^{IV} = \varphi' - 8{,}02 + 14{,}51\,u + 11{,}02\,y.$$
$$\varphi^{V} = \varphi' - 4{,}92 + 16{,}37\,u + 11{,}71\,y.$$
$$\varphi^{VI} = \varphi' - 10{,}02 + 27{,}04\,u + 12{,}52\,y.$$
$$\varphi^{VII} = \varphi' - 3{,}87 + 36{,}65\,u + 7{,}22\,y.$$
$$\varphi^{VIII} = \varphi' - 0{,}40 + 44{,}53\,u + 2{,}02\,y.$$

$$\gamma' = \gamma'$$
$$\gamma'' = \gamma' + 5''51 + 7{,}26\,u - 9{,}27\,y.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= \varepsilon'. \\
\varepsilon'' &= \varepsilon' + 2{,}80 + 3{,}09\,u - 3{,}18\,y. \\
\varepsilon''' &= \varepsilon' + 4{,}86 + 4{,}41\,u - 4{,}68\,y. \\
\varepsilon^{IV} &= \varepsilon' + 3{,}68 + 5{,}78\,u - 6{,}34\,y. \\
\varepsilon^{V} &= \varepsilon' - 2{,}06 + 10{,}22\,u - 11{,}83\,y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \sigma' \\
\sigma'' &= \sigma' - 2{,}45 + 5{,}84\,u - 19{,}66\,y.
\end{aligned}$$

---

§. 233.

Zuerst findet man leicht die Fundamentalgleichungen für die Fehler der Polhöhen der südlichsten Anfangspunkte jeder Messung, indem man die zu jeder einzelnen gehörenden Bedingungsgleichungen addirt, nämlich

$$\begin{aligned}
0 &= 2\pi' - 4{,}79 + 11{,}22\,u + 55{,}38\,y. \\
0 &= 2\omega' + 0{,}66 + 5{,}70\,u + 25{,}51\,y. \\
0 &= 4\Omega' + 2{,}48 + 52{,}62\,u + 241{,}42\,y. \\
0 &= 8\varphi' - 31{,}27 + 158{,}58\,u + 61{,}57\,y. \\
0 &= 2\gamma' + 5{,}51 + 7{,}26\,u - 9{,}27\,y. \\
0 &= 5\varepsilon' + 9{,}28 + 23{,}50\,u - 26{,}03\,y. \\
0 &= 2\sigma' - 2{,}45 + 5{,}84\,u - 19{,}66\,y.
\end{aligned}$$

folglich hieraus

$$\begin{aligned}
\pi' &= + 2{,}395 - 5{,}610\,u - 27{,}690\,y. \\
\omega' &= - 0{,}330 - 2{,}850\,u - 12{,}755\,y. \\
\Omega' &= - 0{,}620 - 13{,}155\,u - 60{,}355\,y. \\
\varphi' &= + 3{,}909 - 19{,}822\,u - 7{,}696\,y. \\
\gamma' &= - 2{,}755 - 3{,}630\,u + 4{,}635\,y. \\
\varepsilon' &= - 1{,}856 - 4{,}700\,u + 5{,}206\,y. \\
\sigma' &= + 1{,}225 - 2{,}920\,u + 9{,}830\,y.
\end{aligned}$$

wodurch die Fehler der Polhöhen der südlichen Endpunkte bekannt sind, sobald man die Grössen u und y hat.

§. 234.

Um die Fundamentalgleichung für die beiden Correctionen u und y zu finden, mache man nach §. 230. die Producte zuerst für u,

$$\begin{aligned}
0 &= 11{,}22\,\pi' - 53{,}74 + 125{,}89\,u + 621{,}36\,y. \\
0 &= 5{,}70\,\omega' + 3{,}80 + 32{,}49\,u + 145{,}41\,y.
\end{aligned}$$

$$0 = 10{,}21\,\Omega' - 3{,}57 + 104{,}24\,u + 486{,}61\,y.$$
$$0 = 17{,}43\,\Omega' + 65{,}88 + 303{,}80\,u + 1396{,}67\,y.$$
$$0 = 24{,}98\,\Omega' - 23{,}73 + 624{,}00\,u + 2838{,}48\,y.$$
$$0 = 9{,}71\,\varphi' - 11{,}36 + 94{,}28\,u + 82{,}73\,y.$$
$$0 = 9{,}77\,\varphi' - 28{,}43 + 95{,}45\,u + 83{,}63\,y.$$
$$0 = 14{,}51\,\varphi' - 116{,}37 + 210{,}54\,u + 159{,}90\,y.$$
$$0 = 16{,}37\,\varphi' - 80{,}54 + 267{,}98\,u + 191{,}70\,y.$$
$$0 = 27{,}04\,\varphi' - 270{,}91 + 731{,}47\,u + 338{,}54\,y.$$
$$0 = 36{,}65\,\varphi' - 141{,}84 + 1343{,}10\,u + 264{,}61\,y.$$
$$0 = 44{,}53\,\varphi' - 17{,}81 + 1982{,}90\,u + 89{,}95\,y.$$
$$0 = 7{,}26\,\gamma' + 40{,}00 + 52{,}71\,u - 67{,}30\,y.$$
$$0 = 3{,}09\,\varepsilon' + 8{,}65 + 9{,}55\,u - 9{,}83\,y.$$
$$0 = 4{,}41\,\varepsilon' + 21{,}43 + 19{,}45\,u - 20{,}64\,y.$$
$$0 = 5{,}78\,\varepsilon' + 21{,}27 + 33{,}41\,u - 36{,}65\,y.$$
$$0 = 10{,}22\,\varepsilon' - 21{,}05 + 104{,}45\,u - 120{,}90\,y.$$
$$0 = 5{,}84\,\sigma' - 14{,}31 + 34{,}11\,u - 114{,}82\,y.$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man die Fundamentalgleichung für u.

$$0 = 11{,}22\,\pi' + 5{,}70\,\omega' + 52{,}62\,\Omega' + 158{,}58\,\varphi' + 7{,}26\,\gamma' + 23{,}50\,\varepsilon' + 5{,}84\,\sigma' - 622{,}63 + 6169{,}52\,u + 6329{,}45\,y.$$

und da aus den Werthen von π', ω', Ω' .... aus vorigem Paragraph

$$11{,}22\,\pi' = + 26{,}87 - 62{,}94\,u - 310{,}68\,y.$$
$$5{,}70\,\omega' = - 1{,}08 - 16{,}24\,u - 72{,}70\,y.$$
$$52{,}62\,\Omega' = - 32{,}62 - 692{,}22\,u - 3175{,}88\,y.$$
$$158{,}58\,\varphi' = + 619{,}89 - 3143{,}37\,u - 1220{,}43\,y.$$
$$7{,}26\,\gamma' = - 20{,}00 - 26{,}35\,u + 33{,}65\,y.$$
$$23{,}50\,\varepsilon' = - 43{,}62 - 110{,}45\,u + 122{,}34\,y.$$
$$5{,}84\,\sigma' = + 7{,}15 - 17{,}05\,u + 57{,}41\,y.$$

also auch, wenn man diese Werthe zusammen nimmt

$$11{,}22\,\pi' + 5{,}70\,\omega' + 52{,}62\,\Omega' + 158{,}58\,\varphi' + 7{,}26\,\gamma' + 23{,}50\,\varepsilon' + 5{,}84\,\sigma' = + 555{,}79 - 4068{,}62\,u - 4566{,}29\,y.$$

so hat man zwischen u und y die erste Gleichung

$$0 = - 66{,}84 + 2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y.$$

§. 235.

Auf gleiche Weise erhält man die Producte zur Bildung der Fundamentalgleichung für y.

$$0 = + 55{,}38\,\pi' - 265{,}27 + 621{,}36\,u + 3066{,}94\,y.$$
$$0 = + 25{,}51\,\omega' + 16{,}84 + 145{,}41\,u + 650{,}76\,y.$$

$$0 = + 47{,}66\,\Omega' - 16{,}68 + 486{,}61\,u + 2271{,}48\,y.$$
$$0 = + 80{,}13\,\Omega' + 302{,}89 + 1396{,}67\,u + 6420{,}82\,y.$$
$$0 = + 113{,}63\,\Omega' - 107{,}95 + 2838{,}48\,u + 12911{,}78\,y.$$
$$0 = + 8{,}52\,\varphi' - 9{,}97 + 82{,}73\,u + 72{,}59\,y.$$
$$0 = + 8{,}56\,\varphi' - 24{,}91 + 83{,}63\,u + 73{,}27\,y.$$
$$0 = + 11{,}02\,\varphi' - 88{,}38 + 159{,}90\,u + 121{,}44\,y.$$
$$0 = + 11{,}71\,\varphi' - 57{,}61 + 191{,}70\,u + 137{,}13\,y.$$
$$0 = + 12{,}52\,\varphi' - 125{,}45 + 338{,}54\,u + 156{,}75\,y.$$
$$0 = + 7{,}22\,\varphi' - 27{,}94 + 264{,}61\,u + 52{,}13\,y.$$
$$0 = + 2{,}02\,\varphi' - 0{,}81 + 89{,}95\,u + 4{,}08\,y.$$
$$0 = - 9{,}27\,\gamma' - 51{,}08 - 67{,}30\,u + 86{,}13\,y.$$
$$0 = - 3{,}18\,\varepsilon' - 8{,}90 - 9{,}83\,u + 10{,}11\,y.$$
$$0 = - 4{,}68\,\varepsilon' - 22{,}74 - 20{,}64\,u + 21{,}90\,y.$$
$$0 = - 6{,}34\,\varepsilon' - 23{,}33 - 36{,}65\,u + 40{,}20\,y.$$
$$0 = - 11{,}83\,\varepsilon' + 24{,}37 - 120{,}90\,u + 139{,}95\,y.$$
$$0 = - 19{,}66\,\sigma' + 48{,}17 - 114{,}82\,u + 386{,}51\,y.$$

Addirt man diese Producte, so kommt

$$0 = 55{,}38\,\pi' + 25{,}51\,\omega' + 241{,}42\,\Omega' + 61{,}57\,\varphi' - 9{,}27\,\gamma' - 26{,}03\,\varepsilon' - 19{,}66\,\sigma - 438{,}75 + 6329{,}45\,u + 26623{,}97\,y.$$

Ferner ist vermittelst der Gleichungen in §. 233.

$$55{,}38\,\pi' = + 132{,}63 - 310{,}68\,u - 1533{,}48\,y.$$
$$25{,}51\,\omega' = - 8{,}42 - 72{,}70\,u - 325{,}38\,y.$$
$$241{,}42\,\Omega' = - 149{,}68 - 3175{,}90\,u - 14570{,}80\,y.$$
$$61{,}57\,\varphi' = + 240{,}68 - 1220{,}46\,u - 473{,}85\,y.$$
$$- 9{,}27\,\gamma' = + 25{,}54 + 33{,}65\,u - 42{,}97\,y.$$
$$- 26{,}03\,\varepsilon' = + 48{,}31 + 122{,}34\,u - 135{,}51\,y.$$
$$- 19{,}66\,\sigma' = - 24{,}09 + 57{,}43\,u - 193{,}32\,y.$$

folglich auch, indem diese Grössen zusammen genommen werden

$$55{,}38\,\pi' + 25{,}51\,\omega' + 241{,}42\,\Omega' + 61{,}57\,\varphi' - 9{,}27\,\gamma' - 26{,}03\,\varepsilon' - 19{,}66\,\sigma' = + 264{,}97 - 4566{,}32\,u - 17275{,}31\,y.$$

und man findet zwischen u und y die zweite Gleichung

$$0 = - 173{,}78 + 1763{,}13\,u + 9348{,}66\,y.$$

§. 236.

Man hat also zur Bestimmung von u und y die beiden Gleichungen:

$$2100,90u + 1763,16y = 66,84.$$
*) $$1763,13u + 9348,66y = 173,78.$$

und man findet aus denselben

$$y = +0,014955.$$
$$u = +0,019264.$$

Es ergiebt sich hieraus, wenn man bedenkt, dass $1000x = u$, nach §. 226.

$$\alpha = \frac{1}{302,78} \cdot (1 + 0,014955).$$

$$f = \frac{57009,76}{1 + 0,000019264} \text{ Toisen}$$

oder wenn man die Rechnung wirklich ausführt, so erhält man

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{298,3186}$$

den 360 Theil des Erdmeridians = 57008,662 Toisen.

§. 237.

Substituirt man die hier gefundenen Werthe in die Gleichungen der §§. 231. und 232., so kommen die bei Bestimmung der Polhöhen begangenen Fehler inclusive der Ablenkung des Pendels

$\pi' = +1''87$, $\pi'' = -1''87$

$\omega' = -0''58$, $\omega'' = +0''57$

$\Omega' = -1''78$, $\Omega'' = -1''22$, $\Omega''' = +3''54$, $\Omega^{IV} = -0''54$,

$\varphi' = +3''40$, $\varphi'' = +2''25$, $\varphi''' = +0''82$, $\varphi^{IV} = -4''16$,

$\varphi^{V} = -1''02$, $\varphi^{VI} = -5''88$, $\varphi^{VII} = +0''37$, $\varphi^{VIII} = +3''92$,

$\gamma' = -2''76$, $\gamma'' = +2''76$,

$\varepsilon' = -1''87$, $\varepsilon'' = +0''94$, $\varepsilon''' = +3''01$, $\varepsilon^{IV} = +1''83$, $\varepsilon^{V} = -3''91$,

$\sigma' = +1''31$, $\sigma'' = -1''31$.

Quadrirt man diese einzelnen Fehler und addirt sie zusammen, so erhält man die Summe 163''17,

*) Eigentlich sollte dieser Coefficient von u dem von y in der ersten Gleichung völlig gleich seyn; dieser kleine Unterschied ist nur durch die vielen Additionen und Subtractionen entstanden, er trägt aber nichts zur Aenderung des Resultates bei.

und um den mittlern Fehler zu erhalten, muss diese Summe durch die Anzahl der Bedingungsgleichungen weniger der Anzahl der Fundamentalgleichungen dividirt, also durch 25 — 9 = 16, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen werden *). Dies giebt den mittlern Fehler einer Polhöhe = 3″193.

§. 238.

Um die Gewichte dieser Bestimmungen der Abplattung und des mittlern Meridiangrades zu erhalten, schreibe man die beiden Fundamentalgleichungen so

$$2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y - 66{,}84 = U,$$
$$1763{,}13\,u + 9348{,}66\,y - 173{,}78 = Y.$$

Bringt man dieselben dann auf die Form

$$u = A + B\,U + C\,Y$$
$$y = A' + B'U + C'Y$$

so wird $\frac{1}{B}$ das Gewicht von u, $\frac{1}{C'}$ das Gewicht von y seyn. Man findet daher

das Gewicht von $u = 1768$
das Gewicht von $y = 7869$

Man erhält ferner die mittlern zu befürchtenden Fehler

in dem Werthe von $u = \frac{3{,}193}{\sqrt{1768}} = 0{,}075939.$

in dem Werthe von $y = \frac{3{,}193}{\sqrt{7869}} = 0{,}035995.$

Um nun die mittlern zu befürchtenden Fehler in den Bestimmungen des mittlern Erdgrades und der Abplattung zu erhalten, setze man

$$\frac{1}{298 - \Delta\alpha} = \frac{1}{298}\,(1 + 0{,}035995).$$

*) Man sehe hierüber, so wie über alle folgenden auf die Behandlung der Beobachtungen Bezug habenden Rechnungen die Abhandlung Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae auctore Carolo Friderico Gauss. 1823.

$$57009 - \Delta f = \frac{57009}{1 + 0{,}000075939}.$$

erhält man $\Delta\alpha = 10{,}7$, $\Delta f = 4{,}3$ Toisen.

nmerkung. Die hier gegebenen Bestimmungen der Gestalt der Erde weichen etwas von denen ab, welche ich früher gemacht habe, und die Herr Hofr. Gauss seiner Abhandlung Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona angehängt hat. Diese Unterschiede rühren daher, dass durch ein Versehen der Coefficient von y grade um tausend zu gross genommen war.

§. 239.

Man hat also die Polhöhen auf demjenigen Sphäroïd, welches den §. 231. angegebenen Messungen am esten sich anpasst, in

Tarqui	= —	3°	04′	30″83	+	1″87
Cotchesqui	= +	0.	02.	37,83	—	1,87
Trivandeporum	=	11.	44.	52,59	—	0,58
Paudree	=	13.	19.	49,02	+	0,57
Punnae	=	8.	09.	38,39	—	1,78
Putchapolliam	=	10.	59.	48,93	—	1,22
Dodagoontah	=	12.	59.	59,91	+	3,54
Namthabad	=	15.	06.	00,64	—	0,54
Formentera	=	38.	39.	56,11	+	3,40
Montjouy	=	41.	21.	45,45	+	2,55
Barcelona	=	41.	22.	47,16	+	0,82
Perpignan	=	42.	41.	58,01	—	4,16
Carcassonne	=	43.	12.	54,31	—	1,02
Evaux	=	46.	10.	42,19	—	5,88
Pantheon	=	48.	50.	48,94	+	0,37
Dünkirchen	=	51.	02.	08,74	+	3,92
Göttingen	=	51.	31.	47,85	—	2,76
Altona	=	53.	32.	45,27	+	2,76
Dunnose	=	50.	37.	08,21	—	1,87
Greenwich	=	51.	28.	40,00	+	0,94
Blenheim	=	51.	50.	27,90	+	3,01
Arburyhill	=	52.	13.	28,19	+	1,83
Clifton	=	53.	27.	31,99	—	3,91
Mallörn	=	65.	31.	31,06	+	1,31
Pahtawara	=	67.	08.	51,41	—	1,31.

So ist z. B. in Göttingen die Polhöhe auf dem idealen Sphäroïd kleiner, als auf der Erde selbst, und man kann hieraus schliessen, dass das Loth von der Normale nach Süden zu abweicht. Die Totalablenkung lässt sich aber nicht angeben, so wenig als die eigentliche Richtung nach der zu das Loth abgelenkt wird; nur so viel ist einleuchtend, dass sie nach einem Punkte des Horizonts zu geht, der auf der südlichen Hälfte des Horizonts befindlich ist.

§. 240.

Wollte man die peruanische Gradmessung von diesen Untersuchungen ausschliessen, so hat man leicht die Fundamentalgleichung für x und y in diesem Fall. Man braucht nämlich nur zu den vorigen beiden Fundamentalgleichungen

$$0 = -\ 66{,}84 + 2100{,}90\,u + 1763{,}16\,y$$
$$0 = -\ 173{,}78 + 1763{,}13\,u + 9348{,}66\,y$$

wie man bei geringer Ueberlegung sieht, die Gleichungen

$$0 = +\ 26{,}87 - 62{,}94\,u - 310{,}68\,y$$
$$0 = +\ 132{,}63 - 310{,}68\,u - 1533{,}48\,y$$

zu addiren, wo die hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Grössen nichts anders sind, als die Werthe von $11{,}22\pi'$ und $55{,}38\pi'$. Man erhält dann:

$$0 = -\ 39{,}97 + 2037{,}96\,u + 1452{,}48\,y$$
$$0 = -\ 41{,}15 + 1452{,}45\,u + 7815{,}18\,y.$$

Hieraus ergeben sich für y und u die Werthe

$$y = +\ 0{,}0018677$$
$$u = +\ 0{,}0182820.$$

$$\text{Abplattung} = \frac{1}{302{,}22}$$

Dreihundert und sechszigster Theil des Erdmeridians $= 57008{,}72$ Toisen.

Dieser Werth der Abplattung ist von dem, welchen Walbeck fand, nur wenig unterschieden, der mittlere Werth des Grades hingegen, liegt dem §. 236. entwickelten sehr nahe. Durch diese Werthe von u und y findet sich $\pi' = +\ 2{,}13$, $\pi'' = -\ 1''95$. Die übrigen Fehler zeigt folgende Tabelle:

$\omega' = -0''40$,	$\omega'' = +0''40$.	
$\Omega' = -0''97$,	$\Omega'' = -1''05$,	$\Omega''' = +3''28$,
		$\Omega^{IV} = -1''25$.
$\varphi' = +3''54$,	$\varphi'' = +2''58$,	$\varphi''' = +0''84$,
		$\varphi^{IV} = -4''20$.
$\varphi^{V} = -1''07$,	$\varphi^{VI} = -5''97$,	$\varphi^{VII} = +0''38$,
		$\varphi^{VIII} = +3''94$.
$\gamma' = -2''80$,	$\gamma'' = +2''80$.	
$\varepsilon' = -1''93$,	$\varepsilon'' = +0''91$,	$\varepsilon''' = +3''00$,
	$\varepsilon^{IV} = +1''84$,	$\varepsilon^{V} = -3''83$.
$\sigma' = +1''23$,	$\sigma'' = -1''23$.	

Die Summe der Quadrate der Fehler macht 154,99; dies mit 23 — 8 = 15 dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen, giebt

den mittlern Fehler einer Polhöhe = 3''214

also um 0''021 grösser als in dem Fall, wenn man die peruanische Messung mit in Rechnung zieht. Man erhält ferner das Gewicht von $u = 1768$,

— — — $y = 6785$,

den mittlern zu befürchtenden Fehler in $u = 0{,}07643$

— — — — — — $y = 0{,}03902$

und hieraus $\Delta\alpha = 11{,}8$, $\Delta f = 4{,}5$, indem man nach der §. 238. angegebenen Methode verfährt.

§. 241.

In den folgenden Rechnungen wollen wir immer die §. 236. angegebene Abplattung nebst dem Werthe des dreihundert und sechszigsten Theils des Erdmeridians, oder den mittlern Grad des Meridians zum Grunde legen, und um die Rechnungen zu erleichtern, sollen die briggschen Logarithmen dieser Grössen ein für allemal hier mit bemerkt werden.

$$\log \alpha = 7.5253196 - 10$$
$$\log f = 4.7559408.$$

Multiplicirt man die Länge $f = 57008{,}662$ Toisen mit 90, so erhält man die Länge des Quadranten des Erdmeridians = 5130779,58 Toisen. Nun war die definitive Bestimmung der Länge des Meter = 0,513074 Toisen, welcher Werth aus der französischen Messung von Formentera bis Dünkirchen folgte, indem man der Länge des Quadranten des Erdmeridians zehn Millionen Meter beilegte, also enthält

eigentlich die Länge des Erdquadranten 10000007,71 Meter.

§. 242.

Wir haben aus §. 225. die Gleichung

$$90 f = \tfrac{1}{2} \pi a \left(1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha\right).$$

wo a die halbe grosse Axe oder den Halbmesser des Aequators bedeutet. Bezeichnet man also den Quadranten des Erdmeridians durch E, den Umfang des Erdaequators durch Q, so ist $E = 90 f$, $Q = 2\pi a$, also wenn man vermittelst dieser Werthe die Grössen f, a aus voriger Gleichung eliminirt

$$E = \tfrac{1}{4} Q \left(1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha\right)$$

und wenn man mit dem Coefficienten von Q auf beiden Seiten dividirt

$$Q = 4E \left(1 + \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{3}{16} \alpha\alpha\right).$$

oder in Toisen ausgedrückt, findet sich

Umfang des Aequators = 20557561 Toisen

Da dieselbe Länge auch 5400 geographische Meilen beträgt, so erhält man

die geographische Meile	=	3806,955 Toisen
— — —	=	7421,340 Meter.

Ferner ergiebt sich noch

Halbmesser des Aequators	=	3271837,5 Toisen $= a$
Halbe Erdaxe	=	3260920,3 — $= b$

§. 243.

Bezeichnen wir den Halbmesser des Krümmungskreises an irgend einer Stelle des Meridians, deren Polhöhe $= v$ ist durch ϱ, so ist bekanntlich $\rho dv = ds$; nun haben wir aus §. 225. die Gleichung

$$ds = a dv \left[\left(1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha\right) - \tfrac{3}{2} \alpha \cos 2v. + \tfrac{15}{16} \alpha\alpha. \cos 4v\right]$$

also auch, wenn statt ds, ϱdv gesetzt und auf beiden Seiten durch dv dividirt wird

$$\varrho = a\left(1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha\right) - \tfrac{3}{2} a\alpha \cos 2v + \tfrac{15}{16} a\alpha\alpha \cos 4v.$$

Dies giebt in Zahlen, vermittelst der Werthe von a und α

$$\rho = 3266356^t - 16451^t \cos 2v + 34^t \cos 4v.$$

Für $v = 45°$ erhält man $\rho = 3266322$ Toisen.

§. 244.

Setzt man die Länge des Radius Vectors der Erde für einen Punkt, dessen Coordinaten vom Mittelpunkt derselben ausgerechnet x, y, z sind, gleich r, d. h. die Länge derjenigen Linie, welche vom Mittelpunkte der Erde bis an den besagten Punkt gezogen wird, so hat man

$$rr = xx + yy + zz.$$

und da §. 179. für das elliptische Sphäroïd

$$x = a \cos t.\cos u, \quad y = a \sin t.\cos u, \quad z = b \sin u$$

gesetzt wurde, so hat man indem diese Werthe in dem Ausdruck von rr substituirt werden

$$rr = aa \cos u^2 + bb \sin u^2.$$

Nun war ferner $a \operatorname{tang} u = b \operatorname{tang} v$, also

$$\cos u^2 = \frac{aa \cos v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

$$\sin u^2 = \frac{bb \sin v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2},$$

und wenn man diese Werthe in vorigen Ausdruck substituirt, so kommt

$$rr = \frac{a^4 \cos v^2 + b^4 \sin v^2}{aa \cos v^2 + bb \sin v^2}.$$

Setzt man statt b, $a(1-\alpha)$, so wird auch mit Vernachlässigung der Potenzen von α die das Quadrat übersteigen,

$$rr = aa.\frac{1-\alpha(4-6\alpha)\sin v^2}{1-\alpha(2-\alpha)\sin v^2}$$

$$= aa[1-2\alpha \sin v^2 - 4\alpha\alpha \sin v^4 + 5\alpha\alpha \sin v^2]$$

wo der letzte Ausdruck dadurch gefunden ist, dass man mit dem Nenner wirklich in den Zähler dividirt hat. Zieht man vermittelst des binomischen Lehrsatzes die Quadratwurzel aus, so wird

$$r = a[1-\alpha \sin v^2 + \tfrac{5}{2}\alpha\alpha \sin v^2 - \tfrac{5}{2}\alpha\alpha \sin v^4].$$

Man setze $\sin v^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2v$, $\sin v^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2v + \frac{1}{8}\cos 4v$, so erhält man, indem der Ausdruck von r nach dem Vielfachen des Winkels v geordnet wird

$$r = a(1-\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{5}{16}\alpha\alpha) + \tfrac{1}{2}\alpha \cos 2v - \tfrac{5}{16}\alpha\alpha \cos 4v$$

oder in Zahlen ausgedrückt

$$r = 3263365' + 5484' \cos 2v - 11 \cos 4v.$$

§. 245.

Bezeichnet man den Winkel, welchen der Radius Vector r mit der Ebene des Aequators macht, durch φ, so hat man $\frac{z}{r} = \sin\varphi$, und dieser Winkel ist nichts anders, als die sogenannte geocentrische Breite des Ortes. Wir wollen nun aufsuchen welcher Unterschied im Allgemeinen zwischen der geocentrischen und der geographischen Breite, oder der Polhöhe statt findet.

Es ist $z = b \sin u$, $r = \sqrt{aa \cos u^2 + bb \sin u^2}$,

also $$\sin\varphi = \frac{b \sin u}{\sqrt{aa \cos u^2 + bb \sin u^2}},$$
$$= \frac{b \tang u}{\sqrt{aa + bb \tang u^2}}.$$

Setzt man hierin statt $\tang u$; $\frac{b}{a} \tang v$, so wird

$$\sin\varphi = \frac{bb \tang v}{\sqrt{a^4 + b^4 \tang v^2}},$$
$$\cos\varphi = \frac{aa}{\sqrt{a^4 + b^4 \tang v^4}},\ \text{folglich}$$
$$\tang\varphi = \frac{bb}{aa} \tang v.$$

oder auch $\tang\varphi = (1-\alpha)^2 \tang v$. Es wird also φ immer kleiner als v bleiben; setzt man daher $v = \varphi + \lambda$, so wird

$$\tang(v-\lambda) = (1-\alpha)^2 \tang v.$$

Hieraus erhält man leicht

$$\tang\lambda = \alpha(1 + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin 2v - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin 4v.$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem λ und v als veränderlich betrachtet werden und setzt $d\lambda = 0$, so erhält man zur Bestimmung des Werthes von v, welcher $\frac{d\lambda}{dv}$ Null macht

$$0 = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos 2v - \alpha \cos 4v \quad \text{oder auch}$$
$$0 = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos 2v - 2\alpha \cos 2v^2 - \alpha,$$

d. man findet $\cos 2v = \alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha$, und bei diesem 'erthe von v wird der Unterschied λ zwischen der graphischen und geocentrischen Breite ein Maxim seyn.

Will man statt der $tang\,\lambda$ den Winkel λ selbst ben, so braucht man nur zu bemerken, dass

$$\lambda = tang\,\lambda - \tfrac{1}{3}\, tang\,\lambda^3 + \ldots;$$

lange man aber alle Potenzen von α, die höher als s Quadrat sind, weglässt, wird $\lambda = tg\,\lambda$ gesetzt erden müssen, da das Glied $tg\,\lambda^3$, schon mit dem ibus von α anfangen würde. Es ist daher auch

$$\lambda = \alpha(1 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin 2v - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha \sin 4v. \text{ oder}$$

$$\lambda = 692''4 \sin 2v - 1'' \sin 4v.$$

en Werth von v wo λ ein Grösstes ist, findet man : 44° 54′ 15″.

§. 246.

Ist der Abstand eines Punktes von der Drehungse der Erde gleich R, so hat man $RR = xx + yy$, ler auch, da $x = a \cos t \cos u$, $y = a \sin t \cos u$, $R = aa \cos u^2$. Zerlegt man die ganze Erde in nendlich schmale Scheiben, indem dieselbe durch benen geschnitten wird, welche dem Aequator parallel liegen, so ist der körperliche Inhalt einer solnen Scheibe die als ein Cylinder von unendlich kleien Höhen betrachtet werden kann $= \pi RRdz$. Nun 'ar aber auch $z = b \sin u$, also $dz = b \cos u\, du$; ezeichnet man daher den Inhalt dieser Scheibe durch V, so wird $dV = aab \cos u^3\, du$, oder da $\cos u^3 = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$, so ist auch

$$dV = \frac{\pi aab}{4}(\cos 3u.\, du + 3\cos u.\, du).$$

ntegrirt man dies, so kommt

$$V = \text{Const.} + \frac{\pi aab}{4}(\tfrac{1}{3}\sin 3u + 3\sin u).$$

Am Aequator ist $z = 0$, also auch $u = 0$; soll aber am Aequator $V = 0$ seyn, so ist Const. $= 0$, nd

$$V = \frac{\pi aab}{4}(\tfrac{1}{3}\sin 3u + 3\sin u).$$

Am Pole hat man $z = b$, also $u = 90°$, und enn man diesen Werth in vorige Formel setzt, so

erhält man den körperlichen Inhalt des halben Erdsphäroïds $= \frac{2}{3}\,\pi aab$, also den Inhalt der ganzen Erde $= \frac{4}{3}\,\pi aab$. Um dies in geographischen Cubikmeilen auszudrücken, schreibe man die Formel so

$\frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot (2a\pi)^3$. Nun ist $2a\pi$ der Umfang des Ae. $= 5400$ geographischen Meilen, also wird der Inhalt der Erde $= \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot 5400)^3 = 26502$ Millionen Cubikmeilen. Der Halbmesser einer Kugel deren Inhalt dem der Erde gleich ist, wird

$$= \sqrt[3]{aab} = 3268194 \text{ Toisen.}$$

§. 247.

Der Inhalt der Fläche, welcher von zwei Parallelkreisen eingeschlossen wird, deren Polhöhen v und $v + dv$ sind, beträgt $2\pi R ds = dS$, wo R die Bedeutung des vorigen Paragraphs beibehält, und ds das Element des elliptischen Meridians angiebt. Nun ist $R = a \cos u$, $\cos u = \frac{a \cos v}{\sqrt{aa \cos v^2 + bb \sin v^2}}$

$$= \frac{\cos v}{\sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2}}, \quad ds = \frac{a(1 - \varepsilon\varepsilon)\, dv}{\sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2}^{\,3}}, \text{ folglich}$$

$$dS = 2\pi aa(1 - \varepsilon\varepsilon)\, \frac{dv. \cos v}{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin v^2)^2}$$

$$= 2\pi aa(1 - \varepsilon\varepsilon).\, d.\, \sin v.\, [1 + 2\varepsilon\varepsilon \sin v^2 + 3\varepsilon^4 \sin v^4]$$

folglich integrirt

$$S = Const. + 2\pi aa(1 - \varepsilon\varepsilon). \sin v\, (1 + \tfrac{2}{3}\,\varepsilon\varepsilon \sin v^2 + \tfrac{3}{5}\,\varepsilon^4 \sin v^4).$$

Es ist aber auch

$$\sin v^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2v, \quad \sin v^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos 2v + \tfrac{1}{8} \cos 4v,$$

also

$$S = Const. + 2\pi aa \sin v \left[(1 - \tfrac{2}{3}\,\varepsilon\varepsilon - \tfrac{13}{120}\,\varepsilon^4) - (\tfrac{1}{3}\,\varepsilon\varepsilon - \tfrac{1}{30}\,\varepsilon^4) \cos 2v + \tfrac{3}{40}\,\varepsilon^4 \cos 4v \right]$$

oder wenn man statt der Eccentricität die Abplattung einführt, so dass $\varepsilon\varepsilon = 2\alpha - \alpha\alpha$.

$$S = Const. + 2\pi aa \sin v \left[(1 - \tfrac{4}{3}\,\alpha + \tfrac{7}{30}\,\alpha\alpha) - (\tfrac{2}{3}\,\alpha - \tfrac{7}{15}\alpha\alpha) \cos 2v + \tfrac{3}{10}\,\alpha\alpha \cos 4v \right]$$

Nimmt man das Integral von $v = 0$ bis $v = 90°$, so erhält man die Oberfläche des halben Erdsphäroïds, die wir durch $\frac{1}{2}\Sigma$ bezeichnen wollen. Es wird dann

$$\Sigma = 4\pi aa\,(1 - \tfrac{2}{3}\,\alpha + \tfrac{1}{15}\,\alpha\alpha)$$

welcher Ausdruck die Oberfläche der ganzen Erde angiebt. Man kann diesen Werth auch so schreiben

$$\Sigma = \frac{(2\pi a)^2}{\pi}\,(1 - \tfrac{2}{3}\,\alpha + \tfrac{1}{15}\,\alpha\alpha).$$

$$= \frac{(5400)^2}{\pi}(1 - \tfrac{2}{3}\,\alpha + \tfrac{1}{15}\alpha\alpha) = 92611764 \text{ Quadratm.}$$

Soll S Null seyn wenn $v = 0$ ist, so fällt die Constante aus dem Integral weg, und es bleibt

$$S = 2\pi aa\,\sin v \Big[(1 - \tfrac{4}{3}\,\alpha + \tfrac{7}{30}\,\alpha\alpha) - (\tfrac{2}{3}\,\alpha - \tfrac{7}{15}\,\alpha\alpha)\cos 2v + \tfrac{3}{10}\,\alpha\alpha)\cos 4v.\Big]$$

Dividirt man diese Gleichung durch die andere

$$\Sigma = 4\pi aa\,(1 - \tfrac{2}{3}\,\alpha + \tfrac{1}{15}\,\alpha\alpha)$$

so kommt, wenn auf beiden Seiten durch Σ multiplicirt wird

$$S = \tfrac{1}{2}\Sigma\,\sin v \Big[(1 - \tfrac{2}{3}\,\alpha - \tfrac{5}{18}\,\alpha\alpha) - (\tfrac{2}{3}\,\alpha - \tfrac{1}{45}\,\alpha\alpha)\cos 2v + \tfrac{3}{10}\,\alpha\alpha\,\cos 4v.\Big]$$

oder, wenn die Coefficienten in Zahlen ausgedrückt werden

$$S = 4620257\,\sin v - 10354\,\sin v\,\cos 2v + 16\,\cos 4v.\,\sin v.$$

Man findet hierdurch den Flächeninhalt einer Zone, die vom Aequator und dem Parallelkreise eingeschlossen ist auf welchem die Polhöhe v statt findet, in Quadratmeilen ausgedrückt.

Wollte man nicht den Inhalt der ganzen Zone, sondern blos den des Stücks derselben, welche von der Länge t' bis zur Länge t'' sich erstreckt, so würde man um diesen Inhalt x zu erhalten, sich der Proportion $S : x = 360 : t'' - t'$ bedienen müssen.

§. 248.

Setzt man in der Gleichung §. 225.

$$\frac{s\pi}{180 f} = \delta - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha)\,\sin\delta.\ \cos(2v + \delta) + \tfrac{15}{32}\,\sin 2\delta\,\cos(4v + 2\delta)$$

die Amplitude δ gleich einem Grad, so giebt der daraus hervorgehende Werth von s die Länge eines

Grades dessen südlicher Endpunkt die Polhöhe v hat. Man findet in Zahlen die Formel zur Berechnung der Länge eines Grades

$$s = 57008^t,662 - 287^t,116 \; cos(2v + 1°) + 0^t600 \; cos(4v + 2°).$$

Bezeichnet man die Längen der Grade die bei den Polhöhen $v + 1°$, $v + 2°$ anfangen, durch $s + \Delta s$ und $s + 2\Delta s + \Delta\Delta s$, so hat man

$$\Delta s = 10,0217 \; sin(2v + 2°) - 0,0419 \; sin(4v + 4°)$$
$$\Delta\Delta s = 0,3498 \; cos(2v + 3°) - 0,0029 \; cos(4v + 6°).$$

§. 249.

Wenn zwei Oerter auf einem und ebendemselben Meridian liegen, so lässt sich ihre Entfernung von einander, an der Oberfläche der Erde gemessen, leicht dureh die Formel welche s ausdrückt berechnen, da s die Länge eines Meridianbogens ist. Allein wenn beide Oerter nicht unter einerlei Meridian sich befinden, so ist die Aufgabe der Bestimmung der Entfernung beider Oerter von einander nicht sogleich aufzulösen. Wir haben nämlich aus §. 179. das durch ds bezeichnete Linearelement der Oberfläche der Erde, indem dieselbe als elliptisches Sphäroïd betrachtet wird,

$$ds = \sqrt{(aa \cos u^2 \, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2) \, du^2)}$$

wo unter dem Wurzelzeichen zwei von einander unabhängige Differentiale dt und du vorkommen, und man wird diesen Ausdruck nicht integriren können, wenn nicht vorher eine gewisse Relation zwischen t und u eingeführt wird, so dass t als Function von u angegeben werden kann, und die obige Formel sich auf $ds = U . du$ reducirt, wo U eine bestimmte Function von u bedeutet. Die Voraussetzung, dass t einer constanten Grösse gleich sey, gab uns eine integrable Formel, und zeigte die Länge des Meridianbogens.

Man könnte nun auf den Einfall kommen die Entfernung zweier Oerter von einander auf folgende Art zu bestimmen. An demjenigen Orte, der den Anfang der Messung ausmacht, ziehe man eine Verticallinie oder Normale, und lege durch dieselbe, so wie durch den zweiten Punkt, dessen Entfernung vom

ersten gesucht wird, eine Ebene, so wird die Lage dieser Ebene vollständig bestimmt seyn, und die Oberfläche der Erde in einer krummen Linie schneiden. Das zwischen beiden Punkten enthaltene Stück dieser krummen Linie kann dann als Maass der Entfernung angenommen werden. Allein wenn man dieselbe Operation am zweiten Punkte vornimmt und nach dem ersten zugeht, so wird man eine andere Länge im Allgemeinen erhalten, da beide krumme Linien nicht zusammenfallen. Sollte nämlich die erste Länge mit der zweiten übereinstimmen, so müsste die krumme Linie in beiden Fällen dieselbe seyn, man möchte vom ersten Punkt oder vom zweiten ausgehen, und hierzu würde erforderlich seyn, dass die erste Ebene auch durch die am zweiten Punkt gezogene Normale hindurchginge, folglich müssten beide Normalen sich schneiden. Allein diese Bedingung wird nur in besondern Fällen, wo die beiden Punkte eine gewisse Lage gegen einander haben, erfüllt, welches sich leicht auf folgende Weise zeigen lässt.

Man bezeichne die drei Coordinaten des ersten Punktes durch x, y, z, die des zweiten durch x', y', z', so wird man vermöge der gegebenen Oberfläche der Erde die beiden Differentialgleichungen

$$dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx' + q'dy'$$

erhalten, wo p und q Functionen von x und y, p' und q' Functionen von x' und y' sind. Sind die allgemeinen Coordinaten eines Punktes der Normale am ersten Orte ξ, η, ζ, am zweiten ξ', η', ζ', so hat man die Gleichungen für beide Normalen:

$$(\xi - x) + p(\zeta - z) = 0, \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0.$$
$$(\xi' - x') + p'(\zeta' - z') = 0, \quad (\eta' - y') + q'(\zeta' - z') = 0.$$

Sollen beide Linien sich schneiden, so müssen die Coordinaten des Durchschnittspunktes für beide Linien dieselben seyn. Es wird daher für diesen Punkt $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, $\zeta = \zeta'$ werden. Die erste Bedingung giebt die Gleichung

$$(x' - x) + \zeta(p' - p) + z'p' - zp = 0;$$

die zweite Bedingung erfordert, dass

$$(y' - y) + \zeta(q' - q) + z'q' - zq = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen ζ, so erhält man nach einiger Reduction

$$1) \; (x' - x)(q - q') + (z' - z)(p'q - pq') = (y' - y)(p - p')$$

und diese Gleichung müsste ganz allgemein erfüllt werden, d. h. identisch seyn, wenn immer zwei an beliebigen Punkten der Oberfläche gezogene Normalen sich schneiden sollten. Dies ist aber keineswegs der Fall.

§. 250.

Sieht man diese Oberfläche als eine durch Umdrehung einer ebenen Figur entstandene an, wie es bei der Erde der Fall ist, und nimmt die Axe, welcher die Coordinaten z, z' parallel sind, als Umdrehungsaxe an, so wird die Gleichung einer solchen Oberfläche, wie früher gezeigt worden, durch $z = \varphi(xx + yy)$ ausgedrückt, wo φ eine willkührlich zu nehmende Function bedeutet. Diese Gleichung giebt, wenn man differentiirt

$$dz = 2x\,dx\,\varphi'(xx + yy) + 2y\,dy\,\varphi'(xx + yy)$$
$$dz' = 2x'dx'\varphi'(x'x' + y'y') + 2y'dy'\varphi'(x'x' + y'y')$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denen im vorigem Paragraph angenommenen

$$dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx' + q'dy'$$

so findet sich

$$p = 2x\varphi'(xx + yy), \quad q = 2y\varphi'(xx + yy)$$
$$p' = 2x'\varphi'(x'x' + y'y'), \quad q' = 2y'\varphi'(x'x' + y'y')$$

also auch $py = qx$, $p'y' = q'x'$.

Setzt man in der Gleichung (1), $z = z'$, so reducirt sie sich auf

$$2)\ (x' - x)(q - q') = (y' - y)(p - p').$$

In diesem Falle ist aber $\varphi(xx + yy) = \varphi(x'x' + y'y')$, also auch $xx + yy = x'x' + y'y'$, und daher wird $\varphi'(xx + yy) = \varphi'(x'x' + y'y')$, folglich geben die Gleichungen für p, q, p', q', die beiden neuen Gleichungen $px' = p'x$, $qy' = q'y$.

Zieht man bei der ersten auf beiden Seiten px, in der zweiten auf beiden Seiten qy ab, so kann man dieselben auch so schreiben

$$p(x' - x) = x(p' - p), \quad q(y' - p) = y(q' - q);$$

Substituirt man die sich hieraus ergebenden Werthe von $x' - x$ und $y' - y$ in der Gleichung (2), so wird

$$\frac{x}{p}(q - q')(p' - p) = \frac{y}{q}(q' - q)(p - p').$$

oder $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$, $xq = yp$. Diese Gleichung ist aber identisch, wie man aus dem vorigen sieht. Ist daher $z = z'$, so schneiden sich die an diesen beiden Punkten gezogenen Normalen wirklich, und dieses findet statt, wenn beide Punkte auf demselben Parallelkreise liegen.

§. 251.

Setzt man $pq' - p'q = 0$, so reducirt sich die Gleichung (1) ebenfalls auf die Gleichung (2). Zieht man von der Gleichung $pq' = p'q$, die identische $pq = pq$ ab, so wird

$$p\,(q'-q) = q\,(p'-p),$$

also wenn man den hieraus sich ergebenden Werth von $q'-q$ in die Gleichung

$$(x'-x)\,(q'-q) = (y'-y)\,(p'-p)$$

setzt, so erhält man

$$q\,(x'-x) = p\,(y'-y).$$

Indem man in dem Ausdruck $pq' - p'q = 0$, die Werthe von p, p', q, q', substituirt, erhält man $xy' - yx' = 0$, also $(y'-y)\,x = y\,(x'-y)$, folglich wenn diese Gleichung mit der andern $q\,(x'-x = p(y'-y)$ verbunden wird, so kommt $qx = py$, welches auch identisch Null ist.

Die Gleichung $xy' - yx' = 0$, giebt $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$, also $y = kx$, $y' = kx'$ wo k eine willkührliche Grösse ist. Man sieht hieraus, dass der zweite Fall, dass die Normalen sich schneiden, dann statt findet, wenn die beiden Punkte auf einem und demselben Meridian liegen.

§. 252.

Die Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche der Erde, lässt sich also nicht auf die früher angegebene Art bequem finden. Allein man kann sehr einfach zu der zweckmässigsten Art gelangen die Entfernung auszumitteln, wenn man nur die Methode betrachtet, nach welcher dieselbe mechanisch durch

Maassstäbe bestimmt wird. Indem man nämlich von einem Punkte der Erde bis zu einem andern misst, legt man einen Maassstab horizontal auf Unterlagen, und an diesen ebenfalls horizontal einen zweiten, so dass beide Maassstäbe zwar nicht in gerader Linie, da die Erde in ihren kleinsten Theilen gekrümmt ist, aber doch in einer Ebene liegen, die zugleich durch die am Berührungspunkte beider Stücke gezogene Normale geht. Genau genommen wird freilich die Länge der ganzen Linie von der Länge der Maassstäbe selbst abhängen, die desto kleiner ausfällt, je kürzer die gebrauchten Maassstäbe selbst sind, allein man sieht leicht, dass die Abnahme eine Gränze haben muss, die natürlich dann statt findet, wenn die Maassstäbe unendlich klein sind, oder wenn man die ganze Linie in ihre Elemente zerlegt. Die auf diese Art bestimmte Linie heisst die geodätische Linie. Um ihre Natur analytisch auszudrücken, wird man die Gleichung einer krummen Linie auf einer Oberfläche suchen müssen, welche von der Beschaffenheit ist, dass eine durch zwei in derselben auf einander folgenden Elemente gelegte Ebene, zugleich durch die am Punkte des Zusammenstossens beider Elemente gezogene Normallinie geht.

Es seyen daher die Coordinaten des Anfangspunktes des ersten Elements $x - dx$, $y - dy$, $z - dz$; die des Endpunktes, welcher zugleich die des Anfangspunktes des zweiten Elements sind, x, y, z; und die Coordinaten des Endpunktes des zweiten Elements $x + dx$, $y + dy + ddy$, $z + dz + ddz$; wo, wie man sieht dx als gleichförmig wachsend angenommen wird. Wir nehmen an, die Gleichung der Ebene die durch diese drei Punkte geht sey

$$Z = AZ + BX + C.$$

wo X, Y, Z die allgemeinen Coordinaten jedes Punktes der Ebene, A, B, C drei noch zu bestimmende Coefficienten sind. Setzt man statt X, Y, Z nach und nach die Coordinaten der drei Punkte, so erhält man

$$z - dz = A(x - dx) + B(y - dy) + C,$$
$$z = Ax + By + C.$$
$$z + dz + ddz = A(x + dx) + B(y + dy + ddy) + C;$$

welche Gleichungen sich auf folgende reduciren

$$z = Ax + By + C.$$
$$dz = Adx + Bdy\,; \quad ddz = Bddy.$$

Zieht man die erste derselben von der allgemeinen ab, so bleibt

$$Z - z = A(X - x) + B(Y - y),$$

und die beiden letzten Gleichungen geben

$$A = \frac{dzddy - dyddz}{dxddy}, \quad B = \frac{ddz}{ddy},$$

so dass also die vollständige Gleichung der gesuchten Ebene

$$Z - z = \frac{dzddy - dyddz}{dxddy}(X - x) + \frac{ddz}{ddy}(Y - y)$$

wird. Nun soll aber diese Ebene zugleich die Normale, an dem Punkte dessen Coordinaten x, y, z sind, in sich enthalten. Die beiden Gleichungen für diese Normale sind (§. 249.)

$$p(Z - z) + (X - x) = 0, \quad q(Z - z) + (Y - y) = 0$$

folglich wird, wenn wir diese Werthe von $X - x$, $Y - y$ in obige Gleichung substituiren, und dann durch $dxddy$ multipliciren:

$$dxddy + (dzddy - dyddz)\,p + qdxddz = 0.$$

welches die Differentialgleichung der geodätischen Curve, ohne weitere Rücksicht auf die Gestalt der Oberfläche der Erde, blos als continuirlich krumme Oberfläche betrachtet, darstellt.

Setzt man statt dz seinen Werth $pdx + qdy$, so kommt

$$(1 + pp)\,dxddy + pqdy.ddy = (pdy - qdy)\,ddz.$$

Nun ist aber auch, wenn man die Gleichung $dz = pdx + qdy$ differentiirt

$$ddz = dpdx + dqdy + qddy.$$

und wenn man diesen Ausdruck von ddz in vorige Gleichung setzt

$$1 + pp + qq)\,dxddy = (pdy - qdx)\,dpdx + dqdy).$$

§. 253.

Es lässt sich leicht zeigen, dass die auf diese Art durch zwei Punkte geführte Curve, unter allen andern die kleinste Länge hat, so dass also die geodätische Linie die kürzeste Entfernung misst. Man

hat nämlich, wenn ds irgend ein Linearelement bedeutet,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

oder da zwischen den drei Differentialen die Relation $dz = pdx + pdy$ statt findet, so wird auch, indem dieser Werth von dz in ds substituirt wird

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + ppdx^2 + 2pqdxdy + qqdy^2}.$$

Die Relation zwischen x und y, die man noch haben muss um diesen Ausdruck integriren zu können, muss nun so gefunden werden, dass $\int ds$ den kleinsten Werth erhalte, d. h. man wird $\delta . \int ds = 0$ haben müssen, wo δ das Zeichen der Variation bedeutet. Wir werden bei der auszuführenden Variation blos y als variabel annehmen, da zwischen x und y keine weitere Bedingung vorhanden ist, so dass also $\delta x = 0$ gesetzt werden kann. Man hat also

$$\delta . \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + ppdx^2 + 2pqdxdy + qqdy^2} = 0.$$

oder den Grundsätzen der Variationsrechnung zufolge, auch

$$\int \delta . \sqrt{dx^2 + dy^2 + ppdx^2 + 2pqdxdy + qqdy^2} = 0.$$

Führt man die Variation wirklich aus, und bedenkt, dass in den Grössen p und q auch y vorkommt, so wird, da $\delta . dy = d . \delta y$,

$$0 = \int \frac{dy}{ds} d\delta y + \int p . \frac{dx}{ds} dx\delta p + \int q \frac{dy}{ds} dx\delta p$$

$$+ \int p \frac{dy}{ds} dx\delta q + \int pq \frac{dx}{ds} d\delta y . + \int q \frac{dy}{ds} dy\delta q$$

$$+ \int qq \frac{dy}{ds} d\delta y.$$

Nun sind aber die vollständigen Variationen von p und q,

$$\delta p = \left(\frac{dp}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y.$$

$$\delta q = \left(\frac{dq}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dq}{dy}\right) \delta y.$$

da p und q Functionen von x und y sind. Wir nehmen aber $\delta x = 0$ an, also bleiben die Werthe

$\delta p = \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y$, $\delta q = \left(\frac{dq}{dy}\right) \delta y$. Setzt man diese in vorige Gleichung, so wird

$$0 = \int \frac{dy}{ds} . d\delta y + \int p \frac{dx}{ds} dx \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y + \int pq \frac{dx}{ds} . d\delta y$$
$$+ \int q \frac{dy}{ds} dx . \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y + \int p \frac{dy}{ds} dx . \left(\frac{dq}{dy}\right) \delta y$$
$$+ \int q \frac{dy}{ds} dy \left(\frac{dq}{dy}\right) dy + \int qq . \frac{dy}{ds} d\delta y .$$

Alle diese Integrale müssen auf die ganze Länge der Curve ausgedehnt werden; sie haben daher einerlei Gränzen. Es ist nun

$$\int p \frac{dx}{ds} dx \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y + \int q \frac{dy}{ds} dx . \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y$$
$$= \int [pdx + qdy] \left(\frac{dp}{dy}\right) . \frac{dx}{ds} \delta y$$
$$= \int \left(\frac{dp}{dy}\right) . \frac{dx}{ds} . dz . \delta y .$$

und eben so auch die Summe der zwei andern Integrale

$$\int q \frac{dy}{ds} dy \left(\frac{dq}{dy}\right) \delta y + \int p \frac{dy}{ds} dx \left(\frac{dq}{dy}\right) \delta y$$
$$= \int \left(\frac{dq}{dy}\right) \frac{dy}{ds} . dz \delta y .$$

folglich alle vier Integrale zusammen genommen, geben

$$\int \frac{dz}{ds} . \left[\left(\frac{dp}{dy}\right) dx + \left(\frac{dq}{dy}\right) dy\right] \delta y . = \int \frac{dz}{ds} dq . \delta y$$

indem man bemerkt, dass in der Gleichung $dz = pdx + qdy$, die Grössen p und q so mit einander verbunden seyn müssen, dass $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, und dann statt

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \left(\frac{dq}{dy}\right) dy = dq$$

nimmt. Auch die drei übrigen Integrale lassen sich noch etwas zusammenziehen; es wird nämlich

$$\int \frac{dy}{ds}\, d\delta y + \int pq\, \frac{dx}{ds}\, d\delta y + \int qq\, \frac{dy}{ds}\, d\delta y$$
$$= \int \frac{dy + qdz}{ds}\, d\delta y.$$

so dass sich die ganze Gleichung, die vorher aus sieben Gliedern bestand, auf

$$\int \frac{dzdq}{ds}\, \delta y + \int \frac{dy + qdz}{ds}\, d\delta y = 0.$$

reducirt. Um nun aber die beiden übrig gebliebenen Integrale zusammen addiren zu können, muss man die Grösse $d\delta y$ aus dem letzten wegbringen; dies geschieht leicht durch Integration, indem man dasselbe aus zwei Factoren $\frac{dy + qdz}{ds}$ und $d\delta y$ bestehend ansieht, und dann nach den bekannten Methoden der theilweisen Integration vermittelst der Formel $\int udv = uv - \int vdu$ integrirt. Hierdurch erhält man

$$\int \frac{dy + qdz}{ds}\, d\delta y = \frac{dy + qdz}{ds}\, \delta y$$
$$- \int dy.\, d.\left(\frac{dy + qdz}{ds}\right).$$

Man bezeichne die Werthe von q, y, z, s für den Anfangspunkt der krummen Linie durch q', y', z', s'; für den Endpunkt durch q'', y'', z'', s'', so wird der Werth des ausser dem Integralzeichen stehenden Gliedes $\frac{dy + qdz}{ds}\, \delta y$, von der ersten bis zur letzten Gränze durch die Differenz

$$\frac{dy'' - q''dz''}{ds''}\, \delta y'' - \frac{dy' - q'dz}{ds'}\, \delta y',$$

ausgedrückt werden, und es wird das zwischen denselben Gränzen genommene Integral

$$\int \frac{dy + qdz}{ds}\, d\delta y = \frac{dy'' - q''dz''}{ds''}\, \delta y$$
$$- \frac{dy' - q'ds'}{ds'}\, \delta y' - \int \delta y\; d.\left(\frac{dy + qdz}{ds}\right)$$

seyn. Nun ist aber zu bemerken, dass da die beiden Endpunkte zwischen denen die krumme Linie gezo-

gen werden soll, fest sind, die Ordinaten y' und y'' derselben, keiner Aenderung fähig sind, also $\delta y' = 0$, $\delta y' = 0$ ist, und es bleibt

$$\int \frac{dy + qdz}{ds} d\delta y = - \int \delta y . \, d. \left(\frac{dy' - q'dz'}{ds} \right).$$

Man hat daher die Gleichung welche das Minimum ausdrückt:

$$\int \frac{dzdq}{ds} \delta y' - \int \delta y . \, d. \left(\frac{dy + qdz}{ds} \right) = 0.$$

folglich, da das Differential derselben ebenfalls Null seyn muss, so kommt, indem der gemeinschaftliche Factor δy weggelassen wird

$$\frac{dzdq}{ds} - d. \left(\frac{dy + qdz}{ds} \right) = 0.$$

Differentiirt man wirklich, so kommt nach den gehörigen Reductionen

$$(ddy + qddz) \, ds = dds \, (dy + qdz).$$

§. 254.

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Gleichung mit der im vorigen Paragraph gefundenen identisch ist. Man nehme hierzu die Gleichung (§. 252.)

$$dxddy + (dzddy - dyddz) \, p + qdxddz = 0,$$

die man auch so schreiben kann:

$$(ddy + qddz) \, dx = p \, (dyddz - dzddy).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dx, und setzt statt pdx, $dz - qdy$, so kommt

$$(ddy + qddz) \, dx^2 = dzdyddz - dz^2 ddy$$
$$- qdy^2 ddz + qdzdyddy.$$

Man addire auf beiden Seiten das Product

$$(ddy + qddz) \, (dy^2 + dx^2)$$

so erhält man nach einigen Reductionen

$$(ddy + qddz) (dx^2 + dy^2 + dz^2) = dzdyddz + dy^2 ddy$$
$$+ qdzdyddy + qdz^2 ddz$$
$$= dy \, (dyddy + dzddz) + qdz \, (dyddy + dzddz)$$
$$= (dy + qdz) \, (dyddy + dzddz).$$

Nun war aber $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, also wenn man differentiirt, und den frühern Annahmen zufolge $ddx = 0$ setzt

$$dsdds = dyddy + dzddz$$

und man sieht hieraus, dass vorige Gleichung sich in diese verwandelt:

$$(ddy + qddz)\, ds^2 = (dy + qdz)\, ds.\, dds.$$

oder wenn man durch ds dividirt

$$ds\,(ddy + qddz) = dds\,(dy + qdz)$$

und diese Gleichung ist mit derjenigen, welche durch die Bedingung des Minimum gefunden wurde, völlig identisch.

§. 255.

Um nun die Gleichung der geodätischen Linie für den besondern Fall zu finden, dass wir die Erdoberfläche als ein elliptisches Sphäroïd betrachten, könnten wir die Werthe von x und y, welche dem Sphäroïd entsprechen, in voriger Gleichung substituiren. Allein da wir gefunden haben, dass die geodätische Linie immer mit der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten völlig übereinstimmt, so ist es für die Rechnung vortheilhafter, gleich vom bequemsten Ausdruck des Elements des elliptischen Sphäroïds auszugehen, und aus demselben die Gleichung der geodätischen Linie durch die Variationsrechnung zu suchen.

Wir hatten in §. 179. für das Linearelement den Ausdruck

$$ds = \sqrt{aa \cos u^2\, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2)\, du^2}\,;$$

sucht man hieraus die Variation des Integrals, indem man blos t als variabel betrachtet und setzt diese Variation Null, so wird

$$d.\frac{aa \cos u^2\, dt}{ds} = 0$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Durch Integration erhält man

$$\frac{aa \cos u^2\, dt}{ds} = c$$

wo c eine noch zu bestimmende Constante ist. Da $a \cos u\, dt$ immer kleiner als ds ist, also um so mehr $a \cos u^2\, dt < ds$, so wird auch die Constante c kleiner als a seyn, und wir wollen daher statt dieser einen Winkel 6 einführen, so dass $c = a \cos 6$; dann wird

$$a \cos u^2\, dt = ds.\, \cos 6.$$

oder wenn man quadrirt und statt ds seinen Werth setzt

$$aa \cos u^4 dt^2 = aa \cos u^2 \cos 6^2 dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2) du^2 . \cos 6^2.$$

Hieraus folgt

$$dt^2 = \frac{(aa \sin u^2 + bb \cos u^2) \cos 6}{aa \cos u^2 (\cos u^2 - \cos 6^2} du^2$$

also wenn man diesen Werth von dt^2 in dem Ausdruck des Linearelements ds substituirt,

$$ds = \cos u \; du . \sqrt{\frac{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}{\cos u^2 - \cos 6^2}} .$$

Die Integration dieses Ausdrucks ist unter endlicher Form nicht auszuführen. Man setze der Kürze wegen $\sin u = \sin 6 \sin \omega$, so erhält man

$$du . \cos u = \sin 6 . \cos \omega . d\omega$$
$$\sin u^2 = \sin \omega^2 \sin 6^2,$$
$$\cos u^2 = \cos 6^2 + \cos \omega^2 \sin 6^2$$

folglich, wenn man diese Werthe in vorigen Ausdruck setzt, so kommt

$$ds = d\omega \sqrt{(aa - bb) \sin \omega^2 \sin 6^2 + bb}$$

oder wenn man statt bb, $aa (1 - \varepsilon\varepsilon)$ substituirt

$$\frac{ds}{a} = d\omega \sqrt{1 - \varepsilon\varepsilon (1 - \sin \omega^2 \sin 6^2)}$$

Entwickelt man das Radical bis zur vierten Potenz von ε mit eingeschlossen, so ist

$$\frac{ds}{a} = d\omega - \tfrac{1}{2} \varepsilon\varepsilon d\omega (1 - \sin \omega^2 \sin 6^2) - \tfrac{1}{8} \varepsilon^4 d\omega (1 - 2 \sin \omega^2 \sin 6^2 + \sin \omega^4 \sin 6^4).$$

Setzt man statt der Potenzen von ω die Vielfachen des Winkels u, vermittelst der Gleichungen

$$\sin \omega^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2\omega, \quad \sin \omega^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos 2\omega + \tfrac{1}{8} \cos 4\omega.$$

$$\frac{ds}{a} = d\omega (1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon\varepsilon (1 - \tfrac{1}{2} \sin 6^2) - \tfrac{1}{8} \varepsilon^4 (1 - 2 \sin 6^2 + \tfrac{3}{8} \sin 6^4) - d\omega \cos 2\omega . \frac{\varepsilon\varepsilon}{4} \sin 6^2 (1 + \varepsilon\varepsilon (1 - \tfrac{1}{4} \varepsilon\varepsilon \sin 6^2)) . - d\omega . \cos 4\omega . \frac{\varepsilon^4}{64} . \sin 6^4.$$

Integrirt man diesen Ausdruck, indem zugleich statt $\varepsilon\varepsilon$, $2\alpha - \alpha\alpha$, wo α die Abplattung bedeutet, ge-

setzt wird, und alle Potenzen von α die das Quadrat übersteigen, weggelassen werden, so erhält man

$$\frac{s}{a} = Const. + \omega\,[1 - \alpha\,(1 - \tfrac{1}{4}\sin 6^2)$$
$$- \tfrac{3}{4}\,\alpha\alpha\,\sin 6^2\,(1 - \tfrac{1}{4}\sin 6^2)].$$
$$- \sin 2\omega\ \sin 6^2 \frac{\alpha}{4}[1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(3 - \tfrac{1}{2}\sin 6^2)$$
$$- \sin 4\omega.\ \sin 6^4.\frac{\alpha\alpha}{64}.$$

§. 256.

Wir haben nur noch nöthig den Winkel 6 zu bestimmen, welches durch Aufsuchung der endlichen Gleichung der geodätischen Linie geschieht. Zu diesem Ende müssen wir die Gleichung zwischen dt und du §. 255. vornehmen; sie ist

$$dt = \frac{du\cos 6}{a\cos u}.\sqrt{\frac{aa\sin u^2 + bb\cos u^2}{\cos u^2 - \cos 6^2}}$$

oder wenn man an die Stelle von bb, $aa(1 - \varepsilon\varepsilon)$ setzt

$$dt = \frac{\cos 6\ du}{\cos u}\sqrt{\frac{1 - \varepsilon\varepsilon\cos u^2}{\cos u^2 - \cos 6^2}}.$$

Man betrachte zuerst das Differential

$$dt = \frac{\cos 6\ du}{\cos u\sqrt{\cos u^2 - \cos 6^2}},$$

welches wie man sieht, aus dem Allgemeinen dadurch gebildet wird, dass $\varepsilon = 0$ genommen ist, und da dieses der Fall bei einer Kugel seyn muss, so erhalten wir durch Integration dieses Ausdrucks die Gleichung für die geodätische Linie, wenn die Erde als Kugel betrachtet wird. Um obiges Differential zu integriren, hat man

$$\frac{du}{\cos u\sqrt{\cos u^2 - \cos 6^2}} = \frac{du}{\cos u^2\sqrt{1 - \cos 6^2 - \cos 6^2\,tg\,u^2}}$$
$$= \frac{d.\ tang\,u}{\sqrt{\sin 6^2 - \cos 6^2\,tg\,u^2}}$$

also auch

$$dt = \frac{d.\ cot\ 6.\ tg\ u}{\sqrt{1 - cot\ 6^2\ tg\ u^2}}$$

und integrirt $t = C + Arc\ sin(=(cot\ 6\ tg\ u))$, wo C eine arbiträre Constante ist. Man setze daher um das allgemeine Differential leichter integriren zu können, $cot\ 6\ tg\ u = sin\ \psi$, so wird

$$cos\ u^2 = \frac{cot\ 6^2}{cot\ 6^2 + sin\ \psi^2}.$$

und man erhält den vollständigen Werth von

$dt = d\psi \sqrt{1 - ee \dfrac{cot\ 6^2}{cot\ 6^2 + sin\ \psi^2}}$. Entwickelt man die Wurzelgrösse durch den binomischen Lehrsatz, so wird

$$dt = d\psi - \tfrac{1}{2} ee. \frac{cot\ 6^2\ d\psi}{cot\ 6^2 + sin\ \psi^2} - \tfrac{1}{8} e^4 \frac{cot\ 6^4\ d\psi}{(cot\ 6^2 + sin\ \psi^2)^2}$$

so dass wir also die Integrale der beiden Differentiale

$$\frac{d\psi}{cot\ 6^2 + sin\ \psi^2},\ \frac{d\psi}{(cot\ 6^2 + sin\ \psi^2)^2}$$

zu suchen haben

Es ist nun indem wir Zähler und Nenner durch $cos\ \psi^2$ dividiren

$$\frac{d\psi}{cot\ 6^2 + sin\ \psi^2} = \frac{\dfrac{d\psi}{cos\ \psi^2}}{cot\ 6^2 + \dfrac{tang\ \psi^2}{sin\ 6^2}}$$

$$= tang\ 6.\ sin\ 6 \frac{d.\dfrac{tang\ \psi}{cos\ 6}}{1 + \dfrac{tang\ \psi^2}{cos\ 6^2}}$$

folglich auch

$$\int \frac{d\psi}{cot\ 6^2 + sin\ \psi^2} = tang\ 6.\ sin\ 6.\ Arc\ tang(= \frac{tang\ \psi}{cos\ 6}).$$

wodurch das Integral des ersten Differentials gefunden ist. Um das Integral des zweiten zu erhalten, braucht man gar nicht zu integriren, sondern blos das Integral des ersten zu differentiiren; denn be-

zeichnet man das Integral des ersten durch P, so kann man P auch als Function von β betrachten und ψ als constant annehmen; man hat dann

$$\int \frac{d\psi}{\cot \beta^2 + \sin \psi^2} = P.$$

und wenn man diesen Ausdruck nach β differentiirt

$$2 \frac{d\beta}{\sin \beta^2} \cdot \cot \beta \int \frac{d\psi}{(\cot \beta^2 + \sin \psi^2)^2} = dP$$

wo sich das Zeichen der Integration blos auf die veränderliche Grösse ψ bezieht. Bezeichnet man daher das Integral des zweiten Differentials durch Q, so ist

$$2 d\beta . \frac{\cot \beta}{\sin \beta^2} . Q = dP.$$

$$Q = \tfrac{1}{2} \left(\frac{dP}{d\beta}\right) . \tang \beta . \sin \beta^2.$$

Nun war aber gefunden, dass

$$P = \tang \beta . \sin \beta . \text{Arc} \tang (= \frac{\tang \psi}{\cos \beta})$$

also wenn man die Differentiation rücksichtlich der Grösse β ausführt

$$\left(\frac{dP}{d\beta}\right) = \tang \beta . \frac{1 + \cos \beta^2}{\cos \beta} \text{Arc} \tang (= \frac{\tang \psi}{\cos \beta})$$

$$+ \tang \beta \sin \beta^2 . \frac{\tang \psi}{\cos \beta^2 + \tang \beta^2}.$$

Multiplicirt man dies noch mit $\tfrac{1}{2} \tang \beta \sin \beta^2$, so kommt

$$Q = \tfrac{1}{2} \tang \beta^3 \sin \beta (1 + \cos \beta^2) . \text{Arc} (\tang (= \frac{\tang \psi}{\cos \beta})$$

$$+ \tfrac{1}{2} \tang \beta^2 \sin \beta^4 . \frac{\tang \psi}{\cos \beta^2 + \tang \psi^2}.$$

Nun war aber

$$t = \psi - \tfrac{1}{2} ee \cot \beta^2 . P - \tfrac{3}{4} e^4 \cot \beta^4 Q + C.$$

folglich wenn man diese Werthe von P und Q hierin substituirt

$$t - C = \psi - \tfrac{1}{2} ee \cos \beta \text{ Arc} \tang (= \frac{\tang \psi}{\cos \beta})$$

$$- \tfrac{1}{16} e^4 \cos\vartheta\,(1 + \cos\vartheta^2)\ Arc\ tang(= \frac{tang\,\psi}{\cos\vartheta})$$

$$- \tfrac{1}{8} e^4 \sin 2\vartheta^2 . \frac{tang\,\psi}{\cos\vartheta^2 + tang\,\psi^2} .$$

§. 257.

In der Ausübung sind die zu berechnenden Entfernungen gewöhnlich, rücksichtlich der Grösse der Erde, von denselben Dimensionen als die Abplattung, so dass wir der leichtern Rechnung wegen nur ihre erste Potenz oder das Quadrat von ee beibehalten wollen; dann wird

$$t - C = \psi - \alpha \cos\vartheta .\ Arc\ tang(= \frac{tang\,\psi}{\cos\vartheta}).$$

Die Grösse t ist hierbei bekanntlich die Länge des Orts, und ψ hängt blos von der geographischen Breite und einer constanten Grösse ab. Es sey nun die geographische Länge des Anfangspunktes t', der diesem entsprechende Werth von ψ, ψ', so wird

$$t' - C = \psi' - \alpha \cos\vartheta\ Arc\ log = \frac{tang\,\psi'}{\cos\vartheta} .$$

Zieht man diese Gleichung von der obern ab, und bemerkt, dass

$$Arc\ tang(= \frac{tang\,\psi}{\cos\vartheta}) - Arc\ tang = (\frac{tang\,\psi'}{\cos\vartheta})$$

$$= Arc\ tang(= \frac{\cos\vartheta\,(tang\,\psi - tang\,\psi')}{\cos\vartheta^2 + tang\,\psi\ tang\,\psi'})$$

so kommt

$$t - t' = \psi - \psi' - \alpha \cos\vartheta . Arc\ tg[= \frac{\cos\vartheta(tg\,\psi - tg\,\psi')}{\cos\vartheta^2 + tg\,\psi\ tg\,\psi'}].$$

Setzt man die Länge des letzten Punktes der Linie $= t''$, und den entsprechenden Werth von $\psi + \psi'$, so wird auch

$$t'' - t' = \psi'' - \psi' - \alpha \cos\vartheta\ Arc\ tg[= \frac{\cos\vartheta(tg\psi'' - tg\psi')}{\cos\vartheta^2 + tg\psi''\ tg\psi'}]$$

und aus dieser Gleichung muss nun ϑ bestimmt werden.

§. 258.

Wenn man in der letzten Gleichung des vorigen Paragraphs auf beiden Seiten, sowohl die Sinus als auch die Cosinus nimmt, und der Kürze wegen

$$\cos\beta.\ Arc\ tang\left[=\frac{\cos\beta\,(tang\,\psi''-tang\,\psi')}{\cos\beta^2+tang\,\psi''.\,tang\,\psi'}\right]=\mu.$$

setzt, so erhält man

$$\sin(t''-t')=\sin(\psi''-\psi')\cos a\mu-\cos(\psi''-\psi')\sin a\mu.$$
$$\cos(t''-t')=\cos(\psi''-\psi')\cos a\mu+\sin(\psi''-\psi')\sin a\mu.$$

oder wenn man bemerkt, dass $\cos a\mu=1$, $\sin a\mu=a\mu$ gesetzt werden kann

$$\sin(t''-t')=\sin(\psi''-\psi')-a\mu.\ \cos(\psi''-\psi')$$
$$\cos(t''-t')=\cos(\psi''-\psi')+a\mu.\ \sin(\psi''-\psi')$$

Bezeichnet man das Linearelement des Parallelkreises, dessen Lage durch den Winkel u bestimmt wird, durch $d\sigma$, so wird $d\sigma=a\cos u\,dt$, folglich wenn man diesen Werth in die Gleichung (§. 255.)

$$a\cos u^2.dt=ds.\ \cos\beta$$

substituirt, so wird $d\sigma\cos u=ds.\ \cos\beta$; nun sey im Anfangspunkte der geodätischen Linie der Winkel, den ihr erstes Element mit dem durch diesen Punkt gehenden Meridian macht $=A$, so wird der Winkel des Elements mit dem Parallelkreise $=90-A$ werden, da bekanntlich, wie schon früher bewiesen worden ist, Meridiane und Parallelkreise sich immer unter rechten Winkeln schneiden, also auch $d\sigma=ds\,\cos(90-A)$; der diesem Anfangspunkt entsprechende Werth von u sey gleich u', so hat man

$$ds.\ \cos(90-A)\cos u'=ds.\ \cos\beta.$$
$$\cos\beta=\sin A.\ \cos u'.$$
$$\cot\beta=\frac{\sin A.\ \cos u}{\sqrt{1-\sin A^2\cos u'^2}}.$$

Nun setzten wir §. 256. $\cot\beta\,tang\,u=\sin\psi$, also wird auch

$$\cot\beta\,tang\,u'=\sin\psi',\qquad \cot\beta\,tang\,u''=\sin\psi''.$$

und wenn man hierin statt $\cot\beta$ seinen Werth setzt, und auch $\cos\psi'$, $\cos\psi''$ sucht,

$$\sin\psi'=\frac{\sin A.\ \sin u'}{\sqrt{1-\sin A^2\cos u'^2}},$$

$$\cos\psi' = \frac{\cos A.}{\sqrt{1 - \sin A^2 \cos u'^2}},$$

$$\sin\psi'' = \frac{\sin A \;\cos u' \;\operatorname{tang} u''}{\sqrt{1 - \sin A^2 \;\cos u'^2}},$$

$$\cos\psi'' = \frac{\sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \;\cos u'^2}}{\cos u'' \;\sqrt{1 - \sin A^2 \cos u'^2}}.$$

Es ist aber auch

$$\sin(\psi'' - \psi') = \sin\psi'' \;\cos\psi' - \cos\psi'' \;\sin\psi$$
$$\cos(\psi'' - \psi') = \cos\psi'' \;\cos\psi' + \sin\psi'' \;\sin\psi'$$

also wenn man vorige Werthe hierin substituirt, und der Kürze wegen die Wurzelgrösse

$$\sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2} = R.$$

setzt, so erhält man folgende Gleichungen

$$\sin(\psi'' - \psi') = \frac{\sin A \cos u' \sin u'' \cos A - \sin A \sin u'. R}{\cos u''(1 - \sin A^2 \cos u'^2)}$$

$$\cos(\psi'' - \psi') = \frac{\cos A. R + \sin A^2 \sin u' \cos u' \sin u''}{\cos u''(1 - \sin A^2 \cos u'^2)}.$$

Substituirt man diese Werthe in beiden Gleichungen

$$\sin(t'' - t') = \sin(\psi'' - \psi') - \cos(\psi'' - \psi')\, \alpha\mu$$
$$\cos(t'' - t') = \cos(\psi'' - \psi') + \sin(\psi'' - \psi')\, \alpha\mu$$

so kommt

$$\sin(t'' - t') = \frac{\sin A \cos u' \sin u'' (\cos A - \alpha\mu \sin A \sin u')}{\cos u''(1 - \sin A^2 \cos u'^2)}$$
$$- \frac{R (\sin A \sin u' + \cos A \;\alpha\mu)}{\cos u'' (1 - \sin A^2 \cos u'^2)},$$

$$\cos(t'' - t') = \frac{\sin A \cos u' \sin u''(\sin A \sin u' + \alpha\mu \cos A)}{\cos u'' (1 - \sin A^2 \cos u'^2)}$$
$$+ \frac{R (\cos A - \alpha\mu \sin A \sin u')}{\cos u'' (1 - \sin A^2 \cos u'^2)}.$$

Man multiplicire die erste Gleichung mit $\cos A - \alpha\mu \;\sin A \;\sin u'$; die zweite Gleichung mit $\sin A \;\sin u' + \cos A.\, \alpha\mu.$ und addire die Producte, so erhält man

$$\cos A \sin(t''-t') + \sin A \sin u' \cos(t''-t')$$
$$+ \alpha\mu (\cos A \cos(t''-t') - \sin A \sin u' \sin(t''-t'))$$
$$= \frac{\sin A \cos u' \sin u'' (\cos A^2 + \sin A^2 \sin u'^2)}{\cos u'' (1 - \sin A^2 \cos u'^2)},$$

wo die in $\alpha\alpha$ multiplicirten Glieder weggelassen sind. Man sieht nun aber leicht, dass

$$\cos A^2 + \sin A^2 \sin u'^2 = 1 - \sin A^2 \cos u'^2$$

ist, also wird, wenn man die ganze Gleichung noch durch $\sin A$ dividirt,

$$\cot A . \sin(t''-t') + \sin u' \cos(t''-t')$$
$$+ \alpha\mu [\cot A \cos(t''-t') - \sin u' \sin(t''-t')]$$
$$= \cos u' . \tang u''.$$

Hieraus erhält man

$$\cot A = \frac{\cos u' \tang u'' - \sin u' \cos(t''-t') + \alpha\mu \sin u' \sin(t''-t')}{\sin(t''-t') + \alpha\mu \cos(t''-t')}.$$
$$= \frac{\cos u' \tang u'' - \sin u' \cos(t''-t')}{\sin(t''-t')}$$
$$+ \frac{\sin u' - \cos u' \tang u'' \cos(t''-t')}{\sin(t''-t')^2} \alpha\mu.$$

Wenn der Unterschied $t''-t'$ nur gering ist, so wird dieser Ausdruck zur Berechnung von A etwas unbequem seyn; man setze daher lieber statt $\cos(t''-t')$ die Entwickelung des Radicals

$$\sqrt{[1-\sin(t''-t')^2]} = 1 - \tfrac{1}{2} \sin(t''-t')^2$$
$$- \tfrac{1}{8} \sin(t''-t')^4, \text{ wodurch}$$

$$\cos u'' \cot A = \frac{\sin(u''-u')}{\sin(t''-t')} + \tfrac{1}{2} \sin u' \sin(t''-t')$$
$$+ \tfrac{1}{8} \sin(t''-t')^3 \sin u'$$
$$- \frac{\alpha\mu}{\sin(t''-t')} \Big[\frac{\sin(u''-u')}{\sin(t''-t')}$$
$$- \tfrac{1}{2} \cos u' \sin u'' \sin(t''-t')$$
$$- \tfrac{1}{8} \cos u' \sin u'' \sin(t''-t')^3\Big].$$

Wir haben nun noch die Grösse μ auszudrücken; diese ist

$$\mu = \cos 6 . \text{Arc tang} = \frac{\cos 6 (\tang \psi'' - \tang \psi')}{\cos 6^2 + \tang \psi'' . \tang \psi'}.$$

Da nun ψ'' und ψ' nur wenig von einander verschieden sind, so wird die Tangente, von welcher der Bogen genommen werden soll, nur klein seyn,

und man kann beide mit einander vertauschen. Ferner wird μ in α multiplicirt, und da wir alle höhern Potenzen von α vernachlässigen, so werden wir in der Berechnung der Grösse μ, $\alpha = 0$ annehmen können. Es wird also

$$\mu = \frac{\cos 6^2 (tang\,\psi'' - tang\,\psi')}{\cos 6^2 + tang\,\psi'\, tang\,\psi''}$$

oder wenn wir statt $\cos 6$ seinen Werth $\sin A \cos u'$ setzen

$$\mu = \frac{\sin A^2 \cos u'^2 (tang\,\psi'' - tang\,\psi')}{\sin A^2 \cos u'^2 + tang\,\psi'\, tang\,\psi''}.$$

Es ist aber auch aus den für $\sin\psi'$, $\cos\psi'$, $\sin\psi''$, $\cos\psi''$ gefundenen Formeln

$$tg\,\psi'' - tg\,\psi' = \frac{\sin(\psi'' - \psi')}{\cos\psi''\,\cos\psi'}$$

$$= \frac{(1 - \sin A^2 \cos u'^2) \cos u''}{\cos A \sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2}} . \sin(t'' - t')$$

$$tang\,\psi' . tang\,\psi'' = \frac{\sin A^2 \sin u' \cos u' \sin u''}{\cos A \sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2}}$$

folglich

$$\mu = (1 - \sin A^2 \cos u'^2) \frac{\cos u' \cos u'' \sin(t'' - t')}{\sin u' \sin u'' + R \cos A \cos u'}$$

wo $R = \sqrt{\cos u''^2 - \sin A^2 \cos u'^2}$. In diesem Ausdruck kommt zwar noch A selbst vor, allein man wendet ohne weiteres den Werth an, welcher aus der ersten Formel, die $\cos u'' \cot A$ ausdrückt, mit Hinweglassung des in α multiplicirten Gliedes, folgte.

§. 259.

Geht man bei der Berechnung der Länge des Bogens ebenfalls blos bis zur ersten Potenz der Abplattung α fort, so giebt die Formel (§. 255.)

$$\frac{s}{a} = Const. + \omega(1 - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2) - \sin 2\omega . \sin 6^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Um die Constante wegzuschaffen, seyen ω' und ω'' die Werthe von ω für den Anfangspunkt und den Endpunkt des Bogens, so wird

$$\frac{s}{a} = (\omega'' - \omega')\,(1 - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2)$$
$$- \sin(\omega'' - \omega')\,\cos(\omega'' + \omega')\,\sin 6^2\,\frac{\alpha}{2}.$$

und man hat, da $\sin u = \sin 6.\ \sin \omega$,

$$\sin \omega' = \frac{\sin u'}{\sin 6}, \quad \sin \omega'' = \frac{\sin u''}{\sin 6}.$$

wodurch ω', ω'' bestimmt sind. Die Winkel u', u'' selbst müssen aus den beiden Polhöhen v', v'', vermittelst der Formeln, $a \tang u' = b \tang v'$, $a \tang u'' = b \tang v''$, oder

$$\tang u' = (1 - \alpha) \tang v'$$
$$\tang u'' = (1 - \alpha) \tang v''.$$

berechnet werden.

§. 260.

Die ganze Rechnung wird daher folgenden Gang nehmen müssen. Es seyen t', t'', v', v'' die geographischen Längen und Breiten der beiden Oerter, deren Entfernung gesucht wird, so berechne man

$$\tang u' = (1 - \alpha) \tang v',$$
$$\tang u'' = (1 - \alpha) \tang v''$$
$$\tfrac{1}{2} \sin(t'' - t')\,[1 + \tfrac{1}{4} \sin(t'' - t')^2] = E.$$
$$\cot A' = \frac{\sin(u'' - u')}{\cos u''.\ \sin(t'' - t')} + \frac{\sin u'}{\cos u''}.\ E$$
$$\sin A'.\ \cos u' = \sin g., \quad \frac{\sin g}{\cos u''} = \sin h.$$
$$\frac{\cos g^2.\ \cos u'.}{\sin u' \sin u'' + \cos h\ \text{sos}\ A'.\ \cos u' \cos u''} = F$$
$$\frac{\sin u' + \cos u' \sin u''}{\cos u''} = n.$$
$$\cot A = \cot A' - \alpha F \cos u'' (\cot A' - nE).$$
$$\cos 6 = \sin A.\ \cos u'.$$
$$\sin \omega' = \frac{\sin u'}{\sin 6}, \quad \sin \omega'' = \frac{\sin u''}{\sin 6}.$$
$$\omega'' - \omega' = \Omega$$
$$\frac{s}{a} = \Omega(1 - \alpha + \tfrac{1}{2} \alpha \sin 6^2) - \sin \Omega \cos(\omega' + \omega'') \sin 6^2 \frac{\alpha}{2}.$$

§. 261.

Wir wollen nun noch als Beispiel der Anwendung dieser Formeln, einen Fall in Zahlen berechnen. Der Anfangspunkt der Linie sey Mannheim, der Endpunkt derselben Götttingen. Man hat hierbei

die geogr. Breite von Mannheim $= 49^\circ\, 29'\, 18'' = v'$
— — — — Göttingen $= 51^\circ\, 31'\, 48'' = v''$
— — Länge von Mannheim $= 26^\circ\, 7'\, 45'' = t'$
— — — — Göttingen $= 27^\circ\, 36'\, 15'' = t''$

$$t'' - t' = 1^\circ\, 28'\, 30''$$
$$\log \operatorname{tang} v' = 0.0683221.$$
$$\log (1 - \alpha) = 9.9985418.$$
$$0.0668639 = \operatorname{tang} u'$$
$$u' = 49^\circ\, 23'\, 35''90$$
$$\log \operatorname{tang} v'' = 0.0998616.$$
$$\log (1 - \alpha) = 9.9985418.$$
$$0.0984034 = \log \operatorname{tang} u''$$
$$u'' = 51^\circ\, 26'\, 10''56$$
$$u'' - u' = 2^\circ\, 2'\, 34''66.$$
$$\log \sin (t'' - t') = 8.4106214.$$
$$2 \log \sin (t'' - t') = 6.8212428.$$
$$\log 4 = 0.6020600.$$
$$6.2191828 = \log \tfrac{1}{4} \sin (t'' - t')^2$$

Hierzu die Zahl 0,00016564.

$$\log (1 + \tfrac{1}{4} \sin (t'' - t)^2) = 0.0000718.$$
$$\sin (t'' - t') = 8.4106214$$
$$\log \tfrac{1}{2} = 9.6989700$$
$$8.1096632 = \log E$$
$$\log \sin u' = 9.8803536.$$
$$\text{Compl. } \log \sin u'' = 0.1068404$$
$$8.0968572 = \log \frac{E \sin u'}{\sin u''}$$
$$\frac{E \sin u'}{\sin u''} = 0{,}0124985.$$
$$\log \sin (u'' - u') = 8.5520458.$$
$$\log \sin (t'' - t') = 8.4106214$$
$$0.1414244$$

$$\begin{aligned}
& & 0.1414244 \\
\log\cos u'' &= & 9.7947429. \\
& & 0.3466815. \\
\text{Hierzu die Zahl} &= & 2,2216797. \\
\frac{E\sin u'}{\sin u''} &= & 0,0124985 \\
& & 2,2341782 = \cot A'. \\
\log\cot A' &= & 0.3491179. \\
A' &= & 24^\circ\ 6'\ 46''42. \\
\log\sin A' &= & 9.6112302. \\
\log\cos u' &= & 9.8134893. \\
& & 9.4247195 = \log\sin g. \\
\log\cos u'' &= & 9.7947429 \\
& & 9.6299766 = \log\sin h. \\
g &= & 15^\circ\ 25'\ 13''73 \\
h &= & 25^\circ\ 14'\ 57''22 \\
\log\cos h &= & 9.9563898. \\
\log\cos A' &= & 9.9603481 \\
\log\cos u' &= & 9.8134893 \\
\log\cos u'' &= & 9.7947429 \\
& & 9.5249701. \\
\text{die Zahl} &= & 0,3349424. \\
\log\sin u' &= & 9.8803536 \\
\log\sin u'' &= & 9.8931596 \\
& & 9.7735132. \\
\text{die Zahl} &= & 0,5936264. \\
& + & 0,3349424 \\
& & 0,9285688 \\
\text{zugehör. Log.} &= & 9.9678142 \\
\log\cos g^2 &= & 9.9681544 \\
\log\cos u' &= & 9.8134893 \\
& & 9.7816437 \\
& & 9.9678142 \\
& & 9.8138295 = \log F. \\
\log\cos u' &= & 9.8134893 \\
\log\sin u'' &= & 9.8935196 \\
& & 9.7070089 = \log\cos u'.\ \sin u''
\end{aligned}$$

$\cos u' \sin u'' = 0{,}5093142$
$\sin u' = 0{,}7591953$

$1{,}2685365 = \cos u' \sin u'' + \sin u'.$

Zogehör. Logar. $= 0.1033029.$
$\cos u'' = 9.7947429$

$0.3085600 = \log n.$
$\log E = 8.1096632$

$8.4182242 = \log nE.$

$nE = 0{,}0261953.$
$\cot A' = 2{,}2341782$

$2{,}2079829 = \cot A' - nE$

$\log (\cot A' - nE) = 0.3439958.$
$\log \cos u'' = 9.7947429.$
$\log F = 9.8138295.$
$\log \alpha = 7.5253196.$

$7.4778878.$

Hierzu die Zahl $= 0{,}0030053.$
$\cot A' = 2{,}2341782$

$2{,}2311729 = \cot A'$

$\log \cot A = 0.3485333$
$A = 24^\circ\ 8'\ 30''00.$

$\log \sin A = 9.6117171$
$\log \cos u' = 9.8134893.$

$9.4252064 = \log \cos 6.$

$6 = 74^\circ\ 33'\ 42''45.$

$\log \sin u' = 9.8803536$
$\log \sin 6 = 9.9840401$

$9.8963135 = \log \sin \omega'.$

$\omega' = 51^\circ\ 57'\ 47'\ 15''.$

$\log \sin u'' = 9.8935196$
$\log \sin 6 = 9.9840401$

$9.9094795 = \log \sin \omega''$

$\omega'' = 54^\circ\ 16'\ 40''\ 00$
$\omega'' - \omega' = \Omega = 2^\circ\ 18'\ 52''85$
$= 0{,}040398797$
$\omega'' + \omega' = 106^\circ\ 14'\ 27''\ 15.$

$$\begin{aligned}
log(1 - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2) &= 9.9992199 \\
log\,\Omega &= 8.6063685 \\
log\,\alpha &= 6.5147916 \\
\hline
& 5.1203800
\end{aligned}$$

Hierzu die Zahl 131941,06 Toisen.

$$\begin{aligned}
log\,\tfrac{1}{2}\alpha \sin 6^2 &= 7.1923698 \\
\sin\Omega &= 8.6062495 \\
\cos(\omega'' + \omega') &= 9.4466554\,n \\
log\,a &= 6.5147916 \\
\hline
& 1.7600663\,n
\end{aligned}$$

Hierzu die Zahl — 57,55 Toisen.

Addirt man die vorige Zahl zu dieser negativ genommenen, so erhält man die Entfernung von Mannheim bis Göttingen $s = 131998{,}61$ Toisen.

Weitere Untersuchungen und Anwendungen der geodätischen Linie werden späterhin vorkommen.

§. 262.

Wir haben bisher immer blos die Messungen der Breitengrade in Betracht gezogen, um die Gestalt der Erde zu bestimmen, allein man kann ebenfalls die Messungen der Längengrade zu diesem Zwecke einigermassen benutzen, doch wird man nie die Genauigkeit der Breitengradmessungen erreichen können, da die Beobachtung der Zeit, welche bei den Längengradmessungen erfordert wird, immer einen grössern Fehler in der Beobachtung selbst zulässt, als die Bestimmung der Polhöhe. Man hat auch viel später angefangen Längengradmessungen auszuführen als Breitengradmessungen, indem man wohl annehmen darf, dass Cassini im Jahre 1733 der erste war, welcher einen Bogen eines Parallelkreises mass.

Setzt man in der allgemeinen Formel des Linearelements der Oberfläche eines elliptischen Sphäroïds

$$ds = \sqrt{[aa \cos u^2\, dt^2 + (aa \sin u^2 + bb \cos u^2) du^2]}.$$

das Differential du gleich Null, so wird u selbst und daher auch die geographische Breite constant seyn, da u blos von der Breite und nicht von der Länge abhängt, und alle Elemente liegen dann auf einem und demselben Parallelkreise. Bezeichnet man ein

solches Element durch $d\sigma$, so hat man $d\sigma = a. \cos u. dt$, und wenn man integrirt

$$\sigma = Const. + a \cos u. t.$$

wo bekanntlich t die geographische Länge bedeutet. Es sey nun die Länge des Anfangspunktes der Messung $= t'$, die Länge des Endpunktes derselben $= t''$, so ist die lineare Länge des zwischen beiden Punkten enthaltenen Bogens des Parallelkreises

$$\sigma = a. \cos u\ (t'' - t').$$

An die Stelle des Winkels u müssen wir die Polhöhe v einführen, zu welchem Endzweck wir uns der Formel $a \tang u = b \tang v$, bedienen. Setzt man statt b, $a(1-\alpha)$, so wird $\tang u = (1-\alpha) \tang v$, und hieraus

$$\cos u^2 = \frac{\cos u^2}{1-(2\alpha - \alpha\alpha) \sin v^2}.$$

Zieht man die Wurzel auf beiden Seiten wirklich aus, so kommt

$$\cos u = \cos v\,[1 + \alpha \sin v^2 - \tfrac{1}{2} \alpha\alpha \sin v^2 (1 - 3 \sin v^2)].$$
$$\sigma = a. \cos v\,(t'' - t')[1 + \alpha \sin v^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin v^2 (1 - 3 \sin v^2)].$$

Auf einem andern Parallelkreise, dessen geographische Breite v' ist, sey ein Bogen gemessen, dessen Endpunkte um dieselbe Meridiandifferenz $t'' - t'$ verschieden sind, und die Länge des Bogens des Parallelkreises $= \sigma'$ gefunden worden, so hat man ebenfalls, indem man in der vorigen Gleichung statt σ und v, σ' und v' setzt

$$\sigma' = a. \cos v'\,(t'' - t')\ [1 + \alpha \sin v'^2 - \tfrac{1}{2} \alpha\alpha \sin v'^2\ (1 - 3 \sin v^2)].$$

Man nehme der Kürze wegen

$$\frac{\sigma}{\sigma'}. \frac{\cos v'}{\cos v} = 1 - \mu.$$

so erhält man, indem die beiden Gleichungen, welche σ und σ' ausdrücken, durch einander dividirt werden

$$1 - \mu = \frac{1 + \alpha \sin v^2 - \tfrac{1}{2} \alpha\alpha \sin v^2\ (1 - 3 \sin v^2)}{1 + \alpha \sin v'^2 - \tfrac{1}{2} \alpha\alpha \sin v'^2 (1 - 3 \sin v'^2)}.$$

Wäre die Erde eine Kugel, so würde $\alpha = 0$, also auch $\mu = 0$ werden; es ist daher μ eine Grösse, welche gleichen Rang mit α hat, und man darf das Product $\alpha\alpha\mu$ als in gleichem Range mit dem Cubus von α stehend, vernachlässigen. Es wird dann, indem man

auf beiden Seiten mit dem Nenner des Bruches multiplicirt

$$\alpha(\sin v'^2 - \sin v^2) - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin v'^2 (1 - 3 \sin v'^2)$$
$$= \mu + \mu\alpha \sin v'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha \sin v^2 (1 - 3 \sin v^2).$$

Ausserdem setze man auch

$$\frac{\mu}{\sin v'^2 - \sin v^2} = \frac{\mu}{\sin(v' - v)\sin(v' + v)} = \lambda$$

so wird

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha(1 - 3 \sin v'^2 - 3\sin v^2) = \lambda - \lambda\alpha \sin v'^2)$$

und nehme $\alpha = \lambda + n\lambda^2$ an, so wird, wenn man diesen Werth in diese Gleichung substituirt

$$\tfrac{1}{2}\lambda\lambda(1 - 3 \sin v'^2 - 3\sin v^2) = \lambda\lambda \sin v'^2 + n\lambda\lambda$$

also $\quad n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} \sin v'^2 - \tfrac{3}{2} \sin v^2,$

und daher endlich

$$\alpha = \lambda + \tfrac{1}{2}\lambda\lambda(1 - 5 \sin v'^2 - 3\sin v^2).$$

Hat man hieraus α gefunden, so giebt eine der obern Gleichungen für σ oder σ' den Halbmesser a, so dass also zwei Längengradmessungen, eben so wie zwei Breitengradmessungen, die Gestalt der Erde bestimmen. Es sind aber keine zwei Gradmessungen vorhanden, welche man für zuverlässig genug halten könnte, um sie zu dieser Bestimmung anwenden zu können. Der in Ostindien unter 12° 32′ 30″ nördlicher Breite gemessene Grad des Parallelhreises, ist 57294 Toisen lang gefunden worden, bei welcher Bestimmung aber auf jeden Fall ein grober Fehler vorgefallen seyn muss, da aus unsern früher nach den Breitengradmessungen angestellten Berechnungen, der Grad des Aequators nur zu 57104 Toisen folgt.

§. 263.

Gewöhnlich wird der Meridianunterschied $t'' - t'$ in Zeit ausgedrückt, und wir wollen annehmen, die Zeiteinheit sey die Secunde, so dass der Zeitunterschied beider Meridiane T Secunden betragen mag. In der Formel $\sigma = a \cos u\ (t'' - t')$ hingegen, muss der Unterschied $t'' - t'$ in Theilen des als Einheit angenommenen Halbmessers ausgedrückt werden, und der bequemern Rechnung wegen, wollen wir statt dieser Differenz $t'' - t'$ die Zeit T einführen.

Setzt man den in Graden ausgedrückten Meri- ianunterschied $= M$, so wird die Proportion

$$\pi : t'' - t' = 180^\circ : M$$

att finden müssen, also $M = \frac{t'' - t'}{\pi} \cdot 180^\circ$; multi- licirt man dies noch mit 3600, so erhält man

$$\frac{t'' - t'}{\pi} \cdot 180 \cdot 3600 \text{ Bogensecunden},$$

nd da der gleichgeltende, in Zeitsecunden ausge- rückte Meridianunterschied T, in Bogensecunden T beträgt, so wird

$$\frac{t'' - t'}{\pi} \cdot 180 \cdot 3600 = 15\, T.$$

o auch

$$t'' - t' = \frac{15\, T.\, \pi}{180 \cdot 3600}.$$

Ferner war (§. 225.), wenn f die Länge des mitt- n Meridiangrades bedeutet

$$90 f = \tfrac{1}{2} \pi a\, (1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha).$$

o auch

$$a = \frac{180 f}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{16} \alpha\alpha},$$

l hieraus ergiebt sich

$$a\, (t'' - t') = \frac{T.\, f}{240} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{16} \alpha\alpha}$$

$$\sigma = \frac{T \cos u}{240} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{16} \alpha\alpha}$$

$$T = \frac{240\, \sigma}{f \cos u} \, (1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha).$$

o σ in Toisen ausgedrückt seyn muss, da f in dem- lben Maass angegeben ist.

Zur Berechnung der hierbei vorkommenden Con- nte hat man

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 1{,}0000000 \\
-\tfrac{1}{2} \alpha & = - & 0{,}0016749 \\
\hline
 & & 0{,}9983251 \\
+\tfrac{1}{16} \alpha\alpha & = + & 0{,}0000003 \\
\hline
 & & 0{,}9983254 = 1 - \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{16} \alpha\alpha.
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} log &= 9.9992722. \\ log\,240 &= 2.3802112. \\ C.\ log\,f &= 5.2440592 \\ \hline & \ 7.6235426. \end{aligned}$$

Man hat daher in Logarithmen die Formel

$$log\,T = log\,\sigma + 7.6235426 - 10 - log\,cos\,u.$$

§. 264.

Nimmt man z. B. den von Marennes bis nach Padua durch Brousseaud und Nicollet gemessenen Bogen eines Parallelkreises von 1010996,18 Meter unter der Polhöhe von 45° 43′ 12″, so muss man zuerst die Meter auf Toisen reduciren, indem

der Meter = 0,513074 Toisen

gesetzt wird. Man erhält dadurch

$$log\,\sigma = 5.7149295$$

Da hierbei $v = 45°\ 43'\ 12''$, so wird

$$\begin{aligned} tang\,v &= 0.0109161. \\ log(1-\alpha) &= 9.9985418. \\ \hline 0.0094579 &= tang\,u \\ u &= 45°\ 37'\ 25''78. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\,\sigma &= 5.7149295 \\ &+ 7.6235426 \\ \hline & \ 3.3384721. \\ log\,cos\,u &= 9.8447045 \\ \hline & \ 3.4937676. \\ T &= 3117'',221. \end{aligned}$$

Die Messung selbst gab den Meridianunterschied zwischen Marennes und Padua zu 51′ 56″248 = 3116″248, also um 0″973 zu klein an.

Bei derselben Messung sind zugleich mehrere andere Zwischenpunkte, sowohl rücksichtlich des Meridianunterschiedes, als der Länge des Bogens des Parallelkreises unter 45° 32′ 12″ bestimmt worden, nämlich

Marennes	bis St. Preuil	228″990	74407‧385
—	— Sauvagnac	612,084	198589,610
—	— Jsson	1023,475	331935,121
—	— Geneve	1741,295	565022,505

Marennes bis Milano		2470″865	801739ᵐ900
—	— Padua	3116,248	1010996,176.

Berechnet man nach voriger Formel die Merianunterschiede aus den gegebenen Linearentfernunen, so erhält man

Marennes bis	St. Preuil	229″422.	+ 0″432
—	— Sauvagnac	612″006.	— 0″078
—	— Jsson	1023″461.	— 0″014
—	— Geneve	1742″143.	+ 0″848
—	— Milano	2472″018.	+ 1″153
—	— Padua	3117″221.	+ 0″973.

§. 265.

Man kann nun untersuchen, welcher Fehler an dem Orte rücksichtlich der Zeitbestimmung began-en seyn wird, damit die aus den als richtig ange-ommenen terretrischen Messungen, nach der früher estimmten Gestalt der Erde, berechneten Meridian-fferenzen am genauesten mit der vorhin angegeben Gestalt der Erde übereinstimmen. Es sey daher e wahrscheinliche

Länge von	Marennes	=	0″000	$+ \alpha$
— —	St. Preuil	=	228,990	$+ \beta$
— —	Sauvagnac	=	612,084	$+ \gamma$
— —	Jsson	=	1023,475	$+ \delta$
— —	Geneve	=	1741,295	$+ \varepsilon$
— —	Milano	=	2470,865	$+ \zeta$
— —	Padua	=	3116,248	$+ \eta$

o werden die Fehler α, β, γ .... so zu bestimmen eyn, dass die Summe der Quadrate ein Minimum rird. Man hat also die Gleichung

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + \varepsilon\varepsilon + \zeta\zeta + \eta\eta = \text{Minim.}$$

daher wenn man β, γ, δ .... als Functionen von α ansieht

$$\alpha + \beta\frac{d\beta}{d\alpha} + \gamma\frac{d\gamma}{d\alpha} + \delta\frac{d\delta}{d\alpha} + \varepsilon\frac{d\varepsilon}{d\alpha} + \zeta\frac{d\zeta}{d\alpha} + \eta\frac{d\eta}{d\alpha} = 0.$$

Aus der Vergleichung der berechneten Meridiandifferenzen mit den beobachteten, folgt aber

$\beta = \alpha + 0''432$, $\gamma = \alpha - 0''078$, $\delta = \alpha - 0''014$,
$\varepsilon = \alpha + 0''848$, $\zeta = \alpha + 1''153$, $\eta = \alpha + 0''973$.

Die Differentialcoefficienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ . . . . sind daher alle der Einheit gleich, also

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \zeta = 0$$

oder $\quad 7\alpha + 3''314 = 0.$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\,0''473, & \alpha\alpha &= 0''224\\
\beta &= -\,0''041, & \beta\beta &= 0''002\\
\gamma &= -\,0''551, & \gamma\gamma &= 0''303\\
\delta &= -\,0''487, & \delta\delta &= 0''237\\
\varepsilon &= +\,0''375, & \varepsilon\varepsilon &= 0''141\\
\zeta &= +\,0''680, & \zeta\zeta &= 0''462\\
\eta &= +\,0''500, & \eta\eta &= 0''250.
\end{aligned}$$

Man findet also die Summe der Quadrate der Fehler $= 1''619$; dividirt man diese Summe durch 7 und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so ergiebt sich

$$\text{mittlerer Fehler} = 0''4809.$$

Dies macht in Bogensecunden $7''213$, welches etwas über doppelt so gross als der mittlere Fehler bei den Breitengradmessungen ist.

§. 266.

Der Ausdruck für den Meridianunterschied §. 263.

$$T = \frac{240\,\sigma}{f\cos u}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{16}\,\alpha\alpha\right)$$

zeigt, dass T bei gleichen Werthen der gemessenen Länge σ und Polhöhe v, desto kleiner ausfällt, je grösser f angenommen wird. Die Formel (§. 262.)

$$\cos u^2 = \frac{\cos v^2}{1 - (2\alpha - \alpha\alpha)\sin v^2}$$

zeigt ferner, dass $\cos u$ desto grösser wird, je mehr α wächst, folglich wird das Product $\frac{240\,\sigma}{f\cos u}$, abnehmen während man die Abplattung und den Werth des mittlern Meridiangrades wachsen lässt, und da ausserdem der Factor $1 - \frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{16}\,\alpha\alpha$ ebenfalls mit einer wachsenden Abplattung α abnimmt, so wird T

abnehmen, wenn man der Abplattung sowohl als dem mittlern Grade des Erdmeridians grössere Werthe beilegt. Unsere definitiven Werthe dieser beiden Grössen gaben den Meridianunterschied zwischen Marennes und Padua zu gross an. Wir wollen daher sehen, welche Werthe den Meridiandifferenzen sich ergeben, indem wir die grösstmöglichsten Werthe der Abplattung und des Meridiangrades zum Grunde legen. Wir haben dann

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{287{,}6},$$

den mittlern Meridiangrad = 57013 Toisen

und man findet nach den Rechnungen §. 263 und §. 264.

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}0000000 \\ -\tfrac{1}{2}\alpha &= \underline{0{,}0017385} \\ &\quad 0{,}9982615. \\ +\tfrac{1}{16}\alpha\alpha &= \underline{0{,}0000004} \\ &\quad 0{,}9982619 = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log &= 9.9992445 \\ log\,240 &= 2.3802112 \\ C.\ log f &= \underline{5.2440261} \\ &\quad 7.6234818 \\ log\ tang\, v &= 0.0109161 \\ log(1-\alpha) &= \underline{9.9984873} \\ &\quad 0.0094034 = log\ tang\, u \\ u &= 45^\circ\ 37'\ 12''87. \\ log\,\sigma &= 5.7149295 \\ &\ + \underline{7.6234818} \\ &\quad 3.3384113 \\ log\ cos\, u &= \underline{9.8447323} \\ &\quad 3.4936790 \\ T &= 3116''585. \end{aligned}$$

Bei den vorherigen Annahmen der Abplattung und des mittlern Meridiangrades, war $T = 3117{,}221$ gefunden worden, folglich müssen alle früher berechneten Meridiandifferenzen um $\frac{1}{4900}$ vermindert werden. Man erhält dadurch

Marennes bis St. Preuil	229″376	+ 0″386
— — Sauvagnac	611″881	— 0″203
— — Jsson	1023″253	— 0″222
— — Geneve	1741″788	+ 0″493
— — Milano	2471″513	+ 0″648
— — Padua	3116″585	+ 0″337.

Zur Bestimmung der Fehler α, β, γ . . . erhält man die Gleichungen

$$\beta = \alpha + 0''386, \quad \gamma = \alpha - 0''203, \quad \delta = \alpha - 0''222,$$
$$\varepsilon = \alpha + 0''493, \quad \zeta = \alpha + 0''648, \quad \eta = \alpha + 0''337.$$

und hieraus

$$\alpha = -0''205, \quad \alpha\alpha = 0{,}042$$
$$\beta = +0''181, \quad \beta\beta = 0{,}033$$
$$\gamma = -0''408, \quad \gamma\gamma = 0{,}166$$
$$\delta = -0''427, \quad \delta\delta = 0{,}202$$
$$\varepsilon = +0''288, \quad \varepsilon\varepsilon = 0{,}083$$
$$\zeta = +0''443, \quad \zeta\zeta = 0{,}196$$
$$\eta = +0''132, \quad \eta\eta = 0{,}017$$

folglich die Summe der Quadrate = 0″729, und den mittlern Fehler = 0″3249.

§. 267.

Man sieht aus allen, in diesem Abschnitt bisher angestellten Rechnungen, dass die Voraussetzung, die Erde sey ein elliptisches Sphäroïd, mit den Messungen die man theils wegen der grössern Geübtheit der Beobachter, theils wegen der gebrauchten feinern Instrumente, für die zuverlässigsten halten kann, so nahe übereinstimmen, dass die besagte Annahme durchaus keinem Zweifel unterworfen seyn kann, da die Unterschiede zwischen den durch Rechnung und durch Beobachtung gefundenen Resultaten den etwanigen Beobachtungsfehlern und den durch unregelmässige Anziehungen hervorgebrachten Ablenkungen zugeschrieben werden können. Aus dem in §. 223. gesagten ergiebt sich freilich, dass man wohl nie hoffen darf im Stande zu seyn, aus der gemessenen Amplitude eines Bogens die Länge desselben genau abzuleiten, und umgekehrt, allein jede neue Messung trägt doch dazu bei, die Genauigkeit der Bestimmung der Abplattung und der Grösse des mittlern Meridiangrades zu vermehren.

Es giebt ausser den Messungen der Längengrade und der Breitengrade noch eine dritte Art, die Abplattung durch Beobachtungen zu finden, nämlich durch die Beobachtung der Anzahl der Schwingungen, die ein Pendel an den verschiedenen Oertern der Erde in einer bestimmten Zeit macht. Die hierbei zu befolgende Methode wollen wir aber bis an einen andern Ort aufsparen, und zuerst sehen, was uns die Theorie über die Gestalt der Erde zu lehren im Stande ist.

Theoretische Untersuchungen über die Gestalt der Erde.

§. 268.

Die regelmässige Gestalt, welche wir bei dem Erdkörper finden, lässt uns schliessen, dass Anfangs die Materie, aus welcher die Erde besteht, nicht in diesem erstarrten Zustande gewesen seyn kann, weil ein fester Körper durch die Wirkung von Kräften in seiner Form gar nicht oder nur wenig geändert wird. Der anfängliche Zustand der Erde muss also so gewesen seyn, dass die kleinsten Theile ihrer Materie sich durch die geringsten Kräfte verschieben liessen, bis sie unter der Wirkung derselben, die Lage des Gleichgewichts angenommen hatten, und wir sind daher zu der Voraussetzung genöthigt, die Erde habe sich in einem tropfbar - flüssigen oder liquiden Zustande befunden, der durch Abnahme der Temperatur erst späterhin in eine Erstarrung übergegangen sey. Ob dieser liquide Zustand gleich der erste gewesen sey, oder ob sich noch vorher die Materie in gasförmigen Zustande befunden habe, kommt hierbei nicht weiter in Betracht, da allen unseren Erfahrungen zufolge jedes Gas erst tropfbarflüssig wird ehe es erstarren kann, so dass wir also nur den vor der ersten Erstarrung vorhergehenden Zustand als liquide Flüssigkeit zu berücksichtigen haben.

§. 269.

Man hat über den frühern Zustand der Erde vielerlei Hypothesen aufgestellt, die aber nicht in den mathematischen, sondern in den physischen Theil der Geographie gehören; wir begnügen uns mit der Auflösung der Aufgabe: Es ist eine liquide Flüssigkeit gegeben, die eine Drehung angenommen hat, und deren einzelne Theilchen einer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind, die sich direct wie die Masse und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung zweier auf einander wirkender Theilchen verhält, man sucht die Gestalt welche die Oberfläche der Flüssigkeit annehmen wird, nachdem sie unter der Wirkung dieser Kräfte ins Gleichgewicht gekommen ist. Die Auflösung dieser Aufgabe hat seit Newtons Zeiten die grössten Mathematiker beschäftigt, und es ist zwar gelungen, dieselbe näherungsweise aufzulösen, allein mit vollständiger Genauigkeit hat dies bis jetzt noch nicht geschehen können.

§. 270.

Dass alle Materie eine Anziehung gegen einander ausübt, die der Masse direct und dem Quadrat der Entfernung beider sich anziehenden Massen von einander umgekehrt proportional sey, fand zuerst Newton aus der Untersuchung der Kräfte, welche die Bewegung der Planeten und die Sonne, nach den schon vorher von Kepler aus den blossen Beobachtungen abgeleiteten Gesetzen der Planetenbahnen, hervorbringen. Bezeichnet man also durch μ die Masse eines materiellen Punktes, durch r seine Entfernung von einem andern; so wird die Kraft, welche der erstere auf den letztern ausübt, durch $\frac{\mu f}{rr}$ ausgedrückt, wo f eine für alle Materie gleiche constante Grösse ist. Durch dieses Gesetz der allgemeinen Attraction, das sich durch alle Beobachtungen immer mehr und mehr bestätigt hat, ist man allein im Stande gewesen, die Bewegungen der Himmelskörper so genau

arzustellen, als es jetzt wirklich der Fall ist, und ie astronomischen Beobachtungen können nur dazu ienen, die bei diesen Bewegungen vorkommenden onstanten Grössen immer genauer in Zahlen ausudrücken.

§. 271.

Es dürfte nicht überflüssig seyn, über die Aniehung der Materie einige allgemeine Betrachtungen ier beizufügen. Wenn wir blos die Erscheinungen erücksichtigen, welche die Verbindungen der verhiedenen Materien auf der Erde zeigen, so ist die nnahme einer gegenseitigen Anziehung der Materie numgänglich nothwendig, um diese Erscheinungen nügend zu erklären, und nicht blos die sogenannten nderablen Materien, deren Anziehung durch die länomene der Cohäsion, Capillarität, chemische erwandtschaft u. s. w. angezeigt wird, sondern auch e imponderablen Materien als Licht, Wärme, Eleccität, Magnetismus, gehen sowohl unter einander auch mit der ponderablen Materie, sehr enge erbindungen ein. Doch ist zu bemerken, dass diese so grosser gegenseitiger Nähe der sich anziehenden irper vorgehenden Erscheinungen, nicht wohl durch s von Newton angegebene Attractionsgesetz zu erkren sind, indem dieselben eine viel stärkere Kraft fordern, als aus der dem Quadrate der Entfernung ngekehrt proportionalen Anziehungskraft hervorgeht. an hat daher einen Unterschied zwischen der in össern Entfernungen wirkenden Attraction und der der Berührung wirkenden gemacht, und erstere e allgemeine Anziehung, letztere die Molecularanehung genannt.

§. 272.

Es ist sehr wohl möglich, dass die Molecularanehung und die allgemeine Anziehung im Grunde ne und dieselbe Kraft sind, nur dass bei grössern ntfernungen alle Glieder der Function, welche das esetz ausdrücken soll, bis auf das eine, dem Quadrat r Entfernungen umgekehrt proportionale, zu kleine

Werthe erhalten, als dass dieselben unsern Beobachtungen merklich werden könnten, und im Gegentheile bei der Berührung der Körper grade die vorher unmerklich gewesenen Glieder, die grösste Wirkung thun. Eine solche Function würde zum Beispiel

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \cdot \left\{ e^{\left(\frac{a}{r}\right)^n} - 1 \right\} = R.$$

seyn, wo r die veränderliche Entfernung und a eine sehr kleine Grösse bedeutet. Denn entwickelt man diese Formel, so kommt

$$R = \frac{aa}{rr} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+2} + \ldots$$

wo alle Glieder bei grössern Werthen von r, das erste ausgenommen, welches das Newton'sche Anziehungsgesetz giebt, verschwinden, hingegen bei solchen Werthen von r die kleiner als a sind, gerade das erste Glied am unwirksamsten wird.

Schon Clairant kam bei seinen Untersuchungen über die Mondsbewegung auf die Idee, dass das Gesetz der Anziehung, wie es Newton angab, nicht ganz richtig seyn könne, indem er eine nach diesem Gesetz berechnete Ungleichheit des Mondslaufes nur halb so gross fand, als sie die Beobachtungen angaben, und er nahm an, dass man noch ein Glied hinzufügen müsste, welches dem Biquadrat der Entfernung umgekehrt proportional seyn sollte. Diesem widersprach aber Buffon, indem derselbe meinte, die Natur befolge immer die einfachsten Gesetze, und deswegen müsse man das wegen seiner Einfachheit sich auszeichnende Newtoniansche Attractionsgesetz als vollständig wahres Gesetz der Natur annehmen. Obgleich nun Clairant bald darauf selbst fand, dass er sich in seinen Rechnungen geirrt hatte, indem er mehrere Glieder als zu unbedeutend weggelassen hatte, die aber doch einen so merklichen Einfluss hatten, dass die gesuchte Grösse wirklich verdoppelt wurde, so hat doch meiner Ansicht nach der von Buffon angegebene Grund keine Haltbarkeit, indem man die Einfachheit der Naturgesetze nicht nach dem Maassstabe der grössern oder geringern

Complication unserer analytischen Formeln betrachten darf.

§. 273.

Da wir bei den Untersuchungen über die Gestalt der Erde blos die in die Entfernung wirkende Anziehung nach dem von Newton angegebenen Gesetz berücksichtigen werden, so mag dieses Wenige, über die Molecularkraft gesagte, hier hinreichend seyn, und wir wollen uns jetzt zur Betrachtung der Kraft wenden, die bei der Bewegung eines Punktes in einem Kreise wirksam wird. Diese Kraft wird die Centrifugalkraft oder Schwungkraft genannt. Wenn sich ein Körper um eine Axe dreht, so beschreibt jeder Theil desselben eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Drehungsaxe liegt, und deren Halbmesser der Entfernung des Theils von dieser Axe gleich ist. Dieser materielle Punkt wird daher gezwungen, auf einem Kreise sich zu bewegen, indem er mit dem übrigen Körper verbunden ist, da er ausserdem nach der Berührungslinie des Kreises, in welchem er sich bewegen muss, fortfliegen würde, und man kann fragen wie gross die Kraft sey, welche im Stande ist ihn in dieser Lage zu erhalten. Es ist einleuchtend, dass man der Kraft eine Richtung beilegen muss, die mit der Normale, also mit der Verlängerung des Halbmessers zusammenfällt; denn wenn man auch eine andere Richtung annähme, so könnte man die Kraft wieder in zwei andere zerlegen, von denen die eine nach der Normale, die andere nach der Berührungslinie des Kreises wirken würde; die letztere trägt aber nichts dazu bei den Punkt auf dem Kreise zu erhalten, sondern wird seine Bewegung nur beschleunigen oder verzögern. Wir wollen diese der Centrifugalkraft entgegengesetzte Kraft durch R bezeichnen, und durch den Mittelpunkt des Kreises zwei sich rechtwinklicht schneidende Axen legen, so wird die nach der Axe der x gelegte Kraft durch $\frac{Rx}{a}$, die nach der Axe der y zerlegte Kraft durch $\frac{Ry}{a}$ ausgedrückt, wo a den

Halbmesser des Kreises bedeutet. Bemerkt man, dass diese beiden Kräfte die Coordinaten x und y zu verkleinern streben, so hat man aus den bekannten Fundamentalgleichungen der Dynamik,

$$\frac{ddx}{dt^2} + \frac{Rx}{a} = 0, \quad \frac{ddy}{dt^2} + \frac{Ry}{a} = 0.$$

wo wie gewöhnlich dt das als constant betrachtete Element der Zeit angiebt.

Nun soll die Kraft R so bestimmt werden, dass eine Bewegung im Kreise hervorgeht; man hat daher zwischen den Coordinaten x und y die Relation $xx + yy = aa$; differentiirt man diese Gleichung zweimal hinter einander, indem man die Grössen x und y als Functionen der Zeit t ansieht, so kommt

$$x\frac{ddx}{dt^2} + y\frac{ddy}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 0.$$

Die Summe der beiden Quadrate $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}$ ist aber bekanntlich nichts anders, als das Quadrat der Geschwindigkeit, die der Punkt besitzt; bezeichnet man dieselbe daher durch v, so wird auch

$$x\frac{ddx}{dt^2} + y\frac{ddy}{dt^2} + vv = 0.$$

Die beiden Gleichungen der Bewegung geben aber auch

$$x\frac{ddx}{dt^2} + y\frac{ddy}{dt^2} = -R\frac{xx + yy}{a} = -Ra$$

folglich erhält man, $Ra = vv$, oder. $R = \frac{vv}{a}$.

Die Centrifugalkraft ist daher dem Quadrat der Geschwindigkeit direct, und dem Halbmesser des Kreises umgekehrt proportional. Man kann bemerken, dass dieser Satz sich auf die Bewegung eines Punktes in jeder beliebigen krummen Linie ausdehnen lässt, da das Element einer krummen Linie immer als ein unendlicher kleiner Kreisbogen betrachtet werden kann, der mit dem an dieser Stelle statt findenden Krümmungshalbmesser beschrieben ist, und man daher blos statt a den Ausdruck des Krümmungshalbmessers zu setzen braucht.

Ist die Geschwindigkeit des Punktes constant, so wird dieselbe gleich dem Umfange des Kreises, dividirt durch die Zeit, welche der Punkt braucht um die Peripherie zu durchlaufen; bezeichnet man diese durch T, so hat man $v = \frac{2a\pi}{T}$, folglich

$$R = 4\pi\pi . \frac{a}{TT}.$$

Bei gleichen Umlaufszeiten ist daher die Centrifugalkraft dem Halbmesser des Kreises proportional.

§. 274.

Die einfachste Methode die Gestalt der Erdoberfläche aus theoretischen Gründen zu finden, schreibt sich von Huygens her. Der Gang der dabei gebrauchten Schlüsse ist im Allgemeinen folgender: Es ist leicht vorauszusehen, dass eine Flüssigkeit, welche sich um eine Axe dreht, rücksichtlich dieser Axe eine symmetrische Figur annehmen wird, und in der Mitte der Länge dieser Axe wird der Mittelpunkt des Körpers sich befinden. In diesem Mittelpunkte nehme man eine anziehende Kraft V an, und bestimme die Lage jedes Punktes des Körpers durch drei rechtwinklichte Coordinaten x, y, z, von denen die letztere der Drehungsaxe parallel ist, und die beiden andern in einer Ebene liegen, die senkrecht auf der Drehungsaxe steht, und zugleich durch den Mittelpunkt geht. Zerlegt man die anziehende Kraft V nach den drei Axen, und setzt der Kürze wegen

$$xx + yy + zz = rr$$

so wird man die drei Seitenkräfte

$\frac{Vx}{r}$, nach der Axe der x

$\frac{Vy}{r}$, nach der Axe der y

$\frac{Vz}{r}$, nach der Axe der z

erhalten. Die Centrifugalkraft wird durch $f\sqrt{xx + yy}$

ausgedrückt, wo f die constante Grösse $\frac{4\pi\pi}{TT}$ angiebt.
Diese giebt die Seitenkräfte

fx nach der Axe der x
fy nach der Axe der y
0 nach der Axe der z.

Bezeichnet man nun die zusammengenommenen Kräfte die auf jeden Punkt der flüssigen Masse wirken, nach den drei Axen durch X, Y, Z, und bedenkt, dass die Centrifugalkraft der Anziehung entgegenwirkt, so hat man

$$\frac{Vx}{r} - fx = X$$
$$\frac{Vy}{r} - fy = Y$$
$$\frac{Vz}{r} = Z.$$

Setzt man die hieraus entstehende Mittelkraft

$$\sqrt{XX + YY + ZZ} = U$$

und bezeichnet die Winkel, welche die Mittelkraft mit den drei Axen macht, durch ξ, η, ζ, so hat man bekanntlich

$$X = U \cos \xi, \quad Y = U \cos \eta, \quad Z = U \cos \zeta.$$

Nun besteht aber die Haupteigenschaft der Flüssigkeiten darin, dass ihre Theile durch die geringste Kraft verschoben werden können; soll daher die Oberfläche der Flüssigkeit unter der Wirkung der angegebenen Kräfte in Ruhe bleiben oder im Gleichgewicht seyn, so muss die Mittelkraft an allen Stellen senkrecht auf die Oberfläche gerichtet seyn. Denn wäre dieselbe nicht senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet, so könnte man sie in zwei andere zerlegen, von denen die eine nach der Normale gerichtet ist, die andere in der Berührungsebene an der Oberfläche liegt, und die letztere würde eine Verschiebung der Theile hervorbringen müssen. Da wir nun aber die Gestalt der Flüssigkeit suchen, wenn sie sich im Zustande des Gleichgewichts befindet, so muss die nach der Berührungsebene zerlegte Kraft Null seyn, folglich wird die Mittelkraft mit der Normale selbst zusammenfallen müssen.

Es werden daher die drei Winkel ξ, η, ζ, diejenigen seyn, welche die Normale mit den drei Axen der x, y, z bildet.

§. 275.

Nun werde die Differentialgleichung der Oberfläche der Flüssigkeit durch die Relation

$$dz = pdx + qdy$$

ausgedrückt, so sind bekanntlich die Gleichungen der Normale an irgend einem Punkte derselben

$$(\zeta - z)\,p + (\xi - x) = 0$$
$$(\zeta - z)\,q + (\eta - y) = 0$$

und man findet leicht, dass die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den drei Axen bildet, folgendermassen ausgedrückt worden

$$\cos\xi.\ \sqrt{1 + pp + qq} = + p.$$
$$\cos\eta.\ \sqrt{1 + pp + qq} = + q.$$
$$\cos\zeta.\ \sqrt{1 + pp + qq} = - 1.$$

Es ist aber vermöge der Gleichung der Oberfläche $pdx + qdy - dz = 0$, also auch

$$\cos\xi.\ dx + \cos\eta.\ dy + \cos\zeta.\ dz = 0.$$

Setzt man hierin aus vorigem §. statt der drei Cosinus, ihre Werthe durch die Kräfte ausgedrückt, so kommt

$$V.\frac{xdx + ydy + zdz}{r} - f(xdx + ydy) = 0$$

welches die verlangte Differentialgleichung für die Oberfläche der Flüssigkeit ist. Um diese Gleichung zu integriren, muss man für V eine bestimmte Function der Entfernung r annehmen, indem jede mögliche Anziehung blos von der Entfernung abhängen kann, und wir wollen ganz einfach $V = mr^n$ setzen, wo m und n ein paar constante Grössen sind. Da ferner

$$xdx + ydy + zdz = rdr.$$

so erhält man auch

$$mr^n\,dr - f(xdx + ydy).$$

und diese Gleichung giebt, wenn man dieselbe integrirt

$$c + \frac{m}{n+1}.\ r^{n+1} - \tfrac{1}{2} f(xx + yy) = 0$$

wo c eine Constante ist, die aus der gegebenen Menge der Flüssigkeit bestimmt werden muss. Wir wollen $n = -2$ setzen, so wird

$$c - \frac{m}{r} - \tfrac{1}{2} f(xx + yy) = 0.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel, welchen der Radius Vector r mit der Ebene der x und y macht, durch ψ, so ist $xx + yy = rr \cos\psi^2$, folglich auch

$$r^3 \cos\psi^2 = + \frac{2c}{f} r \cos\psi - \frac{2m}{f} \cos\psi$$

welche Gleichung aber kein elliptisches Sphäroid giebt. Blos in dem Falle, wenn man $n = 1$ setzte, würde man ein solches erhalten. Uebrigens ist diese ganze Annahme gar nicht der Natur angemessen, da die Voraussetzung, dass der Mittelpunkt blos anziehe, nur dann statt finden würde, wenn die ganze Erde aus einer Materie von unendlich geringer Dichtigkeit bestünde, und in ihrem Mittelpunkt ein materieller Punkt von unendlich grosser Dichtigkeit befindlich wäre.

§. 276.

Wir wollen daher nun zur allgemeinen Theorie übergehen, und zeigen, dass den Bedingungen des Gleichgewichts der Flüssigkeit, wirklich durch die Gestalt eines elliptischen Sphäroïds Genüge geleistet wird. Hierzu ist es aber nothwendig, vorher die Entwickelung der Anziehung eines Sphäroïds auf einen Punkt darzustellen.

Es seyen daher x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines Punktes des anziehenden Körpers, so kann man denselben in lauter unendlich kleine rechtwinklichte Parallelepipeda zerlegen, deren an einander liegenden Seiten durch dx, dy, dz bezeichnet werden. Nimmt man den ganzen Körper als gleichförmig dicht an, setzt das Element der Masse $= dM$, und die Dichtigkeit $= 1$, so ist

$$dM = dx.\, dy.\, dz.$$

Die drei Coordinaten des angezogenen Punktes seyen ξ, η, ζ, die dem vorigen parallel angenommen werden; und die Entfernung dieses Punktes von ir-

gend einem der Elemente $= r$, so hat man bekanntlich

$$rr = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Die ganze Anziehung eines Elements auf den Punkt wird nun durch $\frac{dM}{rr}$ nach dem Newtonianischen Attractionsgesetz ausgedrückt; zerlegt man diese Anziehung nach den drei Axen, und bezeichnet die drei Seitenkräfte durch d^3X, d^3Y, d^3Z, wovon die erste parallel mit der Axe der x, die zweite mit der Axe der y, die dritte mit der Axe der z wirkt, so hat man

$$d^3X = \frac{dM}{r^3}(\xi - x)$$

$$d^3Y = \frac{dM}{r^3}(\eta - y)$$

$$d^3Z = \frac{dM}{r^3}(\zeta - z).$$

Substituirt man in diesen Gleichungen, an die Stelle von dM und r, ihre Werthe, und integrirt dreimal, so erhält man

$$X = \iiint \frac{(\xi - x).\ dx\,dy\,dz}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \iiint \frac{(\eta - y)\ dx\,dy\,dz}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = \iiint \frac{(\zeta - z)\ dx\,dy\,dz}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

so dass X, Y, Z die Anziehungen des ganzen Körpers auf den Punkt angeben.

§. 277.

Unter dieser Form würde aber die Ausführung der Integration grossen Schwierigkeiten unterworfen seyn. Es ist daher besser, statt der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z, drei andere Bestimmungsstücke einzuführen, welche diese Form vereinfachen. Wir wollen daher x, y, z durch die drei neuen verän-

derlichen Grössen t, u, v ausdrücken, und annehmen, es sey

$$dx = p\,dt + q\,du + s\,dv$$
$$dy = p'dt + q'du + s'dv$$
$$dz = p''dt + q''du + s''dv.$$

wo die neuen Coefficienten p, q, s .... Functionen von t, u, v sind. Obige drei Integrale sind unter der Form

$$\int\int\int \varphi(x, y, z).\ dx.\ dy.\ dz.$$

enthalten, und wenn man statt x, y, z ihre durch t, u, v ausgedrückten Werthe substituirt, so erhält man $\int\int\int \psi(t, u, v).\ dx.\ dy.\ dz.$

Um nun statt der Differentiale dx, dy, dz, die andern dt, du, dv einzuführen, bedenke man, dass wenn nach x integrirt wird, y und z als constant betrachtet werden müssen, folglich $dy = 0$, $dz = 0$ seyn wird. Eliminirt man daher aus den drei Gleichungen

$$dx = p\,dt + q\,du + s\,dv$$
$$0 = p'dt + q'du + s'dv$$
$$0 = p''dt + q''du + s''dv$$

die Differentiale du und dv, so erhält man, indem der Kürze wegen gesetzt wird

$$pq's'' - ps'q'' + sp'q'' - qp's'' + qs'p'' - sq'p'' = 6.$$

$$dx = \frac{6.\ dt.}{q's'' - s'q''}.$$

Eben so erhält man dy aus den beiden Gleichungen

$$dy = q'du + s'dv,$$
$$0 = q''du + s''dv,$$

indem man dv aus denselben eliminirt

$$dy = \frac{q's'' - s'q''}{s''}\ du.$$

und endlich

$$dz = s''dv.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$dxdydz = 6.\ dt.\ du.\ dv,$$

und das Integral wird durch diese Substitutionen die Form

$$\int\int\int \varphi(t, u, v).\ 6.\ dt.\ du.\ dv,$$

erhalten.

§. 278.

Um diese allgemeine Auflösung auf unsern besondern Fall anzuwenden, wollen wir die rechtwinklichten Coordinaten durch Polarcoordinaten ersetzen, die ihren Mittelpunkt im angezogenen Punkte selbst haben. Bezeichnet man dann den Radius Vector durch v, den Winkel, welchen derselbe mit einer durch den angezogenen Punkt mit der Axe der z parallel gelegten Linie macht, durch $90 - u$, den Winkel, welchen die Ebene, die durch diese Parallellinie und die Axe der z gelegt wird, mit der Ebene der x, z bildet, durch t, so hat man bekanntlich

$$\xi - x = v \cos t \cos u$$
$$\eta - y = v \sin t \cos u$$
$$\zeta - z = v \sin u.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$p = v \sin t \cos u, \quad q = v \cos t \sin u, \quad s = - \cos t \cos u.$$
$$p' = - v \cos t \cos u, \quad q' = v \sin t \sin u, \quad s' = - \sin t \cos u.$$
$$p'' = 0 \qquad , \quad q'' = - v \cos u \;, \quad s'' = - \sin u.$$

da ξ, η, ζ constante Grössen sind; folglich wird

$$6 = pq's'' - ps'q'' + sp'q'' - qp's''$$
$$= - vv \sin t^2 \sin u^2 \cos u - vv \sin t^2 \cos u^3$$
$$- vv \cos t^2 \cos u^3 \qquad - vv \cos t^2 \sin u^2 \cos u$$
$$= - vv \cos u.$$

$$\sqrt{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^3} = \pm v^3$$

wo wir das negative Zeichen nehmen werden, um positive Ausdrücke für die Anziehungen zu erhalten.

§. 279.

Durch die Substitution dieser Werthe in den Integralen §. 276. erhalten wir also

$$X = \int\int\int dv. \cos t. \cos u^2 \, dt. \, du.$$
$$Y = \int\int\int dv. \sin t. \cos u^2 \, dt. \, du.$$
$$Z = \int\int\int dv. \sin u. \cos u \, dt. \, du.$$

Bei der Ausführung der blos angezeigten Integrationen, muss man die beiden Fälle unterscheiden, ob der Punkt, welcher angezogen wird, ausserhalb oder innerhalb des Sphäroïds liegt. Den zweiten Fall brauchen wir allein zu betrachten. Die Gleichung des elliptischen Sphäroïds ist, wenn wir die Coordinaten x, y, z von seinem Mittelpunkte aus rechnen,

und durch a und b die halbe grosse und halbe kleine Axe bezeichnen

$$aazz + bb\,(xx + yy) = aabb.$$

Setzen wir hierin statt x, y, z ihre Werthe aus vorigem Paragraph

$$x = \xi - v\ \cos t.\ \cos u,$$
$$y = \eta - v\ \sin t.\ \cos u,$$
$$z = \zeta - v\ \sin u.$$

so kommt die Gleichung des elliptischen Sphäroïds in Polarcoordinaten:

$$vv\,(aa\ \sin u^2 + bb\ \cos u^2)$$
$$- 2v\,(aa\,\zeta\,\sin u + bb\,\xi\ \cos t\ \cos u + bb\,\eta\ \sin t\ \cos u).$$
$$= aa\ bb - aa\ \zeta\zeta - bb\ (\xi\xi + \eta\eta).$$

so dass jedem beliebigen Werthe von t und u zwei verschiedene Werthe des Radius Vector v zugehören, den Fall ausgenommen, wo

$$aa\,bb - aa\,\zeta\zeta - bb\,(\xi\xi + \eta\eta) = 0;$$

dann wird ein Werth des Radius Vectors immer Null seyn, und der angezogene Punkt selbst liegt auf der Oberfläche des Ellipsoïds.

§. 280.

Sind nun v' und v'' die beiden Werthe des Radius Vectors, so muss man, im Falle dass der angezogene Punkt innerhalb des Sphäroïds liegt, die erste Integration nach v, von $v = -v'$ bis $v = v''$ ausdehnen. Hierdurch erhält man

$$X = \int\!\!\int (v' + v'')\ \cos t.\ \cos u^2\ dt.\ du$$
$$Y = \int\!\!\int (v' + v'')\ \cos t.\ \cos u^2\ dt.\ du$$
$$Z = \int\!\!\int (v' + v'')\ \cos u.\ \sin u.\ dt.\ du.$$

Nun ist bekanntlich in jeder quadratischen Gleichung der Coefficient von v, dividirt durch den von vv, die Summe der Wurzeln; man hat daher

$$v' + v'' = 2.\frac{aa\,\zeta\,\sin u + bb\,\xi\ \cos t\ \cos u + bb\,\eta\ \sin t\ \cos u}{aa\ \sin u^2 + bb\ \cos u^2}.$$

Setzt man diesen Werth in obige drei Integrale und integrirt nach t, so kommt, da das Integral von $t = 0$ bis $t = \pi$ ausgedehnt werden muss.

$$X = \pi \int \cos u^2.\ du.\ \frac{bb\ \xi\ \cos u}{aa\ \sin u^2 + bb\ \cos u^2},$$

$$Y = \pi \int \cos u^2 . \, du \; \frac{bb \, \eta \, \cos u - \frac{4}{\pi} aa \, \zeta \, \sin u}{aa \sin u^2 + bb \cos u^2}.$$

$$Z = \pi \int \cos u \, \sin u . \, du \; \frac{2 aa \, \zeta \, \sin u - \frac{4}{\pi} bb \, \eta \, \cos u .}{aa \, \sin u^2 + bb \cos u^2 .}$$

Diese Integrale müssen von neuem nach u zwischen den Gränzen $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}\pi$ genommen werden. Setzen wir daher

$$\int \frac{\cos u^3 \, du}{aa \, \sin u^2 + bb \, \cos u^2} = A.$$

$$\int \frac{\cos u^2 \, \sin u \, du}{aa \, \sin u^2 + bb \, \cos u^2} = B.$$

$$\int \frac{\cos u . \, \sin u^2 \, du}{aa \, \sin u^2 + bb \, \cos u^2} = C$$

so erhalten wir die Werthe

$$X = \pi \, bb \, \xi . \, A.$$
$$Y = \pi \, bb \, \eta . \, A - 4 aa \, \zeta . \, B$$
$$Z = 2\pi \, aa \, \zeta . \, C - 4 bb \, \eta . \, B.$$

Den Ausdruck von B brauchen wir gar nicht weiter zu entwickeln, da man bei einigem Nachdenken sogleich sieht, dass er Null werden muss. Denn es ist

$$B = \int \frac{-\cos u^2 . \, d . \cos u}{aa - (aa - bb) \cos u^2}$$

welches Integral gewiss eine Function von $\cos u$ wird; da nun $\cos u$ einerlei Werth behält, man mag statt u, $+\frac{1}{2}\pi$ oder $-\frac{1}{2}\pi$ setzen, so wird die Differenz der Werthe, die durch Substitutionen beider Grössen nach der Integration hervortreten, nothwendig Null seyn müssen.

Um A zu finden, setze man $\sin u = \omega$, so wird

$$A = \int \frac{(1 - \omega\omega) \, d\omega}{(aa - bb) \, \omega\omega + bb}$$

$$= \int \frac{d\omega}{bb + (aa - bb) \, \omega\omega} . \frac{aa}{aa - bb} - \int \frac{d\omega}{aa - bb} .$$

$$= \frac{aa}{b (aa - bb)^{\frac{1}{2}}} \, Arc \, tg (= \frac{\sqrt{aa - bb} . \, \omega}{b}) - \frac{\omega}{aa - bb}$$

und da ω von -1 bis $+1$ genommen werden muss

$$A = \frac{2aa}{b(aa-bb)^{\frac{3}{2}}} \, Arc\, tg(= \frac{\sqrt{aa-bb}}{b}) - \frac{2}{aa-bb}.$$

Ferner hat man

$$bb\, A + aa\, C = \int \cos u\, du = 2$$

also $$C = \frac{2 - bb\, A}{aa}$$

oder wenn man statt A seinen Werth setzt

$$C = \frac{2aa}{aa-bb} - \frac{2b}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}} \, Arc\, tg(= \frac{\sqrt{aa-bb}}{b}).$$

Hieraus ergiebt sich endlich, indem wir

$$\frac{\sqrt{aa-bb}}{b} = \delta \text{ setzen,}$$

$$X = 2\pi\, \xi\, \frac{aa}{bb} \cdot \frac{1}{\delta^3} \left[Arc\, tang(= \delta) - \frac{\delta}{1+\delta\delta}\right];$$

$$Y = 2\pi\, \eta\, \frac{aa}{bb} \cdot \frac{1}{\delta^3} \left[Arc\, tang(= \delta) - \frac{\delta}{1+\delta\delta}\right];$$

$$Z = 4\pi\, \zeta\, \frac{aa}{bb} \cdot \frac{1}{\delta^3} \left[\delta - Arc\, tang(= \delta)\right].$$

§. 281.

In so fern wir δ als sehr klein betrachten, können wir nach den bekannten Formeln

$$Arc\, tang(= \delta) = \delta - \tfrac{1}{3}\delta^3 + \tfrac{1}{5}\delta^5 - \tfrac{1}{7}\delta^7$$

$$\frac{\delta}{1+\delta\delta} = \delta - \delta^3 + \delta^5 - \delta^7$$

setzen, und man erhält dann

$$Arc\, tang(= \delta) - \frac{\delta}{1+\delta\delta}$$
$$= \tfrac{2}{3}\delta^3 - \tfrac{4}{5}\delta^5 + \tfrac{6}{7}\delta^7$$

$$\delta - Arc\, tang(= \delta)$$
$$= \tfrac{1}{3}\delta^3 - \tfrac{1}{5}\delta^5 + \tfrac{1}{7}\delta^7.$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke noch mit $\frac{aa}{bb\,\delta^3} = \frac{1+\delta\delta}{\delta^3}$, und substituirt die Producte in die vorigen Gleichungen, so kommt

$$X = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\xi\,(1 - \tfrac{1}{5}\,\delta^2 + \tfrac{3}{35}\,\delta^4)$$
$$Y = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\eta\,(1 - \tfrac{1}{5}\,\delta^2 + \tfrac{3}{35}\,\delta^4)$$
$$Z = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\zeta\,(1 + \tfrac{1}{5}\,\delta^2 - \tfrac{3}{35}\,\delta^4).$$

Will man statt der Grösse δ die Abplattung α einführen, so hat man die beiden Gleichungen

$$aa - bb = bb\,\delta\delta$$
$$bb = aa\,(1 - \alpha)^2$$

folglich $\dfrac{1}{(1-\alpha)^2} = 1 + \delta\delta$; hieraus folgt $\delta\delta = 2\alpha + 3\alpha\alpha$, sobald man sich auf das Quadrat von α beschränkt, und man erhält

$$X = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\xi.\,(1 - \tfrac{2}{5}\,\alpha - \tfrac{9}{35}\,\alpha\alpha)$$
$$Y = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\eta.\,(1 - \tfrac{2}{5}\,\alpha - \tfrac{9}{35}\,\alpha\alpha)$$
$$Z = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\zeta.\,(1 + \tfrac{2}{5}\,\alpha + \tfrac{9}{35}\,\alpha\alpha).$$

§. 282.

Da die Lage der Axe der X willkührlich ist, so kann man dieselbe immer so annehmen, dass $\eta = 0$ wird. Dann hat man die Mittelkraft $R = \sqrt{XX + ZZ}$, also wenn man sich auf die erste Potenz der Abplattung beschränkt

$$R = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\sqrt{[(\xi\xi + \zeta\zeta) - \tfrac{4}{5}\,\alpha\,(\xi\xi - \zeta\zeta)]}.$$

Nennt man den Winkel, den die Richtung der Kraft mit der Ebene der x, y macht, w, so hat man

$$tang\, w = \frac{Z}{X} = \frac{\zeta}{\xi}\,(1 + \tfrac{4}{5}\,\alpha).$$

Liegt der Punkt auf der Oberfläche des Sphäroïds, so muss die Gleichung

$$aa\zeta\zeta + bb\xi\xi = aabb$$

statt finden; setzt man $\zeta = b.\,sin.\,U$, $\xi = a.\,cos\,U$, so wird

$$\xi\xi + \zeta\zeta = aa\,cos\,U^2 + bb\,sin\,U^2$$
$$= aa\,(1 - 2\alpha\,sin\,U^2).$$
$$\xi\xi - \zeta\zeta = aa\,cos\,U^2 - bb\,sin\,U^2$$
$$= aa\,(cos\,U^2 - sin\,U^2 + 2\alpha\,sin\,U^2),$$
$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{b}{a}\,tang\,U, \text{ folglich auch}$$
$$R = \tfrac{4}{3}\,\pi a\,\sqrt{[1 - \tfrac{4}{5}\,\alpha + \tfrac{2}{5}\,\alpha\,sin\,U^2]}.$$

17

$$tang\, w = \frac{b}{a} (1 + \tfrac{4}{5}\, \alpha)\ tang\, U$$

$$= \frac{bb}{aa} (1 + \tfrac{4}{5}\, \alpha)\ tang\, V$$

$$\doteq (1 - \tfrac{6}{5}\, \alpha)\ tang\, V$$

wo V die Polhöhe bedeutet, indem $a\ tg\, U = b\ tg\, V$ ist. In der Formel für R kann man sogleich für U, die Polhöhe V setzen, da beide Winkel nur um eine Grösse verschieden sind, die mit der Abplattung gleiche Dimension hat und man hat mit Ausziehung der Quadratwurzel

$$R = \tfrac{4}{3}\, \pi a\ [1 - \tfrac{2}{5}\, \alpha + \tfrac{3}{10}\, \alpha\ sin\, U^2].$$

Uebrigens sieht man, dass die Richtung der Anziehung R einen kleinern Winkel mit der Ebene der x und y macht, als die Normale, welche auf das Sphäroïd an demselben Punkt gezogen wird, aber einen grössern als der aus dem Mittelpunkt gezogene Radius mit derselben Ebene bildet. Die Richtigkeit der erstern Behauptung ergiebt sich aus der Gleichung $tang\, w \doteq (1 - \tfrac{6}{5}\, \alpha)\ tang\, V$, was die zweite anbelangt, so hat man auch aus den obigen Formeln

$$tang\, w \doteq \frac{aa}{bb}\ tang\, V\ (1 + \tfrac{4}{5}\, \alpha)$$

allein nach §. 242. wird $\frac{bb}{aa}\ tang\, V = tang\, \varphi$, wo φ den Winkel des Radius Vectors mit der Ebene der x, y ausdrückt, folglich $tang\, w = tang\, \varphi\ (1 + \tfrac{4}{5}\, \alpha)$, also $w > \varphi$. Man muss aber wohl berücksichtigen, dass bei diesen Schlüssen die Schwungkraft nicht mit in Betracht gezogen ist, sondern das Sphäroïd als ruhend angesehen wird.

§. 283.

Die Anziehung eines Ellipsoïds, das nicht durch Umdrehung entstanden ist, lässt sich ebenfalls bis zu einem gewissen Punkte der Rechnung auffinden, allein man gelangt zuletzt zu einem Integrale, welches nicht durch die gewöhnlichen Functionen ausgedrückt werden kann. Bezeichnen wir die drei halben Axen desselben durch a, b, c; so dass a auf der Axe der x,

b auf der Axe der y, c auf der Axe der z liegt, so ist die Gleichung eines solchen Ellipsoïds

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2.$$

Substituirt man hierin die Werthe von x, y, z (§. 279.)

$$x = \xi - v \cos t. \cos u,$$
$$y = \eta - v \sin t. \cos u,$$
$$z = \zeta - v \sin u.$$

so erhält man

$$vv\,[a^2b^2 \sin u^2 + a^2c^2 \sin t^2 \cos u^2 + b^2c^2 \cos t^2 \cos u^2].$$
$$-2v\,[a^2b^2\,\zeta \sin u + a^2c^2\,\eta \sin t \cos u + b^2c^2\,\xi \cos t \cos u].$$
$$= a^2b^2c^2 - a^2b^2\zeta^2 - a^2c^2\eta^2 - b^2c^2\xi^2.$$

Nimmt man nun die Formeln des §. 280.

$$X = \iint (v' + v'') \cos t \cos u^2.\, dt\, du.$$
$$Y = \iint (v' + v'') \sin t \cos u^2.\, dt\, du.$$
$$Z = \iint (v' + v'') \cos u. \sin u.\, dt.\, du.$$

und bemerkt, dass aus demselben Grunde als §. 280.

$$v' + v'' = 2\,\frac{a^2b^2\zeta \sin u + a^2c^2\eta \sin t \cos u + b^2c^2\xi \cos t \cos u}{a^2b^2 \sin u^2 + a^2c^2 \sin t^2 \cos u^2 + b^2c^2 \cos t^2 \cos u^2}$$

so erhält man, wenn der Kürze wegen der Nenner des Bruches

$$aabb \sin u^2 + aacc \sin t^2 \cos u^2 + bbcc \cos t^2 \cos u^2 = N$$

gesetzt wird, die drei Seitenanziehungen des Ellipsoïds auf einen Punkt innerhalb desselben

$$X = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{\cos t\, dt}{N} \cos u^2. \sin u\, du$$
$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t \cos t.\, dt}{N} \cos u^3\, du$$
$$+ 2b^2c^2\xi \iint \frac{\cos t^2\, dt}{N} \cos u^3\, du.$$

$$Y = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{\sin t\, dt}{N} \cos u^2 \sin u\, du$$
$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t^2\, dt}{N} \cos u^3\, du$$
$$+ 2b^2c^2\xi \iint \frac{\sin t. \cos t\, dt}{N} \cos u^3\, du.$$

$$Z = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{dt}{N} \cos u . \sin u^2\, du$$

$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t^2\, dt}{N} \cos u^2 \sin u\, du$$

$$+ 2b^2c^2\xi \iint \frac{\cos t\, dt}{N} \cos u^2 \sin u\, du$$

§. 284.

Diese Integrale müssen zuerst von $t = 0$ bis $t = \pi$ genommen werden; man sieht aber leicht, dass wenn T eine Function von $\sin t$ und $\cos t^2$ bedeutet, das zwischen den besagten Gränzen genommene Integral $\int T. \cos t.\, dt = \int T.\, d. \sin t = 0$ werden muss.

Hierdurch fallen die Integrale

$$\int \frac{\cos t.\, dt}{N.},\quad \int \frac{\sin t.\, \cos t.\, dt}{N},$$

ganz weg, und es bleiben blos die Ausdrücke

$$X = 2b^2c^2\xi \iint \frac{\cos t^2 \cos u^3\, du\, dt}{N},$$

$$Y = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{\sin t \cos u^2 \sin u.\, du\, dt}{N}$$

$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t^2 \cos u^3\, du\, dt}{N},$$

$$Z = 2a^2b^2\zeta \iint \frac{\cos u \sin u^2\, du\, dt}{N}$$

$$+ 2a^2c^2\eta \iint \frac{\sin t. \cos u^2 \sin u.\, du.\, dt}{N}.$$

§. 285.

Von den noch übrigen fünf Integralen fallen sogleich noch zwei heraus; denn man kann auch zuerst nach u integriren, indem man die Gränzen $u = -\frac{1}{2}\pi$, $u = +\frac{1}{2}\pi$ nimmt. Bezeichnet nun U eine Function von $\cos u$ und $\sin u^2$, so wird das zwischen diesen Gränzen genommene Integral $\int U.\, du. \sin u = 0$ werden. Es ist daher

$$\int \frac{\cos u^2 \ \sin u . \ du}{N} = 0$$

und man erhält also:

$$X = 2b^2c^2\xi \int\int \frac{\cos t^2 \ dt}{N} \cos u^3 . du.$$

$$Y = 2a^2c^2\eta \int\int \frac{\sin t^2 \ dt}{N} \cos u^3 \ du.$$

$$Z = 2a^2b^2\eta \int\int \frac{dt}{N} \cos u \ \sin u^2 \ du.$$

§. 286.

Wir behalten folglich noch drei Integrale zu betrachten übrig, die wir zwischen den Gränzen $t = 0$ bis $t = \pi$ genommen, folgendermassen bezeichnen wollen

$$\int \frac{dt}{N} = A. \quad \int \frac{\sin t^2 \ dt}{N} = B. \quad \int \frac{\cos t^2 \ dt}{N} = C.$$

Von diesen brauchen wir nur das eine, etwa A durch Integration zu suchen, da, wie man leicht sieht, die übrigen beiden durch die Gleichungen

$$B + C = A.$$

$$Aa^2b^2 \sin u^2 + Ba^2c^2 \cos u^2 + Cb^2c^2 \cos u^2 = \int dt = \pi$$

gefunden werden; man erhält hieraus

$$B = \frac{\pi - Abb\,(aa \ \sin u^2 + cc \ \cos u^2)}{cc . \cos u^2 \,(aa - bb)}$$

$$C = \frac{Aaa\,(bb \ \sin u^2 + cc \ \cos u^2) - \pi}{cc . \cos u^2 \,(aa - bb)}.$$

§. 287.

Substituirt man im Ausdruck $\frac{dt}{N}$, statt N seinen Werth aus §. 283., so kommt

$$\int \frac{dt}{N} = \int \frac{dt}{aabb \sin u^2 + aacc \sin t^2 \cos u^2 + bbcc . \cos t^2 \cos u^2}$$

Nimmt man $\sin t^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$, $\cos t^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$, und setzt der Kürze wegen

$$aabb \sin u^2 + \tfrac{1}{2} cc \cos u^2 (aa + bb) = m$$
$$\tfrac{1}{2} cc \cos u^2 (aa - bb) = n$$

so erhält man

$$\int \frac{dt}{N} = A = \int \frac{dt}{m - n \cos 2t}.$$

Um dies zu integriren, setze man $\cos 2t = \frac{1-pp}{1+pp}$, so wird

$$\sin 2t = \frac{2p}{1+pp}, \quad dt = \frac{dp}{1+pp}$$

$$m - n \cos 2t = \frac{m - n + (m+n) pp}{1+pp} \quad \text{also}$$

$$\int \frac{dt}{m - n \cos 2t} = \int \frac{dp}{m - n + (m+n) pp}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{mm - nn}} \int \frac{dp \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}}{1 + \frac{m+n}{m-n} pp}.$$

Man hat daher

$$\int \frac{dt}{m - n \cos 2t} = \frac{1}{\sqrt{mm - nn}} Arc\, tg (= p \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}) + C.$$

Aus der Gleichung $\cos 2t = \frac{1-pp}{1+pp}$, sieht man aber, dass p nichts anders ist als $tang\, t$. Folglich wird für

$$t = 0, \quad Arc\, tang (= p \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}) = 0$$

$$t = \pi, \quad Arc\, tang (= p \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}) = \pi.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{mm - nn}},$$

seyn muss. Man hat ferner aus den Werthen von m und n.

$$m + n = aabb \sin u^2 + aacc \cos u^2$$
$$m - n = aabb \sin u^2 + bbcc \cos u^2.$$
$$\sqrt{mm - nn} = ab \sqrt{bb \sin u^2 + cc \cos u^2}.$$
$$\sqrt{aa \sin u^2 + cc \cos u^2}$$

folglich

$$A = \frac{\pi}{ab \sqrt{bb \sin u^2 + cc \cos u^2} \cdot \sqrt{aa \sin u^2 + cc \cos u^2}}$$

$$B = \frac{\pi}{cc. \cos u^2 \, (aa - bb)}$$
$$- \pi \frac{b}{acc \cos u^2 \, (aa - bb)} \cdot \sqrt{\frac{aa \sin u^2 + cc \cos u^2}{bb \sin u^2 + cc \cos u^2}}$$

$$C = \pi \frac{a}{bcc. \cos u^2 \, (aa - bb)} \cdot \sqrt{\frac{bb \sin u^2 + cc \cos u^2}{aa \sin u^2 + cc \cos u^2}}$$
$$- \frac{\pi}{cc \cos u^2 \, (aa - bb)}.$$

§. 288.

Nimmt man der Kürze wegen

$$\sqrt{bb \sin u^2 + cc \cos u^2} \cdot \sqrt{aa \sin u^2 + cc \cos u^2} = P$$

und bemerkt, dass die drei Anziehungskräfte

$$X = 2bbcc\xi \int C. \cos u^3 \, du$$
$$Y = 2aacc\eta \int B. \cos u^3 \, du$$
$$Z = 2aabb\zeta \int A. \cos u. \sin u^2 \, du$$

sind, so erhält man durch Substitution der Werthe von A, B, C, indem man zugleich die direct integrablen Theile von $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}p$ integrirt und die zwischen denselben Gränzen genommenen Integralen

$$\int \frac{\sin u^2 \cos u \, du}{P} = E$$

$$\int \frac{\cos u \, du}{P} = F \quad \text{setzt,}$$

$$X = \frac{2\pi\xi b}{aa - bb} [a (bb - cc) E + acc F - 2b]$$

$$Y = \frac{2\pi\eta a}{aa - bb} [2a - b(aa - cc) E - bc^2 F].$$
$$Z = 2\pi\zeta ab\, E.$$

Nimmt man $\sin u = q$, so hat man

$$E = \int \frac{q^2 dq}{\sqrt{cc + (bb - cc) qq} \cdot \sqrt{cc + (aa - cc) qq}}$$

$$F = \int \frac{dq}{\sqrt{cc + (bb - cc) qq} \cdot \sqrt{cc + (aa - cc) qq}}$$

wo die Integrale von $q = -1$ bis $q = +1$ ausgedehnt werden müssen; allein diese lassen sich unter endlicher Form nicht angeben, und es bleibt nichts anders übrig, als dieselben in Reihen zu entwickeln wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen.

§. 289.

Wollte man diese allgemeinen Formeln auf das Revolutionsellipsoïd anwenden; indem man c als die Umdrehungsaxe betrachtet, so muss man $a = b$ setzen. Hierdurch werden die Formeln für X und Y unendlich gross. Allein dies ist nur scheinbar und bei vollständiger Reducirung der Werthe, fällt der Factor $a - b$, der das Unendliche hervorbringt, wieder heraus. Es ist nämlich, wenn man $bb = aa - 2ia$ setzt, wo i eine sehr kleine Grösse bedeutet, $b = a - i$,

$$X = \frac{2\pi(a-i)\xi}{2ia} [a(aa - 2ia - cc) E + acc F - 2(a-i)].$$

$$Y = \frac{2\pi a \eta}{2ia} [2a - (a-i)(aa - cc) E - (a-i) c^2 F].$$

Ferner hat man durch dieselbe Substitution

$$\sqrt{cc + (bb - cc) qq} \cdot \sqrt{cc + (aa - cc) qq}$$
$$= \sqrt{[[cc + (aa - cc) qq]^2 - 2iaqq [cc + (aa - cc) q]]}$$
$$= cc + (aa - cc) qq - iaqq.$$

also auch

$$E = \int \frac{qqdq}{cc + (aa - cc) qq} + ia \int \frac{q^4 dq}{[cc + (aa - cc) q]^2}$$

$$F = \int \frac{dq}{cc + (aa - cc) qq} + ia \int \frac{qqdq}{[cc + (aa - cc) q]^2}.$$

Hieraus folgt nun

$$(aa-2ia-cc)\,E+cc\,F.=\int dq-ia\int\frac{qqdq}{cc+(aa-cc)qq}$$

$$=2-\frac{2ia}{aa-cc}+\frac{2iac}{(aa-cc)^{\frac{3}{2}}}.\,Arc\,tg(=\frac{\sqrt{aa-cc}}{c})$$

$$(a-i)\,[(aa-cc)\,E-cc\,F]$$

$$=\int(a-i)\,dq+ia^2\int\frac{qqdq}{cc+(aa-cc)qq}$$

$$=2a+\frac{2icc}{aa-cc}-\frac{2iaac}{(aa-cc)^{\frac{3}{2}}}.\,Arc\,tg=(\frac{\sqrt{aa-cc}}{c}).$$

Früher setzten wir $\frac{\sqrt{aa-bb}}{b}=\delta$, wo b die Umdrehungsaxe des Sphäroïds war, und da im vorliegenden Fall die Drehung um die Axe c geschieht, so können wir $\frac{\sqrt{aa-cc}}{c}=\delta$ setzen. Man erhält dann

$$X=\frac{2\pi(a-i)\xi}{2ia}\Big[2a-\frac{2ia^2}{cc\,\delta\delta}$$

$$+\frac{2ia^2}{cc\,\delta\delta}\,Arc\,(tang=\delta)-2a+2i\Big].$$

$$Y=\frac{2\pi a\eta}{2ia}\Big[2a-2a-\frac{2i}{\delta\delta}+\frac{2iaa}{cc\,\delta^3}\,Arc\,(tg=\delta)\Big]$$

oder wenn man die sich aufhebenden Glieder weglässt, durch $2i$ dividirt, und dann das noch übrig bleibende $i=0$ nimmt, so kommt

$$X=\frac{2\pi\xi\,aa}{cc\,\delta^3}\Big[Arc\,tang(=\delta)-\frac{\delta}{1+\delta\delta}\Big];$$

$$Y=\frac{2\pi\eta.\,aa}{cc\,\delta^3}\Big[Arc\,tang(=\delta)-\frac{\delta}{1+\delta\delta}\Big];$$

welches dieselben Formeln sind als §. 280. gefunden wurden.

§. 290.

Bei der Theorie über das Gleichgewicht sowohl als die Bewegung der Flüssigkeiten, muss man als

Grundsatz annehmen, dass der Druck, welchen irgend ein Theilchen der Flüssigkeit erleidet, denselben nach allen Seiten fortpflanzt, und der Fläche proportional ist. Denken wir uns also die Flüssigkeit in lauter unendlich kleine Parallelepipeda zerlegt, die dadurch entstehen, dass wir den drei Coordinatenebenen parallel unendlich viel andere Ebenen legen, welche von einander die unendlich kleinen Abstände $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ haben, indem wir die Coordinaten irgend eines Punktes des flüssigen Körpers durch ξ, η, ζ bezeichnen, so wird die Masse eines solchen unendlich kleinen Parallelepipedum

$$dm = \rho\ d\xi.\ d\eta.\ d\zeta$$

seyn, wo dm das Element der Masse und ρ die Dichtigkeit der Flüssigkeit bedeutet. Der Druck, welchen das Element in der einen Richtung erleidet, wird gefunden, indem man den auf die Flächeneinheit sich beziehenden Druck p mit der Fläche des Parallellogramms, das die Seitenfläche des Elements bildet, multiplicirt. Man erhält dadurch den Druck in der Richtung der drei Axen,

nach der Axe der ξ, $p.\ d\eta.\ d\zeta$;
nach der Axe der η, $p.\ d\xi.\ d\zeta$;
nach der Axe der ζ, $p.\ d\xi.\ d\eta$.

Nun ist p im Allgemeinen eine Function von ξ, η, ζ; es werden daher die Pressungen, welche auf die andern Seitenflächen in solchen Richtungen wirken, die mit den Axen zwar parallel, aber der vorigen Richtung entgegengesetzt liegen, durch

$$[p - \left(\frac{dp}{d\xi}\right) d\xi].\ d\eta.\ d\zeta.\ \text{nach der Axe } \xi,$$

$$[p - \left(\frac{dp}{d\eta}\right) d\eta].\ d\xi.\ d\zeta.\ \text{nach der Axe } \eta,$$

$$[p - \left(\frac{dp}{d\zeta}\right) d\zeta].\ d\xi.\ d\eta.\ \text{nach der Axe } \zeta,$$

ausgedrückt werden. Der Druck, welcher das Element nach der Richtung der drei Axen treibt, wird also

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right).\ d\xi.\ d\eta.\ d\zeta.$$

$$\left(\frac{dp}{d\eta}\right).\,d\xi.\,d\eta.\,d\zeta.$$

$$\left(\frac{dp}{d\zeta}\right).\,d\xi.\,d\eta.\,d\zeta.$$

Bezeichnet man die beschleunigenden Kräfte, die ach den drei Axen wirken, durch P, Q, R, so sind ie bewegenden Kräfte $P.dm$, $Q.dm$, $R.dm$; sollen an aber Theilchen der Flüssigkeit in Ruhe seyn, so üssen diese Kräfte dem Druck des Elements das leichgewicht halten, und man erhält die drei Gleiıungen

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right).\,d\xi.\,d\eta.\,d\zeta = P.\,dm$$

$$\left(\frac{dp}{d\eta}\right).\,d\xi.\,d\eta.\,d\zeta = Q.\,dm$$

$$\left(\frac{dp}{d\zeta}\right).\,d\xi.\,d\eta.\,d\zeta = R.\,dm.$$

Multiplicirt man die erste durch $d\xi$, die dritte ırch $d\zeta$, und addirt die Producte, so kommt, indem an noch bemerkt, dass $dm = \rho.\,d\xi.\,d\eta.\,d\zeta$ ist

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right).\,d\xi + \left(\frac{dp}{d\eta}\right).\,d\eta + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)\,d\zeta$$
$$= \rho\,(Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta).$$

Das vor dem Gleichheitszeichen stehende Glied t aber nichts anders, als das vollkommene Diffential von p, also wird

$$dp = \rho\,(Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta),$$

elches die gesuchte Gleichung ist.

§. 291.

An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der Druck ntweder Null, oder eine constante Grösse; man hat aher für die Gleichung der Oberfläche $dp = 0$, oder

$$Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta = 0$$

nd hieraus folgt leicht, dass der Druck oder die Mittelkraft aller auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte enkrecht auf der Oberfläche, die die flüssige Masse ildet, stehen. Denn nach §. 275. sind die Cosinus er drei Winkel, welche die Normale mit den drei

Axen macht, so beschaffen, dass wenn wir dieselb[en] durch ξ', η', ζ' bezeichnen

$$\cos\xi' = -\cos\zeta'.\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right),\quad \cos\eta' = -\cos\zeta'.\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right).$$

Da nun die Gleichung der Oberfläche $dp = 0$ od[er]

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{dp}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right) d\zeta = 0$$

ist, so wird

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) = -\frac{\left(\frac{dp}{d\xi}\right)}{\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)},\quad \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = -\frac{\left(\frac{dp}{d\eta}\right)}{\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)}$$

also auch

$$\cos\xi'.\left(\frac{dp}{d\zeta}\right) = \cos\zeta'.\left(\frac{dp}{d\xi}\right),$$

$$\cos\eta'.\left(\frac{dp}{d\zeta}\right) = \cos\zeta'.\left(\frac{dp}{d\eta}\right).$$

und da $\cos\xi'^2 + \cos\eta'^2 + \cos\zeta'^2 = 1$ ist, so ergiebt sich

$$\cos\xi' = \frac{\left(\frac{dp}{d\xi}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)^2\right]}},$$

$$\cos\eta' = \frac{\left(\frac{dp}{d\eta}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)^2\right]}},$$

$$\cos\zeta' = \frac{\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)^2\right]}}.$$

Die Mittelkraft erhält man $=\sqrt{PP+QQ+RR}$, also die Cosinus der Winkel, welche dieselbe mit den drei Axen bildet:

$$\frac{P}{\sqrt{PP+QQ+RR}},$$
$$\frac{Q}{\sqrt{PP+QQ+RR}},$$
$$\frac{R}{\sqrt{PP+QQ+RR}},$$

und diese drei Ausdrücke sind mit denen der drei Cosinus ganz identisch, wenn man nur statt der partiellen Differentiale von p, ihre durch P, Q, R ausgedrückten Werthe setzt. Wir schliessen hieraus, dass die Richtung der Mittelkraft mit der der Normale zusammenfällt, welches §. 274. etwas anders schon bewiesen wurde.

§. 292.

Die in unserm Fall vorkommenden, auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte, sind die Anziehungen, die §. 280. vollständig entwickelt sind, und die Centrifugalkraft, welche aus der Drehung der flüssigen Masse entsteht. Die letztere fanden wir in der Entfernung a von der Axe §. 273.

$$=\frac{4\pi\pi}{TT}a$$

und wenn wir $2\pi\pi = TTf$ setzen, so wird dieselbe in der Entfernung $\sqrt{(\xi\xi+\eta\eta)}$ von der Axe $= 2f\sqrt{\xi\xi+\eta\eta}$. Zerlegen wir dieselbe nach den beiden Axen der ξ und η, so erhalten wir die Seitenkräfte derselben $2f\xi$ und $2f\eta$; diese wirken der Anziehung entgegen, man hat daher

$$P = \rho' X - 2f\xi,\quad Q = \rho' Y - 2f\eta,\quad R = \rho' Z,$$

wo X, Y, Z die §. 280. angegebenen Bedeutungen haben, und ρ' eine der Dichtigkeit proportionale Grösse ist, die als Factor zugefügt wird, um die der Masse proportionale Anziehung auszudrücken. Es

folglich erhält man den Ausdruck für die Schwere an der Oberfläche des Sphäroïds

$$G = \frac{4\pi B(1+\delta\delta)\rho'}{\delta^3 \sqrt{1+\delta\delta \cos v^2}} [\delta - Arc\ tang(=\delta)].$$

§. 295.

Um nun die beiden Grössen B, δ auszumitteln, müssen wir die Beobachtungen der Pendellängen und einer Gradmessung zu Hülfe nehmen. Es ist bekannt, dass wenn man durch l die Länge eines Secundenpendels ausdrückt, so wird $G = \pi^2 l$, indem die Zeit einer Secunde, oder der 86400ste Theil des mittlern Sonnentages, als Einheit angenommen wird. Setzt man diesen Werth von G in vorige Gleichung, so wird

$$\pi l = \frac{4B(1+\delta\delta)\rho'}{\delta^3 \sqrt{1+\delta\delta \cos v^2}} [\delta - Arc\ tang(=\delta)].$$

Nun ist aus §. 246., wo ds das Element des elliptischen Bogens bedeutet,

$$ds = \frac{AABB\ dv}{\sqrt{AA \cos v^2 + BB \sin v^2}^3}$$

$$= \frac{(1+\delta\delta)B.\ dv}{\sqrt{1+\delta\delta.\ \cos v^2}^3}.$$

Da nun innerhalb enger Gränzen von v, $1+\delta\delta \cos v^2$ seinen Werth nur sehr wenig ändert, so kann man bei der Integration diesen Factor ohne merklichen Fehler als constant betrachten, und man erhält dann

$$s = \frac{(1+\delta\delta)Bv}{\sqrt{1+\delta\delta \cos v^2}^3}.$$

Ist nun s die Länge eines Grades, so muss man statt v, $\frac{\pi}{180}$ setzen, so dass

$$\frac{B(1+\delta\delta)}{\sqrt{1+\delta\delta \cos v^2}^3} = \frac{180\, s}{\pi}.\ (1+\delta\delta)\cos v^2).$$

Es wird daher auch, wenn man diesen Werth in die Gleichung für πl substituirt,

$$\pi l = \frac{720\,s}{\pi\,\delta^3}\,\varrho'(1 + \delta\delta\,\cos v^2)\,[\delta - Arc\,tang(=\delta)].$$

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{720\,s}{\pi^2 l\,\delta^3}\,(1 + \delta\delta\,\cos v^2)\,[\delta - Arc\,tang(=\delta)].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dieser $\frac{f}{\pi} = \frac{2\pi}{TT}$, so kommt

$$\frac{f}{\pi\varrho'} = \frac{1440\,s}{\pi TT.\,l.\,\delta^3}\,(1 + \delta\delta\,\cos v^2)\,[\delta - Arc\,(tg = \delta)].$$

§. 296.

Unter dem Aequator ist die Pendellänge $= 39{,}01520$ englische Zoll gefunden. Nimmt man das Verhältniss des englischen Zoll zum französischen wie $1 : 1{,}06575$, so erhält man die Länge des Secundenpendels

$$l = \frac{39{,}01520}{1{,}06575}\ \text{französische Zoll}$$

$$= \frac{39{,}01520}{1{,}06575.\,72}\ \text{Toisen.}$$

Die Länge eines Grades unter dem Aequator findet sich aus (§. 248.)

$$s = 56722\ \text{Toisen.}$$

Die Umdrehungszeit T der Erde um ihre Axe ist gleich dem mittlern Sonnentag, multiplicirt durch $0{,}99727$, und da wir für die Zeiteinheit die Secunde angenommen haben, so wird

$$T = 86400.\,0{,}88727.$$

Man findet daher den constanten Factor

$$\frac{1440\,s}{TT.\,l.\,\pi} = \frac{1440.\,56722.\,72.\,1{,}06575}{\pi.\,39{,}01520.\,86400^2\,(0{,}99727)^2}$$

$$= 0{,}006887558$$

und wir wollen denselben der Kürze wegen durch μ bezeichnen. Da in diesem Fall zugleich die Polhöhe $v = 0$ ist, so hat man $\cos v = 1$, also

$$\frac{f}{\pi\varrho'} = \mu\,\frac{1 + \delta\delta}{\delta^3}\,[\delta - Arc\,tang(=\delta)].$$

§. 297.

Dividirt man in der Gleichung (§. 292.)

$$\frac{(3\pi + \frac{f}{\rho'}\delta\delta)\,\delta}{3 + \delta\delta} = \pi\ Arc\ tang(=\delta)$$

auf beiden Seiten noch durch π, und sucht $\frac{f}{\rho'\pi}$, so kommt

$$\frac{f}{\rho'\pi} = \frac{-3\delta + (3 + \delta\delta)\ Arc\ tang(=\delta)}{\delta^3},$$

folglich wenn man diesen Werth von $\frac{f}{\rho'\pi}$, dem im vorigen §. gefundenen gleich setzt

$$\mu(1 + \delta\delta)\,[\delta - Arc\ tang(=\delta)]$$
$$= -3\delta + (3 + \delta\delta)\ Arc\ tang(=\delta).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun δ bestimmen; da aber dieselbe transscendent ist, so kann dies allgemein nur näherungsweise geschehen; indem wir aber wissen, dass δ eine geringe Grösse sey, so dürfen wir die Kreisfunction in eine Reihe entwickeln, so dass

$$Arc\ tang(=\delta) = \delta - \tfrac{1}{3}\delta^3 + \tfrac{1}{5}\delta^6 - \tfrac{1}{7}\delta^7$$

gesetzt wird. Man erhält dadurch

$$\mu(1 + \tfrac{2}{5}\delta^2 - \tfrac{6}{35}\delta^4) = \tfrac{4}{5}\delta^2 - \tfrac{24}{35}\delta^4$$

oder wenn man mit dem Factor von μ dividirt

$$\mu = \tfrac{4}{5}\delta^2 - \tfrac{176}{175}\delta^4.$$

Nun ist aus §. 281. wenn α die Abplattung bedeutet, $\delta\delta = 2\alpha + 3\alpha\alpha$, folglich auch

$$\mu = \tfrac{8}{5}\alpha - \tfrac{284}{175}\alpha\alpha.$$

Setzt man also $\alpha = \tfrac{5}{8}\mu + 6\mu^2$, so wird

$$\mu = \mu + \mu\mu(\tfrac{8}{5}6 - \tfrac{71}{112}),$$

folglich $6 = \tfrac{355}{896}$, und hierdurch $\alpha = \tfrac{5}{8}\mu(1 + \tfrac{71}{112}\mu)$: Nimmt man statt μ seinen numerischen Werth, so erhält man

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{231{,}3}$$

welche bedeutend grösser, als die aus den Breitengradmessungen gefunden ist.

§. 298.

Bezeichnet man durch G' die Kraft der Schwere
[u]i Aequator, so hat man, indem in der letzten
[Gl]eichung des §. 294. statt G und v, G' und Null
[ge]setzt werden

$$G' = \frac{4\pi' B\rho' \sqrt{1+\delta\delta}}{\delta^3} [\delta - Arc\ tang = \delta].$$

[un]d wenn man mit dieser Gleichung die allgemeine
[fü]r G dividirt, so kommt

$$G = G' \sqrt{\frac{1+\delta\delta}{1+\delta\delta \cos v^2}}.$$

Nun war ferner, wenn l die Länge des Secun-
[de]npendels unter dem Aequator bedeutet, $G' = \pi\pi l$,
[fo]lglich auch

$$G = \pi\pi l. \sqrt{\frac{1+\delta\delta}{1+\delta\delta \cos v^2}}.$$

[Se]tzt man hierin statt $\delta\delta$, 2α, und entwickelt das
[R]adical, so kommt

$$G = \pi\pi l\ (1 + \alpha \sin v^2)$$

[un]d wenn man statt l seinen in französischen Fuss
[au]sgedrückten Werth aus (§. 296.) nimmt

$$G = 30{,}109 + 0{,}129 \sin v^2.$$

Bedeutet L die in der Breite v statt findende
[L]änge des Secundenpendels, so hat man $G = \pi\pi L$,
[u]nd daher

$$L = l\ (1 + \alpha \sin v^2).$$

[D]ies giebt in französischen Zollen ausgedrückt

$$L = 36{,}608 + 0{,}158 \sin v^2.$$

Man findet endlich noch den Werth von $\frac{f}{\pi\rho'}$, aus
[d]er Gleichung

$$\frac{f}{\pi\rho'} = \mu \frac{1+\delta\delta}{\delta^3} [\delta - Arc\ (tang = \delta)]$$
$$= \tfrac{1}{3}\mu\ [1 + \tfrac{2}{5}\delta^2 - \tfrac{6}{35}\delta^4]$$
$$= \tfrac{1}{3}\mu\ [1 + \tfrac{4}{5}\alpha^2 + \tfrac{16}{35}\alpha^2]$$
$$= 0{,}002303814.$$

§. 299.

Aus der Gleichung, die zur Bestimmung von δ diente,

$$\frac{(3 + \frac{f}{\pi\rho'}\,\delta\delta)\,\delta}{3 + \delta\delta} = Arc\,(tang = \delta)$$

sieht man leicht, dass ausser dem schon gefundenen sehr kleinen Werthe von δ, noch ein anderer sehr grosser da seyn wird. In diesem Fall wird $Arc\,(tg = \delta)$ von $\frac{1}{2}\pi$ wenig verschieden seyn; man setze daher

$$Arc\,(tang = \delta) = \tfrac{1}{2}\pi - \beta,$$

dann wird $\delta = tang\,\beta$, folglich

$$\frac{(3 + \frac{f}{\pi\rho'}\,cot\,\beta^2)\,cot\,\beta}{3 + cot\,\beta^2} = \tfrac{1}{2}\pi - \beta.$$

Diese Gleichung kann man auch so schreiben

$$\frac{3\,tang\,\beta^2 + \frac{f}{\pi\rho'}}{tang\,\beta + 3\,tang\,\beta^3} = \tfrac{1}{2}\pi - tang\,\beta + \tfrac{1}{3}\,tang\,\beta^3,$$

indem statt des Winkels β, der sehr klein seyn m[…] näherungsweise $tang\,\beta - \frac{1}{3}\,tang\,\beta^3$ gesetzt wer[…] kann. Ordnet man diesen Ausdruck nach den Pote[…]zen von $tang\,\beta$, so erhält man

$$\frac{f}{\pi\rho'} = \tfrac{1}{2}\pi\,tang\,\beta - 4\,tang\,\beta^2 + \tfrac{3}{2}\pi\,tang\,\beta^3$$

und man sieht hieraus, dass man

$$tang\,\beta = \frac{2}{\pi}\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right) + p.\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^2 + q.\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^3$$

annehmen darf, wo p und q unbestimmte Coeffi[…]ten sind, die nicht von $tang\,\beta$ und $\frac{f}{\pi\rho'}$ abh[…] Um dieselben zu bestimmen, substituire man de[…] genommenen Werth von $tang\,\beta$ in die vorige [...], so kommt

$$0 = (\tfrac{1}{2}\pi p - \frac{16}{\pi^2})\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^2$$

$$+ (\tfrac{1}{2}\pi q - \frac{16\,p}{\pi} + \frac{12}{\pi^3})\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^3$$

l man hat daher zur Bestimmung der Coefficienten
ind q die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}\pi p - \frac{16}{\pi^2} = 0$$

$$\tfrac{1}{4}\pi q - \frac{16p}{\pi} + \frac{12}{\pi^2} = 0$$

$$p = \frac{32}{\pi^3}, \quad q = \frac{8(128 - 3\pi\pi)}{\pi^6}.$$

n hat hierdurch

$$tang\, 6 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right) + \frac{32}{\pi^3}\cdot\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^2 + \frac{8(128-3\pi\pi)}{\pi^6}\cdot\left(\frac{f}{\pi\rho'}\right)^3$$

l es ergiebt sich in Zahlen $tang\, 6 = 0{,}0014722$,

$$\delta = \frac{1}{tang\, 6} = 679{,}25.$$

Da wir $A = B\sqrt{1+\delta\delta}$ gesetzt hatten, so ergiebt
, dass die grosse Axe des Sphäroïds beinahe 680
l grösser als die kleine seyn würde. Es ist ferner
$= A(1-\alpha)$, wo α die Abplattung bedeutet, folg-

$$1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\delta\delta}},$$ und durch den eben ge-
denen Werth von δ, würde die Abplattung
0,99852 betragen.

§. 300.

Es dürfte wohl der Mühe werth seyn, zu unter-
chen, ob die Gleichung aus welcher wir δ ableiten,
noch mehr Wurzeln habe, ausser den zwei
denen. Um den Bruch zu vermeiden, wollen
$\frac{f}{\pi\rho'} = k$ setzen, so dass also

$$\frac{3 + k\delta\delta}{3 + \delta\delta}\cdot\delta - Arc\ tang(=\delta) = 0$$

. Wir können nun δ als die Abscisse der Punkte
r krummen Linie betrachten, deren zugehörigen

Ordinaten durch Δ bezeichnet werden sollen, und die Gleichung dieser krummen Linie wird durch

$$\Delta = \frac{3 + k\delta\delta}{3 + \delta\delta}\,\delta - Arc\ tang(=\delta).$$

ausgedrückt werden können. Setzt man $\Delta = 0$, so geben die diesen entsprechenden Werthe von δ die Punkte an, wo die krumme Linie die Abscissenlinie schneidet, und so viel solcher Durchschnittspunkte vorhanden sind, so viel Wurzeln wird die Gleichung $\Delta = 0$ auch besitzen.

§. 301.

Wenn man die Gleichung $\Delta = \ldots$ differentiirt, so erhält man

$$\frac{d\Delta}{d\delta} = \delta\delta.\frac{3k - 2(2-5k)\delta^2 + k\delta^4}{(3+\delta\delta)^2\,(1+\delta\delta)}$$

und da bekanntlich $d\Delta = 0$ die Maxima und Minima von Δ angiebt, so wird die Gleichung

$$3k - 2(2-5k)\delta^2 + k\,\delta^4 = 0$$

die entsprechenden Werthe von δ enthalten. Man findet daraus

$$k\delta^2 = 2 - 5k \pm \sqrt{4 - 20k + 22k^2}$$

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse ist immer kleiner als $2-5k$, und da $2 > 5k$, so werden beide hieraus sich ergebende Werthe von δ^2 positiv seyn, folglich hat die Gleichung $d\Delta = 0$ vier reelle Wurzeln, die einander paarweise gleich, aber entgegengesetzt sind.

§. 302.

Setzt man $\delta = 0$, so wird auch $\Delta = 0$, also schneidet die krumme Linie die Abscissenlinie im Anfangspunkt der Coordinaten; nimmt man ferner δ sehr klein, so wird $\frac{d\Delta}{d\delta} = 3k\delta\delta$, also positiv, folglich müssen die Incremente $d\Delta$ und $d\delta$ gleiche Vorzeichen haben. Geht man daher auf der positiven Seite von δ fort, so wird auch nahe beim Anfangspunkt $d\Delta$ einen positiven Werth haben, folglich er-

ıbt sich die krumme Linie über die Abscissenlinie ıd erreicht ihre grösste Höhe für

$$\delta = +\sqrt{\frac{2-5k-\sqrt{4-20k+22k^2}}{k}}.$$

Dann nähert sie sich der Abscissenlinie wieder, ırchschneidet sie in der Stelle, die der zuerst gendenen Abplattung §. 297. entspricht, und geht nn auf der untern Seite derselben weiter, bis δ n Werth

$$+\sqrt{\frac{2-5k+\sqrt{4-20k+22k^2}}{k}}$$

nimmt. Dass sie nun wieder die Abscissenlinie rchschneiden muss, folgt aus der Gleichung für Δ; nn setzt man darin δ sehr gross, so erhält Δ einen sitiven Werth, und dieser zweite Durchschnittsnkt giebt den andern §. 299. gefundenen Werth r Abplattung. Andere Durchschnittspunkte können f der positiven Seite der δ nicht vorhanden seyn, il sonst die Gleichung $d\Delta = 0$ wenigstens noch rei Werthe für δ geben müsste.

Die negativen Werthe von δ brauchen wir nicht betrachten, da gleich grosse positive und negative Werthe von δ auch gleich grosse entgegengesetzte Werthe von Δ geben, und ausserdem die Abplattung h blos durch das Quadrat von δ bestimmt.

§. 303.

Die bis jetzt geführten Rechnungen zeigen deuth, dass das elliptische Sphäroïd diejenige Gestalt , welche die Erde haben muss, wenn sich dieselbe eine Axe dreht, und aus einer gleichförmig dich, flüssigen Materie bestehend gedacht wird. Al die letztere Annahme ist nicht mit der Natur ereinstimmend; denn wenn wir auch annehmen, s anfangs die Erde wirklich flüssig war, so ist es ch den über die Zusammendrückbarkeit der tropfen Flüssigkeiten angestellten Versuchen zufolge, hrscheinlich, dass die Dichtigkeit der flüssigen terie im Innern der Erde zunehmen muss. Ausdem ist auch noch zu berücksichtigen, dass die

Erde in ihrem jetzigen Zustande als aus einem festen Kern bestehend angesehen werden muss, welcher mit einer Flüssigkeit überdeckt ist, deren Tiefe gegen die Grösse des Kerns unbedeutend ausfällt. Wir müssen daher diese Untersuchungen noch weiter verfolgen, um so mehr, da die aus theoretischen Gründen abgeleitete Abplattung §. 297., von der aus den Gradmessungen §. 236. gefundenen bedeutend abweicht.

§. 304.

Bezeichnet man wie §. 276. das Element der Masse eines Körpers durch dM, die Coordinaten des angezogenen Punktes durch ξ, η, ζ, die des anziehenden Elements durch x, y, z, und die nach den drei Axen zerlegten Anziehungen der ganzen Masse auf den ersten Punkt durch X, Y, Z, so hat man a. a. O.

$$X = \int \frac{(\xi - x)\, dM}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \int \frac{(\eta - y)\, dM}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = \int \frac{(\zeta - z)\, dM}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gränzen, zwischen welchen diese Integrale genommen werden müssen, sind von den Coordinaten ξ, η, ζ unabhängig, und werden blos durch die Gestalt des anziehenden Körpers bestimmt.

Man sieht übrigens leicht, dass wenn man

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}$$

setzt, die drei Anziehungen auch durch

$$X = -\left(\frac{dV}{d\xi}\right), \quad Y = -\left(\frac{dV}{d\eta}\right), \quad Z = -\left(\frac{dV}{d\zeta}\right),$$

ausgedrückt werden können, da die Integrale sich blos auf die veränderlichen Grössen x, y, z beziehen, und dM nicht von ξ, η, ζ abhängt.

§. 305.

Die Grösse V lässt sich auf eine sehr einfache Art durch eine partielle Differentialgleichung darstellen, indem dieselbe als Function von ξ, ζ, η betrachtet wird. Setzt man der Kürze wegen

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = RR,$$

so ist $V = \int \frac{dM}{R}$, also wenn man differentiirt

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) = -\int \frac{dM}{R^2} \cdot \left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) + 2\int \frac{dM}{R^3} \cdot \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2$$

$$\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) = -\int \frac{dM}{R^2} \cdot \left(\frac{ddR}{d\eta^2}\right) + 2\int \frac{dM}{R^3} \cdot \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2$$

$$\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right) = -\int \frac{dM}{R^2} \cdot \left(\frac{ddR}{d\zeta^2}\right) + 2\int \frac{dM}{R^3} \cdot \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)^2.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so kommt

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)$$
$$= 2\int \frac{dM}{R^3} \left[\left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)^2\right]$$
$$- \int \frac{dM}{R^2} \left[\left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddR}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddR}{d\zeta^2}\right)\right].$$

Man hat aber aus der obern Gleichung

$$\left(\frac{dR}{d\xi}\right) = \frac{(\xi - x)}{R},$$

$$\left(\frac{dR}{d\eta}\right) = \frac{\eta - y}{R},$$

$$\left(\frac{dR}{d\zeta}\right) = \frac{\zeta - z}{R}.$$

$$\left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\zeta}\right)^2 = 1.$$

$$\left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) = \frac{RR - (\xi - x)^2}{R^3},$$

$$\left(\frac{ddR}{d\eta^2}\right) = \frac{RR - (\eta - y)^2}{R^3},$$

$$\left(\frac{ddR}{d\zeta^2}\right) = \frac{RR - (\zeta - z)^2}{R^3}.$$

$$\left(\frac{ddR}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddR}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddR}{d\zeta^2}\right) = \frac{2}{R}$$

und man sieht hieraus, dass

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right) = 0$$

seyn muss. Welches die verlangte Gleichung ist. Es ist aber wohl zu merken, dass dieselbe blos für Punkte ausserhalb des anziehenden Körpers gilt, weil die innerhalb statt findende Anziehung nicht durch eine einzige Integration der Formel V gefunden werden kann.

§. 306.

Wir wollen in dem Ausdruck von V (§. 304.) statt der rechtwinklichten Coordinaten, die Polarcoordinaten einführen, und setzen den Abstand eines Punktes, dessen Coordinaten x, y, z sind, vom Anfangspunkte der Coordinaten $= r$, den Winkel, den dieser Radius mit der Ebene der x, y macht $= \psi$, den Winkel, den eine durch den Radius und die Axe der z gelegte Ebene mit der Ebene der x, z macht $= \varphi$. Hierdurch hat man bekanntlich

$$x = r.\cos\varphi.\cos\psi,$$
$$y = r.\sin\varphi.\cos\psi,$$
$$z = r.\sin\psi.$$

und wenn wir die auf den Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, sich beziehenden Polarcoordinaten durch r', φ', ψ' bezeichnen, so erhält man auf gleiche Art

$$\xi = r'.\cos\varphi'.\cos\psi',$$
$$\eta = r'.\sin\varphi'.\cos\psi',$$
$$\zeta = r'.\sin\psi'.$$

Es ergiebt sich hieraus nach den gehörigen Reductionen

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 =$$
$$r'r' - 2r'r\,[\sin\psi\,\sin\psi' + \cos\psi\,\cos\psi'\,\cos(\varphi' - \varphi)] + rr.$$

und da nach der Methode des §. 277. das Element

$$dM = \rho.\,rrdr\,d\varphi.\,d\psi\,\cos\psi$$

gefunden wird, wo ρ die Dichtigkeit desselben bezeichnet, so wird

$$V = \int \frac{\rho\ r^2 dr.\ d\phi.\ d\psi\ \cos\psi}{\sqrt{[r'r' - 2r'r \cos\omega + rr]}}$$

werden, indem wir der Kürze wegen

$$\sin\psi.\ \sin\psi' + \cos\psi.\ \cos\psi'.\ \cos(\phi' - \phi) = \cos\omega.$$

annehmen. Man bemerkt leicht, dass ω der Winkel ist, den die beiden Radien r und r' mit einander bilden.

§. 307.

Man kann nun V als eine Function von r', ϕ', ψ' betrachten, so dass

$$dV = \left(\frac{dV}{dr'}\right) dr' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) d\psi' + \left(\frac{dV}{d\phi'}\right) d\phi'$$

seyn wird. In so fern V als eine Function von ξ, η, ζ angesehen wird, hat man das Differential

$$dV = \left(\frac{dV}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{dV}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right) d\zeta$$

und da aus den Relationen zwischen ξ, η, ξ, r', ϕ', ψ' die Gleichungen

$$r'r' = \xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta$$

$$\tang \phi' = \frac{\eta}{\xi},$$

$$\tang \psi' = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi\xi + \eta\eta}},$$

folgen, so erhält man durch Differentiation

$$dr' = \frac{\xi}{r'} d\xi + \frac{\eta}{r'} d\eta + \frac{\zeta}{r'} d\zeta.$$

$$d\phi' = \frac{d\eta}{\xi} \cos\phi'^2 - \frac{\eta d\xi}{\xi\xi} \cos\phi'^2$$

$$d\psi' = \frac{d\zeta\ \cos\psi'^2}{\sqrt{\xi\xi + \eta\eta}} - \zeta \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{(\xi\xi + \eta\eta)^{\frac{3}{2}}} \cos\psi'^2.$$

Setzt man diese Werthe von dr', $d\phi'$, $d\psi'$ in die Gleichung für dV, so kommt

$$dV = \left\{ \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cos\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\sin\varphi'}{r' \cos\psi'} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) . \frac{\cos\varphi' \sin\psi'}{r'} \right\} d\xi.$$
$$+ \left\{ \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\varphi' \cos\psi' + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\cos\varphi'}{r' \cos\psi'} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) . \frac{\sin\varphi' \sin\psi'}{r'} \right\} d\eta.$$
$$+ \left\{ \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\psi' \right.$$
$$\left. - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) . \frac{\cos\psi'}{r'} \right\} d\zeta.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorigen, wo V als Function von ξ, η, ζ betrachtet wurde, so ergiebt sich

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cos\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) . \frac{\sin\varphi'}{r' \cos\psi'}$$
$$- \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) . \frac{\cos\varphi' \sin\psi'}{r'},$$
$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\varphi' \cos\psi' + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) . \frac{\cos\varphi}{r' \cos\varphi'}$$
$$- \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) . \frac{\sin\varphi' \sin\psi'}{r'},$$
$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\psi' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) . \frac{\cos\psi'}{r'}$$

wodurch also die drei nach den Axen zerlegten Anziehungen auch vermittelst der Polarcoordinaten des angezogenen Punktes gegeben sind, sobald man V kennt, da die vor dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder, nach §. 290., nichts anders als die Seitenkräfte der Anziehungskraft sind.

§. 308.

Wir müssen nun noch die Transformation der partiellen Differentialgleichung (§. 305.)

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right) = 0$$

vornehmen, indem in derselben an die Stelle der rechtwinklichten Coordinaten ξ, η, ζ, die Polarcoordinaten r', φ', ψ' eingeführt werden. Zu diesem Zweck differentiiren wir die drei Gleichungen des vorigen Paragraphs, welche $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)$ angeben, so kommt

$$d.\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) d\xi + \left(\frac{ddV}{d\xi d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{ddV}{d\xi d\zeta}\right) d\zeta$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) \cos\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{ddV}{dr'd\varphi'}\right) \cdot \frac{\sin\varphi'}{r'\cos\psi'} \\ \quad - \left(\frac{ddV}{dr'd\psi'}\right) \frac{\cos\varphi' \sin\psi'}{r'} \\ \quad + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \cdot \frac{\sin\varphi'}{r'r'\cos\psi'} + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\psi'}{r'r'} \end{array}\right\} dr',$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{ddV}{dr'd\varphi'}\right) \cos\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right) \frac{\sin\varphi}{r'\cos\psi'} \\ \quad - \left(\frac{ddV}{d\varphi'd\psi'}\right) \frac{\cos\varphi' \sin\psi'}{r'} \\ \quad - \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\cos\varphi'}{r'\cos\psi'} \\ \quad + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\sin\varphi' \sin\psi'}{r'} \end{array}\right\} d\varphi'.$$

$$+\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{ddV}{dr'd\psi'}\right)\cos\varphi'\cos\psi' - \left(\frac{ddV}{d\varphi' d\psi'}\right)\frac{\sin\varphi'}{r'\cos\psi'} \\ -\left(\frac{ddV}{d\psi'^2}\right)\frac{\cos\varphi'\sin\psi'}{r'} \\ -\left(\frac{dV}{dr'}\right)\cos\varphi'\sin\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)\frac{\sin\varphi'\sin\psi'}{r'\cos\psi'^2} \\ -\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\frac{\cos\varphi'\cos\psi'}{r'}\end{array}\right\} d\psi'.$$

Es wird also das vollständige Differential von $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$, die Form

$$Pdr' + Qd\varphi' + Rd\psi'$$

haben, wo P, Q, R die so eben entwickelten Coëfficienten bedeuten. Man hat nun aus vorigen §.

$$dr' = \cos\varphi'\cos\psi'.d\xi + \sin\varphi'\cos\psi'.d\eta + \sin\psi'.d\zeta$$

$$d\varphi' = \frac{\cos\varphi'}{r'\cos\psi'}d\eta - \frac{\sin\varphi'}{r'\cos\psi'}d\xi.$$

$$d\psi' = -\frac{\sin\psi'\cos\varphi'}{r'}d\xi - \frac{\sin\psi'\sin\varphi'}{r'}d\eta + \frac{\cos\psi'}{r'}d\zeta.$$

Da wir von dem Differential von $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$ aber nur das in $d\xi$ multiplicirte Glied brauchen, so haben wir

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) = P\left(\frac{dr'}{d\xi}\right) + Q\left(\frac{d\varphi'}{d\xi}\right) + R\left(\frac{d\psi'}{d\xi}\right).$$

Substituirt man statt P, Q, R, $\frac{dr'}{d\xi}$, $\frac{d\varphi'}{d\xi}$, $\frac{d\psi'}{d\xi}$, ihre Werthe, so kommt nach den gehörigen Reductionen

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) = \left(\frac{ddV}{dr'^2}\right)\cos\varphi'^2\cos\psi'^2 + \left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right)\frac{\sin\varphi'}{r'r'\cos\psi'^2}$$
$$+ \left(\frac{ddV}{d\psi'^2}\right)\frac{\sin\psi^2\cos\varphi'^2}{r'r'}$$
$$-2\left(\frac{ddV}{dr'd\varphi'}\right)\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{r'}$$

$$- 2\left(\frac{ddV}{dr'd\psi'}\right) \frac{\cos\varphi'^2 \cos\psi' \sin\psi'}{r'}$$

$$+ 2\left(\frac{ddV}{d\varphi'd\psi'}\right) \frac{\cos\varphi' \sin\varphi' \sin\psi'}{r'r' \cos\psi'}$$

$$+ 2\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{r'r' \cos\psi'^2}$$

$$+ \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{2\cos\varphi'^2 \cos\psi'^2 - \sin\varphi'^2}{r'r' \cos\psi'} \sin\psi'$$

$$+ \left(\frac{dV}{dr}\right) \frac{\sin\varphi'^2 + \cos\varphi'^2 \sin\psi'^2}{r'}.$$

§. 309.

Die beiden übrigen partiellen Differentialien $\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right)$, $\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)$ können nun auf dieselbe Art ge-
nden werden; allein man wird sich bei einiger
ufmerksamkeit auf die Zusammensetzung der Glei-
iungen für $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)$, dr', $d\varphi'$, $d\psi'$
ese Arbeit ersparen können. Denn man wird
$\left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right)$ aus $\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right)$ finden, wenn man statt φ',
$' - 90°$ setzt, und eben so erhalten wir $\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right)$
is $\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right)$, indem $\varphi = 0$ genommen, und statt ψ',
$' - 90$ substituirt wird. Es wird auf diese Weise

$$\left(\frac{ddV}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right) =$$

$$\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right) \cdot \frac{1}{r'r' \cos\psi'^2} + \left(\frac{ddV}{d\psi'^2}\right) \cdot \frac{1}{r'r'}$$

$$- \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \cdot \frac{\sin\psi'}{r'r' \cos\psi'} + \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cdot \frac{2}{r'}.$$

§. 310.

Multiplicirt man die ganze Gleichung durch $r'r'$, und bemerkt, dass die vor dem Gleichheitszeichen stehende Grösse Null ist, so kommt

$$0 = r'r'\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) + 2r'\left(\frac{dV}{dr'}\right) + \left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right)\cdot\frac{1}{\cos\psi'^2}$$
$$+\left(\frac{ddV}{d\psi'^2}\right) - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\sin\psi'}{\cos\psi'}.$$

Man sieht aber leicht, dass

$$r'r'\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) + 2r'\left(\frac{dV}{dr'}\right) = r'.\left(\frac{dd.\,r'V}{dr'^2}\right)$$

$$\left(\frac{ddV}{d\psi'^2}\right) - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{\sin\psi'}{\cos\psi'}$$
$$= \frac{1}{\cos\psi'}\left[\frac{d.\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cos\psi'}{d\psi'}\right]$$
$$= \left[\frac{d.\,(1-\mu\mu)\left(\frac{dV}{d\mu}\right)}{d\mu}\right],$$

indem man $\sin\psi' = \mu$ setzt. Folglich wird die Gleichung für V diese Gestalt haben

$$0 = \left[\frac{d\,(1-\mu\mu)\left(\frac{dV}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] + r'\left(\frac{dd.\,r'V}{dr'^2}\right) + \frac{\left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right)}{1-\mu\mu}. \qquad \text{(A)}$$

§. 311.

Der Ausdruck von V (§. 306.) kann auf zwei verschiedene Arten in eine Reihe verwandelt werden, indem man entweder das Radical in eine nach negativen Potenzen von r', oder in eine nach positiven

tenzen von r' fortschreitende Reihe entwickelt. e erste Reihe wird dann convergiren, wenn der gezogene Punkt ausserhalb der anziehenden Masse gt, die zweite in dem Fall, wenn der angezogene nkt sich innerhalb dieser Masse befindet. Entckelt man nun den Nenner des Integrals, welches 306. den Werth von V ausdrückt, so kann man

$$V = \int \frac{dM}{r'} \left(1 + \Omega' \frac{r}{r'} + \Omega'' \frac{r^2}{r'^2} + \ldots\ldots\right)$$

zen, wo Ω', Ω'' .... Functionen von $\cos\omega$ ausücken, deren Form wir aufsuchen müssen. Da h das Integralzeichen nicht auf r' bezieht, so wird

$$r'V = \int dM \left(1 + \Omega' . \frac{r}{r'} + \Omega'' \frac{r^2}{r'^2} + \ldots\right)$$

lglich auch, wenn man zweimal hinter einander ch r' differentiirt:

$$'\left(\frac{dd.\, r'V}{dr'^2}\right) = \int dM \left[2\Omega' \frac{r}{r'^3} + 2.\, 3. \frac{r^2}{r'^4} \Omega'' + \ldots\right]$$

d wie man leicht sieht ist hiervon das allgemeine ied, welches r'^{m+1} zum Divisor hat

$$\int m(m+1) \frac{r^m}{r'^{m+1}} .\, \Omega^m .\, dM. \qquad (a)$$

Eben so findet man das allgemeine Glied von

$$\frac{\left(\frac{ddV}{d\varphi'^2}\right)}{1 - \mu\mu}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{dd\Omega^{(m)}}{d\varphi'^2}\right)}{1 - \mu\mu} . \frac{r^m}{r'^{m+1}} dM \qquad (b)$$

d endlich das allgemeine Glied von

$$\left[\frac{d.\,(1 - \mu\mu)\left(\frac{dV}{d\mu}\right)}{d\mu}\right],$$

$$= \int dM \frac{r^m}{r'^{m+1}} \left[\frac{d\,(1 - \mu\mu)\left(\frac{dV}{d\mu}\right)}{d\mu}\right]. \qquad (c)$$

§. 312.

Substituirt man die Reihen, welche durch diese drei Differentiationen entstanden sind, in die Gleichung (A) §. 309. und bedenkt, dass die Summe derselben für alle Werthe von r' Null seyn muss, so folgt, dass das allgemeine Glied gleichfalls verschwinden wird; man erhält daher

$$0 = (a) + (b) + (c).$$

Obgleich nun diese allgemeinen Glieder durch Integrale ausgedrückt sind, so kann man doch das Integralzeichen weglassen, weil natürlicherweise wenn ein Integral Null ist, auch das Differential verschwinden muss. Vernachlässigt man ausserdem die gemeinschaftlichen Factoren $\frac{r^m}{r'^{m+1}} . dM$, so kommt:

$$0 = \left[\frac{d. (1 - \mu\mu) \left(\frac{d\Omega^{(m)}}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] + \frac{\left(\frac{dd\Omega^{(m)}}{d\varphi'^2}\right)}{1 - \mu\mu} + m(m+1)\, \Omega^{(m)}, \qquad \text{(B)}$$

welche die Bedingungsgleichung ist, der die Function $\Omega^{(m)}$ unterworfen seyn muss.

§. 313.

Man sieht übrigens leicht, dass diese Grössen Ω', Ω'' .... rationale und ganze Functionen von $\cos\omega$ seyn müssen, und dass die höchste in ihnen vorkommende Potenz von $\cos\omega$, diejenige seyn muss, deren Exponent mit dem Index übereinstimmt, so dass z. B. in $\Omega^{(m)}$, $\cos\omega^m$ die höchste Potenz seyn wird. Man hat also die Form

$$\Omega^{(m)} = \alpha . \cos\omega^m + \beta . \cos\omega^{m-1} + \ldots\ldots,$$

wo α, β .... constante Grössen seyn werden. Setzt man ferner statt $\cos\omega$ seinen Werth (§. 306.)

$$\sin\psi . \sin\psi' + \cos\psi . \cos\psi' . \cos(\varphi' - \varphi)$$

so lässt sich $\Omega^{(m)}$ in eine geschlossene Reihe entwickeln, die nach Potenzen der Grösse $\cos(\varphi' - \varphi)$ fortschreitet, und deren Coefficienten Functionen von $\sin\psi$, $\sin\psi'$, $\cos\psi$, $\cos\psi'$ seyn werden. Nun ist aber bekannt, dass jede Potenz eines Cosinus sich durch die Cosinus der Vielfachen des Winkels ausdrücken lässt, folglich wird man auch

$$\Omega^{(m)} = T^{(0)} + T' \cos(\varphi' - \varphi) + T'' \cos 2(\varphi' - \varphi) + \ldots\ldots + T^{(m)} \cos m(\varphi' - \varphi)$$

setzen können, wo T^0, T', T'' .... blos ψ und ψ' enthalten. Dass die Vielfachen des Winkels $\varphi' - \varphi$, nicht höher als bis zum m fachen im Ausdruck von $\Omega^{(m)}$ steigen können, ist daraus einleuchtend, dass keine höhere Potenz als $\cos\omega^m$ darin vorkommt, die also auch nicht höhere Potenzen als $\cos(\varphi' - \varphi)^m$ hervorbringen kann, und das höchste Vielfache in der Entwickelung von $\cos(\varphi' - \varphi)^m$, $\cos m(\varphi' - \varphi)$ seyn muss.

§. 314.

Setzt man die Differentiale dieses Werthes von $\Omega^{(m)}$ in die Gleichung (B) §. 312., so findet man auf ähnliche Art, als im angegebenen Paragraph, dass die Functionen T', T'' ... so beschaffen seyn müssen, dass allgemein

$$\frac{d.(1 - \mu\mu).\frac{dT^{(n)}}{d\mu}}{d\mu} + \frac{nn}{1 - \mu\mu}.\,T^{(n)} + m.(m+1)\,T^{(n)} = 0$$

werden wird, wodurch sich die Form der Function $T^{(n)}$ bestimmt. Aus dem Werth von $\cos\omega$ zeigt sich, dass ψ mit ψ' vertauscht werden kann, ohne dass sich hierdurch die Form des Ausdrucks ändert; es wird also $\Omega^{(m)}$ eine symmetrische Function von ψ und ψ' seyn, und aus demselben Grunde auch $T^{(n)}$.

§. 315.

Wir wollen nun annehmen, die Erde sey ein Revolutionskörper, der aus Schichten von ungleicher Dichtigkeit besteht, so ist es am natürlichsten vorauszusetzen, dass die unendlich dünne Schicht, deren Dichtigkeit homogen ist, ebenfalls durch Umdrehung um die Axe entstanden sey. Behielte man z. B. die Annahme bei, die Erde sey ein Sphäroïd, so würde man alle Schichten von gleicher Dichtigkeit ebenfalls als Sphäroïde betrachten müssen, deren Umdrehungsaxen mit der der äusseren Oberfläche zusammenfallen. Lässt man bei dieser Voraussetzung für irgend ein Element der Masse ψ und r ungeändert, sondern ändert blos φ, so wird man zu lauter Elementen von gleicher Dichtigkeit gelangen, und die Grösse ρ, welche die Dichtigkeit bezeichnet, muss daher von φ unabhängig seyn.

§. 316.

Man kann daher die erste Integration, die zur Auffindung des Werthes von V nothwendig ist, rücksichtlich der Grösse $d\varphi$ vollziehen, ohne die Function ρ zu berücksichtigen. Nun war (§. 311.)

$$V = \int \frac{dM}{r'} \left[1 + \Omega' \frac{r}{r'} + \Omega'' \frac{r^2}{r'^2} + \dots \right]$$

und wenn man statt dM seinen Werth (§. 306.)

$$\rho .\, rrdr .\, d\varphi .\, d\psi .\, \cos\psi .$$

substituirt, so erhält man

$$V = \int \frac{\rho .\, rr\, dr\, d\psi .\, \cos\psi}{r'} \left\{ \begin{array}{l} \int d\varphi + \frac{r}{r'} \int \Omega'\, d\varphi \\ + \frac{r^2}{r'^2} \int \Omega''\, d\varphi \\ + \frac{r^3}{r'^3} \int \Omega'''\, d\varphi \\ + \dots \end{array} \right\}$$

Die Integrationen müssen hierbei bekanntlich von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ausgedehnt werden. Betrachtet man nun das Integral $\int \Omega^{(m)} d\varphi$, so sieht man aus §. 313., dass allgemein

$$\int \Omega^{(m)} d\phi = \int T^0 d\phi + \int T' d\phi.\ cos(\phi' - \phi) + \\ + \ldots\ldots + \int T^{(m)} d\phi.\ cos\, m(\phi' - \phi)$$

werden wird. Allein zwischen den angegebenen Gränzen von ϕ, sieht man leicht, dass

$$\int T'.\ d\phi.\ cos\ (\phi' - \phi) = 0$$
$$\int T''.\ d\phi.\ cos\, 2(\phi' - \phi) = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\int T^{(m)}.\ d\phi.\ cos\, m(\phi' - \phi) = 0.$$

seyn muss, so dass blos

$$\int \Omega^{(m)} d\phi = \int T^0 d\phi = 2\pi T^0$$

bleibt.

Man hat also, wenn man statt T^0, T_m setzt, um anzuzeigen; dass es das erste Glied der Entwickelung von $\Omega^{(m)}$ ist

$$V = \frac{2\pi}{r'} \int \varrho\, rr\, dr.\, d\psi\, cos\, \psi. \left\{ 1 + T_1 \frac{r}{r'} + T_2 \frac{r^2}{r'^2} + \ldots \right\}$$

so dass wir noch die beiden Integrationen nach r und ψ auszuführen haben.

§. 317.

Man muss nun den Radius Vector r als eine Function eines bestimmten Radius Vectors derselben Schicht von gleicher Dichtigkeit, und des Winkels ψ betrachten, und wir wollen für diesen bestimmten Radius Vector denjenigen nehmen, für welchen der Winkel ψ Null ist. Bezeichnen wir denselben durch q, so wird die Dichtigkeit in jeder Schicht als eine Function von q angesehen werden müssen. Bildeten z. B. die Schichten von gleicher Dichtigkeit elliptische Sphäroïde, in denen das Verhältniss der Axen immer dasselbe bleibt, so würde q allgemein die halbe grosse Axe des Sphäroïds bezeichnen, und wenn man die halbe kleine Axe durch nq bezeichnet, so erhält man in diesem besondern Fall

$$r = \frac{nq}{\sqrt{sin\,\psi^2 + n^2\, cos\,\psi^2}}.$$

Da nun bei der Integration nach der veränderlichen Grösse r, ψ als constant angesehen werden muss, so wird man statt dr', das Differential $P.dq$ setzen können, wo P eine Function von q und ψ seyn wird. Wir nehmen der Kürze wegen

$$\int \varrho . rr . dr = N, \quad \int \varrho . r^3 . dr = N', \quad \int \rho . r^4 . dr = N''.$$

u. s. w., wo die Integrale von $q = 0$ bis zu dem Werthe von q genommen werden müssen, welches derjenigen Schicht entspricht, welche durch den angezogenen Punkt geht. Liegt der Punkt völlig ausserhalb des anziehenden Körpers, so muss das Integral von $q = 0$ bis zu dem Werthe von q, der der Oberfläche zugehört, genommen werden.

Endlich sehe man die Integrationen nach ψ, von $\psi = -90^\circ$ bis $\psi = +90^\circ$ genommen, als ausgeführt an, und setze

$$\int N . \quad d\psi . \cos\psi = L$$
$$\int N' . T_1 . d\psi . \cos\psi = L'$$
$$\int N'' . T_2 . d\psi . \cos\psi = L'' \text{ u. s. w.}$$

so erhält man folgenden Werth von V,

$$V = 2\pi \left[\frac{L}{r'} + \frac{L'}{r'^2} + \frac{L''}{r'^3} + \ldots\right].$$

§. 318.

Dieser Werth von V giebt aber blos die Anziehung derjenigen Schichten, welche um den Mittelpunkt des Körpers bis zu derjenigen Schicht gelegt sind, die durch den angezogenen Punkt geht. Um den übrigen Theil der Anziehung zu erhalten, müssen wir das Radical

$$(r'r' - 2r'r \cos\omega + rr)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe entwickeln, die nach den positiven Potenzen von r' fortschreitet.

Man sieht leicht, dass man in diesem Fall, wenn man zur Unterscheidung statt V, V' setzt,

$$V' = \int \frac{dM}{r} \left[1 + \Omega' \frac{r'}{r} + \Omega'' \frac{r'^2}{r^2} + \ldots\ldots\right]$$

erhalten wird, wo Ω', Ω'' .... dieselbe Bedeutung als §. 316. haben. Substituirt man statt dM seinen Werth und integrirt nach φ, so kommt, wie §. 316,

$$V' = 2\pi \int \varrho . r dr\, d\psi . \cos\psi \left[1 + T_1 \frac{r'}{r} + T_2 \frac{r'^2}{r^2} + \ldots\right].$$

Integrirt man nun nach r, und setzt

$$\int \varrho . r dr = \mathfrak{R}.$$
$$\int \varrho . dr = \mathfrak{R}'$$
$$\int \varrho . \frac{dr}{r} = \mathfrak{R}'' \text{ u. s. w.}$$

wo die Integrale von dem Werthe von q, welcher der durch den angezogenen Punkt gehenden Schicht entspricht, bis zu demjenigen, der der Oberfläche zugehört, genommen werden müssen, so wird, wenn noch der Kürze wegen die zwischen den Gränzen $\psi = -90°$ und $\psi = +90°$ genommenen Integrale

$$\int \mathfrak{R} . \quad d\psi . \cos\psi = \mathfrak{L}$$
$$\int \mathfrak{R}' . T_1 . d\psi . \cos\psi = \mathfrak{L}'$$
$$\int \mathfrak{R}'' . T_2 . d\psi . \cos\psi = \mathfrak{L}'' \text{ u. s. w.}$$

annimmt,

$$V' = 2\pi \left[\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' r' + \mathfrak{L}'' r'' + \ldots \right].$$

§. 319.

Nun ist in §. 290 und 291. gezeigt worden, dass eine flüssige Masse, auf welche nach den Richtungen der drei Axen ξ, η, ζ, die Kräfte P, Q, R wirken, im Gleichgewichte seyn wird, wenn die Gestalt ihrer Oberfläche durch die Differentialgleichung

$$P d\xi + Q d\eta + R d\zeta = 0$$

ausgedrückt wird.

In unserm Fall sind die Kräfte, welche auf die flüssige Masse wirken, die Anziehung der einzelnen Theile derselben gegen einander, und die durch die Drehung hervorgebrachte Centrifugalkraft. Die Anziehungskräfte geben den Ausdruck §. 276.

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta$$

und die Centrifugalkraft giebt, da sie den Anziehungen entgegengesetzt ist

$$-2f\, \xi d\xi - 2f\, \eta d\eta$$

folglich wird die Gleichung der Oberfläche der flüssigen Materie

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta - 2f\, \xi d\xi - 2f\, \eta d\eta = 0.$$

§. 320.

Wir sehen ferner aus §. 304., dass

$$X = -\left(\frac{dV}{d\xi}\right), \quad Y = -\left(\frac{dV}{d\eta}\right), \quad Z = -\left(\frac{dV}{d\zeta}\right),$$

seyn wird, folglich hat man

$$-(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta)$$
$$= \left(\frac{dV}{d\xi}\right) d\xi + \left(\frac{dV}{d\eta}\right) d\eta + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right) d\zeta.$$

und da V blos eine Function der drei Coordinaten ξ, η, ζ des angezogenen Punktes ist, so ist bekannt, dass die hinter dem Gleichheitszeichen stehende Grösse das vollkommene Differential von V ist.

Die vorige Gleichung der im Gleichgewichte befindlichen Oberfläche der Flüssigkeit

$$Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta - 2f(\xi d\xi + \eta d\eta) = 0$$

verwandelt sich daher in diese:

$$dV + 2f(\xi d\xi + \eta d\eta) = 0$$

oder wenn man integrirt

$$V + f(\xi\xi + \eta\eta) = c$$

wo c die Constante bedeutet. Setzt man statt ξ und η ihre Werthe aus §. 306., so wird $\xi\xi + \eta\eta = r'r' \cos\psi'^2$, folglich auch

$$V + f r'r' \cos\psi'^2 = c$$

und dieser Werth von V ist der Summe der beiden in §. 317 und 318. entwickelten Reihen gleich, d. h.

$$V = 2\pi \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{r'} + \frac{L'}{r'^2} + \frac{L''}{r'^2} + \ldots . \\ \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r''^2 + \ldots . \end{array} \right\}.$$

§. 321.

Betrachten wir zuerst einen Körper, der nur mit einer wenig tiefen Schicht der Flüssigkeit überdeckt ist, wie dies bei der Erde der Fall ist, da das Meer überall gegen die Dimensionen dieses Körpers eine nur geringe Tiefe besitzt, so wird die vorige Gleichung der Oberfläche der Flüssigkeit immer noch statt finden, da es ganz einerlei ist, ob die Anziehungskräfte von einem flüssigen oder einem festen Körper herkommen. Bei dieser Voraussetzung können wir die

Anziehung des Wassers unter sich ganz vernachlässigen, und es ist dann einleuchtend, dass der Werth von V' oder die Reihe

$$2\pi(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r'' + \ldots\ldots)$$

Null werden muss, weil die Gränzen für r zwischen welchen der Ausdruck integrirt wird, mit einander zusammenfallen, und die Gleichung der Oberfläche wird

$$c = fr'r' \cos\psi'^2 + 2\frac{\pi}{r'}\left(L + \frac{L'}{r'} + \frac{L''}{r'^2} + \ldots\right).$$

Nimmt man ausserdem an, dass die Gestalt der Schichten nicht sehr von der Kugel abweicht, so wird r nicht sehr von q verschieden seyn, und wir können $r = q(1 - 6\theta)$ setzen, wo q die Bedeutung des §. 317. hat. Die Grösse 6 ist ein kleiner Coefficient, und θ bezeichnet eine Function von ψ. Man begreift leicht, dass wenn die Schichten in der Ebene der ξ, η, ihre grösste Ausdehnung haben sollen, und zugleich gegen diese Ebene symmetrisch liegen, r für gleich grosse positive und negative Werthe von ψ einerlei Grösse haben muss; folglich wird θ als eine Function von $\sin\psi^2$ angenommen werden können.

§. 322.

Wir müssen jetzt die Form der Functionen T_1, T_2 ... bestimmen, wenn wir die Integrationen weiter ausführen wollen. Die Gleichung (§. 314.)

$$\frac{d.(1-\mu\mu)\frac{dT^{(n)}}{d\mu}}{d\mu} + \frac{nn}{1-\mu\mu}.\,T^{(n)} + m(m+1)\,T^{(n)} = 0$$

reducirt sich, da $T_{(m)}$ im Allgemeinen aus $T^{(n)}$ entsteht, indem der Index n, Null gesetzt wird, auf

$$\frac{d.(1-\mu\mu)\frac{dT_{(m)}}{d\mu}}{d\mu} + m.(m+1)\,T_{(m)} = 0.$$

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass wir dieser Differentialgleichung der zweiten Ordnung, Genüge leisten werden, indem wir

$$T_{(m)} = a\mu^m + b\mu^{m-2} + c\mu^{m-4} + \ldots\ldots$$

setzen, wo a, b, c unbestimmte Coeffcienten sind. Um dieselben zu bestimmen, substituire man diesen Werth, so wie sein Differential in vorige Differentialgleichung, und setze die zu gleichen Potenzen von μ gehörigen Coefficienten Null, so erhält man

$$b = -\frac{m.\ m-1}{2\,(2m-1)}\,a,$$

$$c = -\frac{(m-2)\,(m-3)}{4\,(2m-3)}\,b, \text{ u. s. w.}$$

wo man leicht das Gesetz des Fortganges bemerkt. Es wird daher

$$T_{(m)} = a\left\{\mu^m - \frac{m.\ m-1}{2\,(2m-1)}\,\mu^{m-2} + \frac{m.\ m-1.(m-2)\,m-3}{2.\ 4.\ (2m-1)\,(2m-3)}\,\mu^{m-4}\ldots\right\}$$

so dass also der Coefficient a unbestimmt bleibt. Bezeichnet man die Reihe durch $M^{(m)}$, so hat man

$$T_{(m)} = a.\ M^{(m)}$$

wo $M^{(m)}$ eine Function von μ oder $\sin\psi'$ ist. Nun soll aber nach §. 314. die Grösse $T^{(m)}$ eine symmetrische Function von $\sin\psi'$ und $\sin\psi$ seyn; es wird daher der Coefficient a als Factor die Reihe $M^{(m)}$ enthalten müssen, indem man in derselben statt μ, $\sin\psi$ setzt, folglich ist

$$a = a'\left\{\sin\psi^m - \frac{m.\,(m-1)}{2\,(2m-1)}\,\sin\psi^{n-2} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2).\,(m-3)}{2.\,4.\,(2m-1)\,(2m-3)}\,\sin\psi^{m-4}\ldots\right\}$$

$$= a'\ \Psi^{(m)}$$

und a' wird ein blos von m abhängender Coefficient seyn. Es ist also

$$T_{(m)} = a'.\ M^{(m)}.\ \Psi^{(m)}.$$

§. 323.

Um den Coefficienten a' zu bestimmen, müssen wir auf die Entstehung der Function T zurückgehen. Setzt man statt $\frac{r}{r'}$, u, so entsteht die Reihe (§. 311.)

$$1 + \Omega' u + \Omega'' u^2 + \Omega''' u^3 + \ldots\ldots$$

aus der Entwickelung des Radicals

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2u \cos \omega + uu)}}$$

und wenn man diese Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze ausführt, so kommt

$$1 + \Omega' u + \Omega'' u^2 + \Omega''' u^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} u (2\cos\omega - u) + \frac{1.2.}{2.4.} u^2 (2\cos\omega - u)^2$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} u^3 (2\cos\omega - u)^3 + \ldots\ldots$$

Das allgemeine Glied der zweiten Reihe wird daher

$$\frac{1.3.5.7 \ldots\ldots 2m-1}{2.4.6.8 \ldots\ldots 2m} . u^m (2\cos\omega - u)^m$$

und es folgt hieraus leicht, dass alle Glieder die in u^m multiplicirt sind, durch

$$+ \frac{1.3.5.7 \ldots\ldots 2m-1}{1.2.3.4 \ldots\ldots m} \cos\omega^m$$

$$- \frac{1.3.5.7 \ldots\ldots 2m-3}{1.2.3.4 \ldots\ldots m-2} . \frac{\cos\omega^{m-2}}{2}$$

$$+ \frac{1.3.5.7 \ldots\ldots 2m-5}{1.2.3.4 \ldots\ldots m-4} . \frac{\cos\omega^{m-4}}{2.4} - \ldots\ldots$$

ausgedrückt werden; da nun in der andern Reihe der Coefficient von u^m durch $\Omega^{(m)}$ bezeichnet wurde, so ergiebt sich, dass dieser letztere Ausdruck den Werth von $\Omega^{(m)}$ darstellt.

§. 324.

Es war aber aus §. 306. der Werth von

$$\cos\omega = \sin\psi . \sin\psi' + \cos\psi . \cos\psi' . \cos(\phi' - \phi);$$

substituirte man diesen Ausdruck in dem von Ω^m, so könnte man denselben, wie §. 313., erwähnt ist, in eine Reihe von der Form

$$\Omega^{(m)} = T^0 + T' \cos(\varphi' - \varphi) + T'' \cos 2(\varphi' - \varphi) + \dots$$

entwickeln; allein da wir blos einen Coefficienten suchen, so ist die Betrachtung eines besondern Falles hinreichend; wir wollen daher annehmen $\psi' = 90°$, so wird $\cos\omega = \sin\psi$, also darf in dem Werthe von $\Omega^{(m)}$, der Winkel $\varphi' - \varphi$ gar nicht mehr vorhanden seyn, d. h. es wird $T' = 0$, $T'' = 0$ u. s. w. Folglich bleibt blos die Gleichung $\Omega^{(m)} = T^0$, oder da wir diesen Werth §. 316. durch $T_{(m)}$ bezeichnete

$$\Omega^{(m)} = T_{(m)}.$$

Zugleich wird aber auch

$$\Omega^{(m)} = \frac{1.3.5.7 \dots 2m-1}{1.2.3.4 \dots m} \sin\psi^m$$
$$- \frac{1.3.5.7 \dots 2m-3}{1.2.3.4 \dots m-2} \cdot \frac{\sin\psi^{m-2}}{2}$$
$$+ \frac{1.3.5.7 \dots 2m-5}{1.2.3.4 \dots m-4} \cdot \frac{\sin\psi^{m-4}}{2.4}$$
$$- \text{etc. etc.}$$

§. 325.

Wenn wir $\psi' = 90°$ annehmen, so wird $\sin\psi' = 1$, also auch $\mu = 1$, und die Function $M^{(m)}$ in §. 323. ist dann gleich

$$1 - \frac{m.m-1}{2.(2m-1)} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.4.(2m-1)(2m-3)}$$
$$- \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.}{2.4.6.(2m-1)(2m-3)(2m-5)} + \dots$$

Setzt man $m = 2$, so wird $M^{(2)} = \frac{2}{3}$

$m = 3$, $\quad M^{(3)} = \frac{2}{5} = \frac{2.\ 3.}{3.\ 5.}$

$m = 4$, $\quad M^{(4)} = \frac{8}{35} = \frac{2.\ 3.\ 4.}{3.\ 5.\ 7.}$

und es lässt sich leicht durch Induction schliessen, dass

$$M^{(m)} = \frac{1.2.3.4.5 \ldots\ldots m}{1.3.5.7.9 \ldots\ldots 2m-1}.$$

werden wird. Behält man blos die höchste Potenz von $sin\,\psi$ in der Entwickelung von $\Psi^{(m)}$ §. 323. bei, so ist

$$T_{(m)} = a'.\ sin\,\psi^m.\ \frac{1.2.3.4.5 \ldots m}{1.3.5.7.9 \ldots 2m-1}$$

und da in vorigem Paragraph mit Weglassung aller Potenzen von $sin\,\psi$, bis auf die höchste

$$T_{(m)} = sin\,\psi^m.\ \frac{1.3.5.7 \ldots\ldots 2m-1}{1.2.3.4 \ldots\ldots m}$$

gefunden ist, so ergiebt sich daraus

$$a' = \left(\frac{1.3.5.7 \ldots\ldots 2m-1}{1.2.3.4 \ldots\ldots m}\right)^2$$

und wir wollen dies durch $a^{(m)}$ bezeichnen.

§. 326.

Entwickelt man das Radical

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2x\,ur+uurr)}}$$

in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe, so findet man leicht, dass die Entwickelung

$$1+\sqrt{a'}\,\Psi'\,ur+\sqrt{a''}\,\Psi''\,u^2r^2+\ldots\ldots$$

seyn wird, wo Ψ', Ψ''... die Bedeutung des §. 322. haben, indem man daselbst $sin\,\psi = x$ annimmt. Auf gleiche Weise erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{2xu}{r}+\frac{uu}{rr})}}$$

$$= 1+\sqrt{a'}\,\Psi'\,\frac{u}{r}+\sqrt{a''}\,\Psi''\,\frac{u^2}{r^2}+\ldots\ldots$$

Man suche nun das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-2xur+uurr)}.\sqrt{(1-\frac{2xu}{r}+\frac{uu}{rr})}}$$

Um dasselbe zu finden, setze man

$$1-2xur+uurr = yy$$

so reducirt sich voriger Ausdruck auf diesen

$$\int \frac{dy}{u\sqrt{(1-uu)(rr-r)+yy}}.$$

Hiervon ist bekanntlich das Integral

$$Const - \frac{1}{u}\left\{\frac{y}{\sqrt{(1-uu)(rr-1)}} + \sqrt{\frac{yy+(1-uu)(rr-1)}{(1-uu)(rr-1)}}\right\}.$$

Für $x=+1$ wird dasselbe, da dann $x=1-ur$

$$Const - \frac{1}{u}\log\frac{(1-u)(1+r)}{\sqrt{(1-uu)(rr-1)}}$$

und für $x=-1$ erhält es den Werth

$$Const - \frac{1}{u}\log\frac{(1+u)(1+r)}{\sqrt{(1-uu)(rr-1)}}$$

folglich findet man das Integral zwischen den Gränzen $x=-1$ und $x=+1$

$$= \frac{1}{u}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$= 2+\frac{2u^2}{3}+\frac{2u^4}{5}+\frac{2u^6}{7}+\dots$$

welcher Ausdruck von r völlig unabhängig ist.

§. 327.

Man findet aber dasselbe Integral, indem man statt der Radicalgrössen die entwickelten Reihen setzt

$$\int dr.\,(1+\sqrt{a'}\,\Psi' ur+\sqrt{a''}\,\Psi'' u^2 r^2+\dots.)$$

$$\times\,(1+\sqrt{a'}\,\Psi'\frac{u}{r}+\sqrt{a''}\,\Psi''\frac{u^2}{r^2}+\dots.)$$

Führt man die Multiplication der Reihen wirklich aus, so sieht man, dass sich das Product in drei durch Addition verbundene unendliche Reihen zerlegen lässt, von denen die eine gar kein r enthält; diese wird, indem man die Integrationen ebenfalls zwischen den Gränzen $x = -1$ und $x = +1$ ausführt

$$2 + a' \int \Psi'^2 \, dx . uu + a'' \int \Psi''^2 \, dx \, u^4 + \ldots\ldots$$

Die beiden andern Reihen schreiten sowohl nach den positiven als nach den negativen Potenzen von r fort, und die einzelnen Potenzen werden die Coefficienten von der Form

$$\sqrt{a^{(m)} \, a^{(n)}} \int \Psi^{(m)} . \, \Psi^{(n)} \, dx$$

haben, wo m und n zwei von einander verschiedene Zahlen bedeuten.

§. 328.

Vergleicht man diese beiden Entwickelungen eines und desselben Integrals mit einander, so sieht man, dass

$$a' \int \Psi'^2 \, dx = \tfrac{2}{3}$$
$$a'' \int \Psi''^2 \, dx = \tfrac{2}{5}$$
$$a''' \int \Psi'''^2 \, dx = \tfrac{2}{7}$$

und allgemein genommen

$$a^{(m)} \int \Psi^{(m)2} . dx = \frac{2}{2m+1}$$

seyn wird. Ferner ist einleuchtend, dass, da beide Ausdrücke für alle Werthe von r und u einander gleich seyn müssen, das Integral

$$\int \Psi^{(m)} . \, \Psi^{(n)} \, dx = 0$$

werden wird, was auch m und n bedeuten mögen. Es wird daher auch das Integral

$$\int \Psi^{(m)} . \, dx = 0.$$

§. 329.

Man hat aus §. 317., indem $\sin \psi = x$ gesetzt wird $L^{(m)} = \int N^{(m)} \, T_m . dx$
wo das Integral von $x = -1$ bis $x = +1$ genommen werden muss. Ferner war aus demselben Paragraph $N^{(m)} = \int \varrho . \, r^{m+2} \, dr$

und wenn man hierin statt r und dr ihre durch q ausgedrückten Werthe

$$r = q(1-6\theta), \qquad dr = dq(1-6\theta).$$

substituirt, so kommt

$$N^{(m)} = (1-6\theta)^{m+3} \int \rho .\, q^{m+2}\, dq.$$

Die Dichtigkeit ρ muss als Function von q gegeben seyn, und das Integral von $q=0$ bis zu demjenigen Werthe von q genommen werden, welcher in unserm vorliegenden Falle, der äussersten Schicht des anziehenden Körpers entspricht. Setzt man daher das zwischen den besagten Gränzen genommene Integral

$$\int \rho .\, q^{m+2}\, dq = Q^{(m)}$$

so ist $Q^{(m)}$ eine constante Grösse, und man hat

$$N^{(m)} = (1-6\theta)^{m+3} .\, Q^{(m)}.$$

§. 330.

In §. 322. haben wir gezeigt, dass

$$T_{(m)} = a^{(m)} M^{(m)} \Psi^{m}$$

folglich wenn wir diese Werthe von $T_{(m)}$ und $N^{(m)}$ in den Ausdruck von $L^{(m)}$ substituiren, so wird

$$L^{(m)} = a^{(m)} .\, M^{(m)} .\, Q^{(m)} \int (1-6\theta)^{m+3} .\, \Psi^{(m)}\, dx$$

$$= -a^{(m)} M^{(m)} Q^{(m)} 6(m+3) \left\{ \begin{array}{l} \int \theta .\, \Psi^{(m)}\, dx \\ -6 \dfrac{m+2}{2} \int \theta^2\, \Psi^{(m)}\, dx. \\ +6^2 \dfrac{m+2 .\, m+1}{2 .\quad 3} \\ .\, \int \theta^3\, \Psi^{(m)}\, dx - \ldots\ldots \end{array} \right.$$

indem man $(1-6\theta)^{m+3}$ entwickelt, und bemerkt, dass das erste Integral $\int \Psi^{(m)}\, dx = 0$ wird.

§. 331.

Nehmen wir die Gleichung der Oberfläche §. 321.

$$c = f r' r' \cos \psi'^2 + \frac{2\pi}{r'} \left(L + \frac{L'}{r'} + \frac{L''}{r' r'} + \ldots \right)$$

so können wir statt r' den Werth $q'(1-6\theta)$ sub-

stituiren, wo q' den für die Oberfläche geltenden Werth von q bedeutet, und θ' dieselbe Function von $\sin\psi'$ ist, als θ von $\sin\psi$; dann kommt, mit Vernachlässigung der das Quadrat übersteigenden Potenzen von δ

$$c = fq'q'(1 - 2\delta\theta' + \delta\delta\theta'^2)\cos\psi'^2$$
$$+ 2\pi \left(\frac{L}{q'} + \frac{L'}{q'q'} + \frac{L''}{q'^3} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ 2\pi\delta\,\theta' \left(\frac{L}{q'} + \frac{2L'}{q'q'} + \frac{3L''}{q'^3} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ 2\pi\delta^2\theta'^2 \left(\frac{L}{q'} + \frac{2.3L'}{q'q'} + \frac{3.4.L'''}{q'^3} + \ldots\ldots\right).$$

Die Grössen L', L'', L''' .... haben alle den Factor δ, und lassen sich aus der allgemeinen Formel für $L^{(m)}$ des vorigen Paragraphs angeben. Um aber L oder L^0 zu haben, bemerke man, dass §. 317., $L = \int N dx$, und da (§. 329.) indem man $m = 0$ setzt,

$$N = (1 - \delta\theta)^3 \int \varrho .\, qqdq$$
$$= (1 - 3\delta\theta + 3\delta\delta\theta\theta)\, Q^0$$

so hat man zwischen den Gränzen $x = -1$ und $x = +1$

$$L = 2Q^0 - 3\delta Q^0 \int \theta\, dx$$
$$+ 3\delta\delta Q^0 \int \theta\theta\, dx.$$

Man setze nun $Q^{(m)} = \mathfrak{q}^{(m)}\, q'^{m+3}$, so wird

$$L = 2\mathfrak{q}^0 q'^3 [1 - \tfrac{3}{2}\delta \int \theta\, dx + \tfrac{3}{2}\delta\delta \int \theta\theta .\, dx]$$

$$L^{(m)} = -a^{(m)} M^{(m)} \mathfrak{q}^{(m)} q'^{m+3}\, \delta (m+3) \left\{ \begin{array}{l} \int \theta .\, \Psi^{(m)} \\ - \delta \frac{m+2}{2} \\ \int \theta\theta : \Psi^{(m)} dx + . \end{array} \right\}$$

§. 332.

Um diese Ausdrücke noch etwas abzukürzen, nehme man

$$3\mathfrak{q}^0 \int \theta .\ dx = \mathfrak{a}$$
$$3\mathfrak{q}^0 \int \theta\theta .\ dx = \mathfrak{b}$$
$$a^{(m)} \mathfrak{q}^{(m)} (m+3) \int \theta .\ \Psi^{(m)} dx = \mathfrak{A}^{(m)}.$$

$$\dot{a}^m \, q^{(m)} \frac{m+3. \; m+2}{1. \quad 2} \int \theta\theta . \; \Psi^m \, dx = \mathfrak{B}^{(m)}$$

so werden vorige Formeln

$$L = q'^3 \, (2q^o - 6a + b66).$$

$$L^{(m)} = - M^{(m)} \, 6 \, q'^{m+3} \, (\mathfrak{A}^{(m)} - 6\mathfrak{B}^{(m)}).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung des Gleichgewichts, dividirt die ganze Gleichung durch $2\pi q'q'$, und setzt

$$\frac{c}{2\pi q'q'} = k, \quad \frac{f}{2\pi} = g$$

so kommt, indem man die das Quadrat von 6 übersteigenden Potenzen weglässt,

$$\begin{aligned} k = g \cos \psi'^2 \, & (1 - 26\theta' + 66\theta'\theta') \\ & + 2q^o \, (1 + \theta'6 + \theta'^2 6^2) \\ & - 6(a + M'\mathfrak{A}' + M''\mathfrak{A}'' + M'''\mathfrak{A}''' + \ldots) \\ & + 66(b + M'\mathfrak{B}' + M''\mathfrak{B}'' + M'''\mathfrak{B}''' + \ldots) \\ & - \theta'66(a + 2M'A' + 3M''\mathfrak{A}'' + 4M'''\mathfrak{A}''' + \ldots). \end{aligned}$$

§. 333.

Die von der Schwungkraft abhängende Grösse g ist nur gering, und wir können sie der Grösse 6 proportional setzen. Beschränken wir uns dann blos auf die erste Potenz von 6, so wird vorige Gleichung in diese übergehen:

$$\begin{aligned} k = 2q^o + g \cos \psi'^2 + 2q^o \, \theta'6 \\ - 6(a + M'\mathfrak{A}' + M''\mathfrak{A}'' + M'''\mathfrak{A}'''), \end{aligned}$$

und wenn man aus dieser Gleichung $\theta'6$ sucht, so wird

$$\theta' = \frac{k - 2q^o - g \cos \psi'^2}{2q^o 6} + \frac{a + M'\mathfrak{A}' + M''\mathfrak{A}'' + M'''\mathfrak{A}''' + \ldots}{2q^o}.$$

Nun sind die Werthe von $M^{(m)}$, $\Psi^{(m)}$ nur darin von einander abweichend, dass ersterer der besondere an der Oberfläche statt findende Werth von $\Psi^{(m)}$ ist; setzt man also in dieser Gleichung statt M', M''... die allgemeinen Werthe Ψ', Ψ''.... so geht θ' in θ über, und man erhält

$$\theta = \frac{k - 2q^0 - g\cos\psi^2}{2q^0 6} + \frac{a + \Psi'\mathfrak{A}' + \Psi''\mathfrak{A}'' + \Psi'''\mathfrak{A}''' + \ldots}{2q^0}.$$

Es ist ferner aus §. 322.

$$\Psi'' = \sin\psi^2 - \tfrac{1}{3}$$

folglich kann man auch für $\cos\psi^2$, $\tfrac{2}{3} - \Psi''$ setzen, so dass

$$\theta = \frac{k - 2q^0 - \tfrac{2}{3}g}{2q^0 6} + \frac{a + \Psi'\mathfrak{A}' + \Psi'''\mathfrak{A}''' + \ldots\ldots}{2q^0} + \frac{\mathfrak{A}''6 + g}{2q^0 6}.\ \Psi''$$

werden wird.

§. 334.

Bemerkt man nun, dass nach §. 328.

$$\int\Psi^{(m)2}\,dx = \frac{1}{a^{(m)}}.\frac{2}{2m+1} \quad \text{und}$$

$$\int\Psi^{(m)}.\,\Psi^{(n)}\,dx = 0, \quad \text{so wie auch}$$

$$\int\Psi^{(m)}\,dx = 0$$

wird, so erhält man das Integral

$$\int\theta dx = \frac{k - 2q^0 - \tfrac{2}{3}g + a6}{q^0 6}.$$

Auf gleiche Weise findet man noch

$$\int\theta.\,\Psi'\,dx = \frac{\mathfrak{A}'}{2q^0}.\int\Psi'^2\,dx$$

$$\int\theta.\,\Psi''\,dx = \frac{\mathfrak{A}''6 + g}{2q^0 6}.\int\Psi''^2\,dx$$

$$\int\theta.\,\Psi'''\,dx = \frac{\mathfrak{A}'''}{2q^0}.\int\Psi'''^2\,dx$$

$$\int\theta.\,\Psi^{IV}\,dx = \frac{\mathfrak{A}^{IV}}{2q^0}.\int\Psi^{IV2}\,dx$$

etc. etc. etc.

Setzt man nun statt der vor dem Gleichheitszeichen stehenden Integrale ihre Werthe aus §. 332. und an die Stelle der hinter demselben befindlichen, die so eben angegebenen Werthe, so kommt

$$\frac{\mathfrak{A}'}{4q'} = \frac{\mathfrak{A}'}{3q^\circ}; \quad \frac{\mathfrak{A}''}{q''} = \frac{\mathfrak{A}''6 + g}{q^\circ 6};$$

$$\frac{\mathfrak{A}'''}{6q'''} = \frac{\mathfrak{A}'''}{7q^\circ}; \quad \frac{\mathfrak{A}^{IV}}{7q^{IV}} = \frac{\mathfrak{A}^{IV}}{9q^\circ};$$

etc. etc. etc.

und wir müssen aus diesen Gleichungen schliessen, dass

$\mathfrak{A}' = 0, \quad \mathfrak{A}''' = 0, \quad \mathfrak{A}^{IV} = 0,$ etc. etc. . .

seyn muss, und blos der Coefficient $\mathfrak{A}''$ einen bestimmten Werth erhält, der sich aus der Gleichung

$$\mathfrak{A}''q^\circ 6 = \mathfrak{A}''6q'' + gq''$$

finden lässt. Man erhält aus derselben

$$\mathfrak{A}'' = \frac{g\,q''}{(q^\circ - q'')\,6}.$$

§. 335.

Substituirt man diese Werthe von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$.... in die Gleichung (§. 333.)

$$\theta' = \frac{k - 2q^\circ - g\cos\psi'^2}{2q^\circ 6} + \frac{a + M'\mathfrak{A}' + M''\mathfrak{A}'' + M'''\mathfrak{A}''' + \ldots}{2q^\circ}$$

so kommt der Werth von θ'

$$\theta' = \frac{k - 2q^\circ - g\cos\psi'^2}{2q^\circ 6} + \frac{a}{2q^\circ} + \frac{M''gq''}{2q^\circ 6\,(q^\circ - q'')}.$$

Nun ist aber aus §. 332.

$$\int\theta.\,dx = \frac{a}{3q^\circ}$$

und da wir §. 334. gefunden haben, dass dasselbe Integral auch durch

$$\frac{k - 2q^\circ - \frac{2}{3}g + a6}{q^\circ 6}$$

ısgedrückt werden kann, so wird, indem man beide Werthe einander gleich setzt

$$\frac{a6}{3} = k - 2q^{\circ} - \tfrac{2}{3} g + a6$$

lglich auch

$$\frac{a}{2q^{\circ}} = \frac{6q^{\circ} + 2g - 3k}{4q^{\circ}6}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung, elche θ' angiebt, so erhält man

$$6\theta' = \frac{2q^{\circ} + 2g \sin\psi'^{2} - k}{4q^{\circ}} + \frac{M''gq''}{2q^{\circ}(q^{\circ} - q'')}.$$

Um die Grösse k zu bestimmen, bemerke man, ıss für $\psi' = 0$, θ' auch gleich Null seyn muss, da der Gleichung $r' = q'(1 - 6\theta')$, q' der für $\psi' = 0$ att findende Werth von r' ist. Man hat

$$M'' = \sin\psi'^{2} - \tfrac{1}{3}$$

so für $\psi' = 0$, $M'' = -\tfrac{1}{3}$; und zur Bestimmung ın k erhält man die Gleichung

$$0 = \frac{2q^{\circ} - k}{4q^{\circ}} - \frac{\tfrac{1}{3} g q''}{2q^{\circ}(q^{\circ} - q'')}.$$

ieht man diese Gleichung von der obern ab, um k ı eliminiren, und bemerkt, dass $M'' + \tfrac{1}{3} = \sin\psi'^{2}$ t, so kommt

$$6\theta' = \tfrac{1}{2}. \frac{g}{q^{\circ} - q''} \sin\psi'^{2}.$$

Setzen wir also der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2} g = h(q^{\circ} - q'')$$

wird $6\theta = h \sin\psi'^{2}$, und

$$r' = q'(1 - h \sin\psi'^{2})$$

elches die Gleichung der Oberfläche ist.

§. 336.

Man sieht hieraus, dass wenn man blos die erste ›tenz der Centrifugalkraft betrachtet, die Oberfläche nes Körpers, der aus concentrischen ähnlichen :hichten besteht, und von einer sehr dünnen Schicht ner flüssigen Materie bedeckt ist, von der eines liptischen Sphäroïds nicht unterschieden ist; die

Abplattung desselben wird durch die Grösse h ausgedrückt.

Wir wollen nun aber noch die zweite Potenz der Centrifugalkraft oder der ihr ähnlichen Grösse β mit in Betracht ziehen, und sehen in wie fern dann eine Abweichung von dem elliptischen Sphäroïd sich ergiebt. Setzt man statt $\sin\psi'^2$ in dem Ausdruck von $\beta\theta'$ seinen Werth $M'' + \frac{1}{3}$, so hat man

$$\beta\theta' = h\,(M'' + \tfrac{1}{3})$$

also allgemein, indem man M'' in Ψ'' verwandelt

$$\beta\theta' = h\,(\Psi'' + \tfrac{1}{3})$$

und wir wollen annehmen, es sey mit Berücksichtigung der zweiten Potenz von β

$$\beta\theta = h\,(\Psi'' + \tfrac{1}{3}) + u,$$

wo u die dem Quadrate von β proportionalen Glieder enthält. Da nun §. 332.

$$3q^0 \int \theta\, dx = \mathfrak{a}$$

so wird auch

$$\beta\mathfrak{a} = 3q^0\,[\int h(\Psi'' + \tfrac{1}{3})\,dx + \int u dx]$$
$$= 3q^0 \left[\frac{2h}{3} + \int u dx\right]$$

und eben so (§. 332.)

$$\beta\beta\mathfrak{b} = 3q^0 \int \beta\beta\theta\theta.\ dx$$
$$= 3q^0 \int hh\,(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2\, dx.$$

§. 337.

Der leichtern Integration wegen, wollen wir das Quadrat $(\Psi'' + \frac{1}{3})^2$ auf eine lineare Form reduciren. Es ist nämlich

$$(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2 = \Psi''^2 + \tfrac{2}{3}\,\Psi'' + \tfrac{1}{9},\quad \text{und da}$$
$$\Psi'' = \sin\psi^2 - \tfrac{1}{3}\quad \text{also}$$
$$\Psi''^2 = \sin\psi^4 - \tfrac{2}{3}\,\sin\psi^2 + \tfrac{1}{9}$$

so wird auch

$$(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2 = \sin\psi^4 + \tfrac{2}{3}\,(\Psi'' - \sin\psi^2) + \tfrac{2}{9}.$$

Aus §. 322. ist aber auch

$$\Psi^{IV} = \sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\,\sin\psi^2 + \tfrac{3}{35},\quad \text{also}$$

$$(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2 = \Psi^{IV} + \tfrac{2}{3}\,\Psi'' + \tfrac{4}{21}\,\sin\psi^2 + \frac{43}{9.35}.$$

Setzt man hierin wieder statt $\sin\psi^2$, $\Psi'' + \frac{1}{3}$, so kommt

$$(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2 = \Psi^{IV} + \tfrac{6}{7}\,\Psi'' + \tfrac{1}{5},\quad \text{und hieraus}$$

$\int(\Psi'' + \frac{1}{3})^2\, dx = \frac{8}{5}$, folglich wird
$66\mathfrak{b} = \frac{6}{5}\, \mathfrak{q}^{\circ}\, hh.$

§. 338.

Man erhält ferner aus §. 332.

$6\mathfrak{A}' = 4a'\ \mathfrak{q}'\ \int 6\theta.\ \Psi'\ dx,$
$6\mathfrak{A}'' = 5a''\ \mathfrak{q}''\ \int 6\theta.\ \Psi''\ dx,$
$6\mathfrak{A}''' = 6a'''\ \mathfrak{q}'''\ \int 6\theta.\ \Psi'''\ dx,$
$6\mathfrak{A}^{IV} = 7a^{IV}\ \mathfrak{q}^{VI}\ \int 6\theta.\ \Psi^{IV}\ dx,$
etc. etc. etc.

lso wenn man hierin den Werth von $6\theta = h(\Psi'' + \frac{1}{3}) + u$ ıbstituirt, und die Integrale zwischen den Gränzen $= -1$ bis $x = +1$ nimmt

$6\mathfrak{A}' = 4a'\ \mathfrak{q}'\ \int u\ \Psi'\ dx,$
$6\mathfrak{A}'' = 5a''\ \mathfrak{q}''\ \int u\ \Psi''\ dx + 2h\mathfrak{q}'',$
$6\mathfrak{A}''' = 6a'''\ \mathfrak{q}'''\ \int u\ \Psi'''\ dx,$
$6\mathfrak{A}^{IV} = 7a^{IV}\ \mathfrak{q}^{IV}\ \int u\ \Psi^{IV}\ dx,$
etc. etc. etc.

§. 339.

Aus demselben Paragraph hat man noch

$66\mathfrak{B}' = 6a'\ \mathfrak{q}'\ \int 66\theta\theta.\ \Psi'\ dx,$
$66\mathfrak{B}'' = 10a''\ \mathfrak{q}''\ \int 66\theta\theta.\ \Psi''\ dx,$
$66\mathfrak{B}''' = 15a'''\mathfrak{q}'''\ \int 66\theta\theta.\ \Psi'''dx,$
$66\mathfrak{B}^{IV} = 21a^{IV}\ \mathfrak{q}^{IV}\ \int 66\theta\theta.\ \Psi^{IV} dx,$
$66\mathfrak{B}^{V} = 28a^{V}\ \mathfrak{q}^{V}\ \int 66\theta\theta.\ \Psi^{V}\ dx,$
etc. etc. etc.

Setzt man hierin statt $66\theta\theta$ seinen Werth (§. 337.)

$hh\ (\Psi'' + \frac{1}{3})^2$

ler was dasselbe ist

$hh\,(\Psi^{IV} + \frac{6}{7}\,\Psi'' + \frac{1}{5})$

ıd integrirt von $x = -1$ bis zu $x = +1$, so kommt

$66\mathfrak{B}' = 0$
$66\mathfrak{B}'' = \frac{24}{7}\ \mathfrak{q}''hh.$
$66\mathfrak{B}''' = 0$
$66\mathfrak{B}^{IV} = \frac{14}{5}\ \mathfrak{q}^{IV}\ hh.$
$66\mathfrak{B}^{V} = 0$
$66\mathfrak{B}^{VI} = 0$
etc. etc. etc.

§. 340.

Die Gleichung für k (§. 332.) wenn man statt der besondern Werthe M', M'', M''' etc. die allgemeinen Ψ', Ψ'', Ψ''' gesetzt werden, und zugleich für $\cos\psi'^{2}$, $\frac{2}{3}-\psi''$ genommen wird, indem man bemerkt, dass das Glied $\beta\beta\theta\theta.\,g\cos\psi^{2}$, so wie die Reihe

$$\theta\beta\beta\,(2M'\mathfrak{A}' + 4M'''\mathfrak{A}''' + 5M^{IV}\mathfrak{A}^{IV} + \ldots.)$$

weggelassen werden müssen, da beide dem Cubus von β oder g proportional sind,

$$\begin{aligned}k = g\,&(\tfrac{2}{3}-\Psi'')\,(1-2\beta\theta)\\ &+ 2q^{\circ}\,(1+\beta\theta+\beta\beta\theta\theta)\\ &- \beta\,(\mathfrak{a}+\Psi'\mathfrak{A}'+\Psi''\mathfrak{A}''+\Psi'''\mathfrak{A}'''+\ldots.)\\ &+ \beta\beta\,(\mathfrak{b}+\Psi'\mathfrak{B}'+\Psi''\mathfrak{B}''+\Psi'''\mathfrak{B}'''+\ldots.)\\ &- \beta\theta.\,(\beta\mathfrak{a}+3\Psi''\,\beta\mathfrak{A}'').\end{aligned}$$

§. 341.

Nun ist aber (§. 336.)

$$1-2\beta\theta = 1-2h\,\Psi''-\tfrac{2}{3}h-2u$$

folglich auch

$$\begin{aligned}&(\tfrac{2}{3}-\Psi'')\,(1-2\beta\theta)\\ &= \tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{9}h-\tfrac{4}{3}u+2h\,\Psi''^{2}\\ &\quad -\Psi''\,(1+\tfrac{2}{3}h-2u).\end{aligned}$$

oder wenn man statt Ψ''^{2} seinen Werth

$$\Psi^{IV}+\tfrac{4}{21}\,\Psi''+\tfrac{4}{45},$$

der sich aus dem Vorigen leicht finden lässt, setzt, so erhält man

$$\begin{aligned}&(\tfrac{2}{3}-\Psi'')\,(1-2\beta\theta)\\ &= \tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{15}h-\tfrac{4}{3}u\\ &\quad -\Psi''\,(1+\tfrac{2}{7}h-2u)+2h\,\Psi^{IV}\end{aligned}$$

folglich mit Hinweglassung des Productes gu,

$$\begin{aligned}&g\,(\tfrac{2}{3}-\Psi'')\,(1-2\beta\theta)\\ &= \tfrac{2}{3}g-\tfrac{4}{15}hg\\ &\quad -\Psi''(g+\tfrac{2}{7}hg)+2hg\,\Psi^{IV}.\end{aligned}$$

Ferner hat man noch

$$\begin{aligned}&1+\beta\theta+\beta\beta\theta\theta\\ &= 1+h\,(\Psi''+\tfrac{1}{3})+u+hh\,(\Psi''+\tfrac{1}{3})^{2}\\ &= 1+\tfrac{1}{3}h+u+\tfrac{1}{5}hh\\ &\quad +\Psi''(h+\tfrac{6}{7}hh)+\Psi^{IV}hh.\end{aligned}$$

§. 342.

Mit Zuziehung der gefundenen Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$,... $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$.... ergiebt sich noch

$$\begin{aligned} &\delta\mathfrak{a} + \Psi'\delta\mathfrak{A}' + \Psi''\delta\mathfrak{A}'' + \Psi'''\delta\mathfrak{A}''' + \ldots \\ &= 2h\mathfrak{q}^{0} + 3\mathfrak{q}^{0}\int u\,dx + 2h\mathfrak{q}''\,\Psi'' \\ &\quad + 4a'\,\mathfrak{q}'\,\Psi'\int u\,\Psi'\,dx \\ &\quad + 5a''\,\mathfrak{q}''\,\Psi''\int u\,\Psi''\,dx \\ &\quad + 6a'''\,\mathfrak{q}'''\,\Psi'''\int u\,\Psi'''\,dx \\ &\quad + \text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\delta\delta\mathfrak{b} + \Psi'\delta\delta\mathfrak{B}' + \Psi''\delta\delta\mathfrak{B}'' + \Psi'''\delta\delta\mathfrak{B}''' + \ldots. \\ &= hh\left(\tfrac{6}{6}\mathfrak{q}^{0} + \tfrac{24}{7}\Psi''\mathfrak{q}'' + \tfrac{14}{3}\Psi^{IV}\mathfrak{q}^{IV}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\delta\theta\left(\delta\mathfrak{a} + 3\Psi''\delta\mathfrak{A}''\right) \\ &= \delta\theta\left(2h\mathfrak{q}^{0} + 6\mathfrak{q}''h\Psi''\right) \\ &= 2hh\left(\Psi'' + \tfrac{1}{3}\right)\left(\mathfrak{q}^{0} + 3\mathfrak{q}''\Psi''\right) \\ &= 2hh\left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{3}\mathfrak{q}^{0} + \tfrac{4}{15}\mathfrak{q}'' \\ + \Psi''(\mathfrak{q}^{0}\ \tfrac{11}{7}\mathfrak{q}'') \\ + 3\mathfrak{q}''\Psi^{IV} \end{matrix}\right\}. \end{aligned}$$

§. 343.

Substituirt man nun alle diese Werthe in die Gleichung, welche k ausdrückt, so wird

$$\begin{aligned} k = &\tfrac{2}{3}g - \tfrac{4}{15}hg + 2\mathfrak{q}^{0} + \tfrac{2}{3}h\mathfrak{q}^{0} \\ &+ 2u\mathfrak{q}^{0} + \tfrac{2}{5}hh\mathfrak{q}^{0} + 2h\mathfrak{q}^{0} \\ &+ \tfrac{6}{5}hh\mathfrak{q}^{0} - \tfrac{2}{3}hh\mathfrak{q}^{0} - \tfrac{8}{15}hh\mathfrak{q}'' \\ &+ \Psi''\left\{\begin{matrix} 2h\mathfrak{q}^{0} + \tfrac{12}{7}hh\mathfrak{q}^{0} - g - \tfrac{2}{7}hg \\ - 2h\,\mathfrak{q}'' + \tfrac{24}{7}hh\mathfrak{q}'' \\ - 2hh\mathfrak{q}^{0} + \tfrac{22}{7}hh\mathfrak{q}'' \end{matrix}\right\}. \\ &+ \Psi^{IV}\left\{\begin{matrix} 2hg + 2\mathfrak{q}^{0}hh + \tfrac{14}{3}\mathfrak{q}^{IV}hh \\ - 6\mathfrak{q}''hh \end{matrix}\right\} \\ &- 3\mathfrak{q}^{0}\int u\,dx \\ &- 4a'\,\mathfrak{q}'\,\Psi'\int u\,\Psi'\,dx \\ &- 5a''\,\mathfrak{q}''\,\Psi''\int u\,\Psi''\,dx \\ &- 6a'''\,\mathfrak{q}'''\,\Psi'''\int u\,\Psi'''\,dx \\ &- 7a^{IV}\,\mathfrak{q}^{IV}\,\Psi^{IV}\int u\,\Psi^{IV}\,dx \\ &- \text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Alle Integrale $\int u dx$, $\int u\,\Psi'\,dx$ u. s. w. kann man als constante Grössen betrachten, so dass sich aus dieser Gleichung

$$u = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}'\Psi' + \mathfrak{D}''\Psi'' + \mathfrak{D}'''\Psi''' + \ldots.$$

ergeben würde. Es findet sich daher

$$\int u\, dx = 2\mathfrak{D}$$

$$\int u\, \Psi'\, dx = \frac{2}{3a'}\, \mathfrak{D}'$$

$$\int u\, \Psi''\, dx = \frac{2}{5a''}\, \mathfrak{D}''$$

$$\int u\, \Psi'''\, dx = \frac{2}{7a'''}\, \mathfrak{D}'''$$

$$\int u\, \Psi^{\text{IV}}\, dx = \frac{2}{9a^{\text{IV}}}\, \mathfrak{D}^{\text{IV}}$$

$$\int u\, \Psi^{\text{V}}\, dx = \frac{2}{11a^{\text{V}}}\, \mathfrak{D}^{\text{V}}$$

$$\int u\, \Psi^{\text{VI}}\, dx = \frac{2}{13a^{\text{VI}}}\, \mathfrak{D}^{\text{VI}}$$

etc. etc. etc.

Nun sieht man aber sogleich, dass

$$\mathfrak{D}' = \frac{4a'\,\mathfrak{q}'}{2\mathfrak{q}^0} \int u\, \Psi'\, dx,$$

$$\mathfrak{D}''' = \frac{6a'''\mathfrak{q}'''}{2\mathfrak{q}^0} \int u\, \Psi'''\, dx,$$

$$\mathfrak{D}^{\text{V}} = \frac{8a^{\text{V}}\,\mathfrak{q}^{\text{V}}}{2\mathfrak{q}^0} \int u\, \Psi^{\text{V}}\, dx,$$

$$\mathfrak{D}^{\text{VI}} = \frac{9a^{\text{VI}}\mathfrak{q}^{\text{VI}}}{2\mathfrak{q}^0} \int u\, \Psi^{\text{VI}}\, dx,$$

etc. etc. etc.

Setzen wir diese Werthe in vorige Gleichungen, so folgt, dass die Integrale

$\int u\, \Psi'\, dx = 0,$ $\int u\, \Psi'''\, dx = 0,$

$\int u\, \Psi^{\text{V}}\, dx = 0;$ $\int u\, \Psi^{\text{VI}}\, dx = 0,$

etc. etc. etc.

seyn müssen, und es bleibt blos

$$u = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}''\Psi'' + \mathfrak{D}^{\text{IV}}\Psi^{\text{IV}}.$$

§. 344.

Die Coefficienten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}^{\text{IV}}$ sind nun so beschaffen, dass

$$2\mathfrak{q}^0\,\mathfrak{D} = k - 2\mathfrak{q}^0 + \tfrac{4}{15}\,hg + \tfrac{4}{3}\,h\mathfrak{q}^0 - \tfrac{2}{3}\,g$$
$$- \tfrac{14}{15}\,hh\,\mathfrak{q}^0 + \tfrac{8}{15}\,hh\,\mathfrak{q}'' + 6\mathfrak{q}^0\,\mathfrak{D}.$$

Es war aber (§. 335.)

$$g = 2h\mathfrak{q}^{\circ} - 2h\mathfrak{q}''$$

also wird durch die Substitution dieses Werthes

$$-4\mathfrak{q}^{\circ}\mathfrak{D} = k - 2\mathfrak{q}^{\circ} + \tfrac{4}{3}h\mathfrak{q}'' - \tfrac{2}{5}hh\mathfrak{q}^{\circ}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{q}^{\circ}\mathfrak{D}'' = & -2h\mathfrak{q}^{\circ} - \tfrac{12}{7}hh\mathfrak{q}^{\circ} + g + \tfrac{2}{7}hg \\ & + 2h\mathfrak{q}'' - \tfrac{24}{7}hh\mathfrak{q}'' + 2hh\mathfrak{q}'' + \tfrac{22}{7}hh\mathfrak{q}'' \\ & + 2\mathfrak{q}''\mathfrak{D}'' \end{aligned}$$

oder wenn man statt g seinen Werth substituirt,

$$2\mathfrak{D}''(\mathfrak{q}^{\circ} - \mathfrak{q}'') = \tfrac{6}{7}hh(\mathfrak{q}^{\circ} - \mathfrak{q}'')$$

$$\mathfrak{D}'' = \tfrac{3}{7}hh.$$

Endlich hat man noch

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{q}^{\circ}\mathfrak{D}^{IV} & = -2hg + 6hh\mathfrak{q}'' - 2hh\mathfrak{q}^{\circ} \\ & \quad - \tfrac{14}{3}hh\mathfrak{q}^{IV} + \tfrac{14}{9}\mathfrak{q}^{IV}\mathfrak{D}^{IV} \\ & = 10hh\mathfrak{q}'' - 6hh\mathfrak{q}^{\circ} - \tfrac{14}{3}hh\mathfrak{q}^{IV} + \tfrac{14}{9}\mathfrak{q}^{IV}\mathfrak{D}^{IV} \end{aligned}$$

folglich hieraus

$$\mathfrak{D}^{IV} = \frac{5\mathfrak{q}'' - 3\mathfrak{q}^{\circ} - \tfrac{7}{3}\mathfrak{q}^{IV}}{\mathfrak{q}^{\circ} - \tfrac{7}{9}\mathfrak{q}^{IV}}\,hh.$$

§. 345.

Setzt man statt Ψ'', Ψ^{IV} ihre durch $\sin\psi$ ausgedrückten Werthe, so erhält man

$$\begin{aligned} u = & \mathfrak{D} + \mathfrak{D}''(\sin\psi^2 - \tfrac{1}{3}) \\ & + \mathfrak{D}^{IV}(\sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi^2 + \tfrac{3}{35}) \end{aligned}$$

und da für $\psi = 0$, auch $u = 0$ werden muss, so hat man noch die Gleichung

$$0 = \mathfrak{D} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}'' + \tfrac{3}{35}\mathfrak{D}^{IV},$$

welche zur Weglassung der Grösse k dient. Zieht man die letztere Gleichung von der ersten ab, so bleibt

$$\begin{aligned} u & = \mathfrak{D}''\sin\psi^2 + \mathfrak{D}^{IV}(\sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi^2) \\ & = (\mathfrak{D}'' - \tfrac{6}{7}\mathfrak{D}^{IV})\sin\psi^2 + \mathfrak{D}^{IV}\sin\psi^4. \end{aligned}$$

Man hat nun durch Substitution der Werthe von $\mathfrak{D}''$ und $\mathfrak{D}^{IV}$,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}'' - \tfrac{6}{7}\mathfrak{D}^{IV} \\ & = hh\left[\tfrac{3}{7} - \frac{45\mathfrak{q}'' - 27\mathfrak{q}^{\circ} - 21\mathfrak{q}^{IV}}{9\mathfrak{q}^{\circ} - 7\mathfrak{q}^{IV}}\right] \\ & = 3hh\,\frac{42\mathfrak{q}^{IV} - 105\mathfrak{q}'' + 72\mathfrak{q}^{\circ}}{9\mathfrak{q}^{\circ} - 7\mathfrak{q}^{IV}}. \end{aligned}$$

Der Kürze wegen nehme man

$$\frac{5q'' - 3q^{\circ} - \frac{7}{3}q^{IV}}{q^{\circ} - \frac{7}{9}q^{IV}} = -\varepsilon$$

so wird

$$u = \tfrac{3}{7}hh(1 + 2\varepsilon)\, sin\,\psi^2 - \varepsilon hh.\, sin\,\psi^4.$$

§. 346.

In §. 336. hatten wir angenommen, es soll

$$6\theta = h\, sin\,\psi^2 + u$$

seyn; es wird daher der Werth von 6θ bis zur zweiten Potenz der Centrifugalkraft inclusive

$$6\theta = h\, sin\,\psi^2 + \tfrac{3}{7}hh(1 + 2\varepsilon)\, sin\,\psi^2 - \varepsilon hh\, sin\,\psi^4.$$

Nimmt man $\psi = 90^{\circ}$, so giebt der daraus hervorgehende Werth von 6θ den Unterschied des Halbmessers des Aequators und der halben Erdaxe, dividirt durch den Halbmesser des Aequators, an, welcher Quotient die Abplattung ist, die wir durch α bezeichnen wollen. Man hat daher

$$\alpha = h + hh.\,\frac{3-\varepsilon}{7}$$

also auch umgekehrt

$$h = \alpha - \alpha\alpha.\,\frac{3-\varepsilon}{7}$$

$$hh = \alpha\alpha.$$

Substituirt man diese Werthe h und hh in die Gleichung, welche 6θ ausdrückt, so ergiebt sich

$$6\theta = \alpha\, sin\,\psi^2 + \varepsilon\alpha\alpha\, sin\,\psi^2\, cos\,\psi^2$$

also da $r' = q'(1 - 6\theta')$, so erhält man die Gleichung der Oberfläche

$$r' = q'(1 - \alpha\, sin\,\psi'^2 - \varepsilon\alpha\alpha\, sin\,\psi'^2\, cos\,\psi'^2).$$

§. 347.

Dieser Ausdruck weicht von der Gleichung des elliptischen Sphäroïds in der zweiten Potenz der Abplattung ab; denn bezeichnet man durch q' die halbe grosse Axe desselben, durch α seine Abplattung, so ist

$$r' = \frac{q'(1-\alpha)}{\sqrt{[1 - (2\alpha - \alpha\alpha)\, cos\,\psi'^2]}},$$

oder wenn man diesen Werth bis zur zweiten Potenz der Abplattung entwickelt

$$r' = q'\,[1 - \alpha.\sin\psi'^2 - \tfrac{5}{2}\alpha\alpha\,\sin\psi'^2\,\cos\psi'^2],$$

und man sieht aus der Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vorigen, dass nur in dem Falle, wenn $\varepsilon = \frac{5}{2}$ wird, die Oberfläche ein elliptisches Sphäroïd ist. Es muss daher wenn man statt ε seinen Werth aus §. 344. setzt

$$\tfrac{5}{2} = \frac{3\mathfrak{q}^{\circ} - 5\mathfrak{q}'' + \frac{7}{3}\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}}}{\mathfrak{q}^{\circ} - \frac{7}{9}\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}}}$$

werden, oder

$$3\mathfrak{q}^{\circ} + 7\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}} = 10\mathfrak{q}''.$$

Nun ist aber aus §. 331.

$$\mathfrak{q}^{\circ}\,q^3 = \int\rho.\,qqdq$$
$$\mathfrak{q}''\,q^5 = \int\rho.\,q^4dq$$
$$\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}}\,q^7 = \int\rho.\,q^6dq$$

folglich wenn man diese Werthe in die Gleichung

$$3\mathfrak{q}^{\circ} + 7\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}} = 10\mathfrak{q}''$$

substituirt, so erhält man

$$3q^4.\int\rho.\,qqdq + 7\int\rho.\,q^6dq = 10qq.\int\rho.\,q^4dq$$

und man sieht leicht, dass dieser Gleichung Genüge geleistet werden wird, wenn man die Dichtigkeit ρ constant annimmt. Dann wird nämlich

$$\int\rho.\,pqdq = \tfrac{1}{3}\rho q^3$$
$$\int\rho.\,q^4dq = \tfrac{1}{5}\rho q^5$$
$$\int\rho.\,q^5dq = \tfrac{1}{7}\rho q^7$$

und die Gleichung selbst reducirt sich auf $1 + 1 = 2$.

§. 348.

Dass die Bedingung der constanten Dichtigkeit im Innern des Körpers der einzige Fall ist, in welchem ein aus ähnlichen Schichten bestehender und auf der Oberfläche mit einer sehr dünnen Schicht einer Flüssigkeit bedeckter Körper, die Gestalt eines elliptischen Sphäroïds anzunehmen im Stande ist, lässt sich leicht beweisen. Man differentiire die für diesen Fall gefundene, allgemeine Bedingungsgleichung

$$3q^4\int\rho.\,qqdq + 7\int\rho.\,q^6dq = 10qq\int\rho.\,q^4dq$$

so erhält man, mit Weglassung der sich aufhebenden Glieder

$$3qq \int \rho . qqdq = 5 \int \rho . q^4 dq.$$

Dies von neuem differentiirt, giebt

$$3 \int \rho . qqdq = \rho q^3$$

und hieraus folgt durch eine dritte Differentiation

$$q^3 d\rho = 0,$$

also $d\rho = 0$, und ρ = einer constanten Grösse.

§. 349.

Wir wollen nun das Gesetz der Schwere an der Oberfläche des gefundenen Körpers aufsuchen. Die nach den drei Axen zerlegten Seitenkräfte der Anziehung werden (§. 319. §. 320.) durch

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) + 2f\xi, \quad \left(\frac{dV}{d\eta}\right) + 2f\eta, \quad \left(\frac{dV}{d\zeta}\right),$$

ausgedrückt, und um die vollständige Anziehung auf einen Punkt der Oberfläche zu erhalten, muss man bekanntlich die drei Seitenkräfte ins Quadrat erheben, die Quadrate zusammenaddiren, und aus der Summe die Wurzel ziehen. Bezeichnet man also die Schwere an der Oberfläche durch G, so wird

$$GG = \left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right)^2$$
$$+ 4f\left[\xi . \left(\frac{dV}{d\xi}\right) + \eta\left(\frac{dV}{d\eta}\right)\right]$$
$$+ 4ff\,(\xi\xi + \eta\eta).$$

§. 350.

Aus §. 307. haben wir die Gleichungen

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cos\varphi' \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\sin\varphi'}{r' \cos\psi'}$$
$$- \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\cos\varphi' \sin\psi'}{r'}$$

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\varphi'^2 \cos\psi'^2 + \left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) \frac{\sin\varphi'}{r'\cos\psi'}$$
$$- \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\sin\varphi' \sin\psi'}{r'}$$
$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\psi' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\cos\psi}{r'}$$

so dass man also die im Ausdruck von G vorkommenden partiellen Differentialen $\left(\frac{dV}{d\xi}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)$, durch die andern $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)$, ersetzen kann.

Man wird nun aber sehen, dass im Werthe von V der Winkel φ' gar nicht mit vorkommt, folglich hat man
$$\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) = 0$$
und dem Winkel φ' selbst kann man irgend einen beliebigen Werth geben, ohne dadurch die Allgemeinheit der Resultate zu stören. Wir setzen denselben daher gleich Null, so dass $\sin\varphi' = 0$, $\cos\varphi' = 1$ wird. Durch diese Voraussetzungen erhält man

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cos\psi' - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\sin\psi'}{r'}$$
$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \sin\psi' + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \frac{\cos\psi'}{r'}.$$

Es wird also die Summe
$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\zeta}\right)^2$$
$$= \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'r'}.$$

Ferner hat man aus §. 307., unter der Voraussetzung dass $\varphi' = 0$ sey
$$\xi = r' \cos\psi', \quad \eta = 0,$$
folglich auch

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)\xi + \left(\frac{dV}{d\eta}\right)\eta$$
$$= \left(\frac{dV}{dr'}\right) r' \cos\psi'^2 - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \sin\psi' \cos\psi'$$
$$\xi\xi + \eta\eta = r'r' \cos\psi'^2.$$

Der Werth von GG lässt sich daher vermittelst der neuen partiellen Differentialien von V auch folgendermassen ausdrücken

$$GG = \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \frac{1}{r'r'}$$
$$+ 4f\left[\left(\frac{dV}{dr'}\right) r' \cos\psi'^2 - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \sin\psi' \cos\psi'\right]$$
$$+ 4ff\, r'r' \cos\psi'^2.$$

§. 351.

Wir müssen nun zur Darstellung des Ausdrucks von V als Function von r' und ψ' übergehen. Zu diesem Zweck haben wir aus §. 320. die Reihe

$$V = 2\pi\left[\frac{L}{r'} + \frac{L'}{r'^2} + \frac{L''}{r'^3} + \frac{L'''}{r'^4} + \ldots\right].$$

Nun ist (§. 332.)

$$L = q'^3 (2\mathfrak{q}^0 - 6\mathfrak{a} + 66\mathfrak{b}).$$
$$L' = -M' q'^4 (6\mathfrak{A}' - 66\mathfrak{B}')$$
$$L'' = -M'' q'^5 (6\mathfrak{A}'' - 66\mathfrak{B}'')$$
$$L''' = -M''' q'^6 (6\mathfrak{A}''' - 66\mathfrak{B}''')$$
$$L^{IV} = -M^{IV} q'^7 (6\mathfrak{A}^{IV} - 66\mathfrak{B}^{IV})$$
$$L^{V} = -M^{V} q'^8 (6\mathfrak{A}^{V} - 66\mathfrak{B}^{V})$$
$$L^{VI} = -M^{VI} q'^9 (6\mathfrak{A}^{VI} - 66\mathfrak{B}^{VI})$$

etc. etc. etc.

Ferner hat man (§. 338.)

$$6\mathfrak{A}' = 4a' \mathfrak{q}' \int u\, \Psi' dx$$
$$6\mathfrak{A}'' = 5a'' \mathfrak{q}'' \int u\, \Psi'' dx + 2h\mathfrak{q}''$$
$$6\mathfrak{A}''' = 6a''' \mathfrak{q}''' \int u\, \Psi''' dx$$
$$6\mathfrak{A}^{IV} = 7a^{IV} \mathfrak{q}^{IV} \int u\, \Psi^{IV} dx$$
$$6\mathfrak{A}^{V} = 8a^{V} \mathfrak{q}^{V} \int u\, \Psi^{V} dx$$
$$6\mathfrak{A}^{VI} = 9a^{VI} \mathfrak{q}^{VI} \int u\, \Psi^{VI} dx$$

und aus §. 343.

$$\int u\,\Psi'\,dx = 0$$
$$\int u\,\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\,\mathfrak{D}''$$
$$\int u\,\Psi'''\,dx = 0$$
$$\int u\,\Psi^{IV}\,dx = \frac{2}{9a^{IV}}\,\mathfrak{D}^{IV}$$
$$\int u\,\Psi^{V}\,dx = 0$$
$$\int u\,\Psi^{VI}\,dx = 0. \text{ etc. etc. etc.}$$

Es wird daher

$$\delta\mathfrak{A}' = 0$$
$$\delta\mathfrak{A}'' = 2\mathfrak{q}''(\mathfrak{D}'' + h)$$
$$\delta\mathfrak{A}''' = 0$$
$$\delta\mathfrak{A}^{IV} = \tfrac{14}{9}\,\mathfrak{q}^{IV}\,\mathfrak{D}^{IV}$$
$$\delta\mathfrak{A}^{V} = 0$$
$$\delta\mathfrak{A}^{VI} = 0. \text{ etc. etc. etc.}$$

Die Grössen $\delta\delta\mathfrak{B}'$, $\delta\delta\mathfrak{B}''$ u. s. w. findet man in §. 339. angegeben; substituirt man diese, so wie die Werthe $\delta\mathfrak{A}'$, $\delta\mathfrak{A}''$, in den Gleichungen für L', L'', L''' . . ., so kommt

$$L' = 0$$
$$L'' = -\,2M''q'^{6}\mathfrak{q}''(\mathfrak{D} + h - \tfrac{12}{7}\,hh)$$
$$L''' = 0$$
$$L^{IV} = -\,\tfrac{14}{9}\,M^{IV}q'^{7}\,\mathfrak{q}^{IV}\,(\mathfrak{D}^{IV} - 3hh)$$
$$L^{V} = 0$$
$$L^{VI} = 0. \text{ etc. etc. etc.}$$

Was den Werth von L betrifft, der durch die Gleichung

$$L = q'^{3}(2\mathfrak{q}^{0} - \delta\mathfrak{a} + \delta\delta\mathfrak{b})$$

bestimmt wird, so hat man §. 356.

$$\delta\mathfrak{a} = 2h\mathfrak{q}^{0} + 3\mathfrak{q}^{0}\int udx$$

und da (§. 343., $\int udx = 2\mathfrak{D}$, so wird auch

$$\delta\mathfrak{a} = 2\mathfrak{q}^{0}(h + 3\mathfrak{D}).$$

Zwischen den Grössen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}^{IV}$ findet aber §. 345. die Bedingungsgleichung

$$0 = \mathfrak{D} - \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{D}'' + \tfrac{3}{35}\,\mathfrak{D}^{IV}$$

statt, folglich hat man

$$3\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' - \tfrac{9}{35}\,\mathfrak{D}^{IV}$$
$$\delta\mathfrak{a} = 2\mathfrak{q}^{0}(h + \mathfrak{D}'' - \tfrac{9}{35}\,\mathfrak{D}^{IV}).$$

Endlich ist noch §. 337., $\delta\delta\mathfrak{b} = \tfrac{6}{5}\,\mathfrak{q}^{0}hh$, also

$$L = 2q'^{3}\mathfrak{q}^{0}(1 - h - \mathfrak{D}'' + \tfrac{9}{35}\,\mathfrak{D}^{IV} + \tfrac{3}{5}\,hh),$$

oder wenn man statt $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}^{IV}$ ihre Werthe aus §. 344 und 345. setzt, indem

$$\mathfrak{D}'' = \tfrac{3}{7}\,hh, \qquad \mathfrak{D}^{IV} = -\,\varepsilon hh$$

gefunden war, so erhält man

$$L = 2q'^3\mathfrak{q}^0(1 - h + \tfrac{6}{35}\,hh - \tfrac{9}{35}\,\varepsilon hh).$$

§. 352.

Substituirt man diese Werthe von L, L', L''... in die Gleichung welche V ausdrückt, so kommt

$$V = 4\pi q'^3\,\mathfrak{q}^0(1 - h + \tfrac{6}{35}\,hh - \tfrac{9}{35}\,\varepsilon hh)\,\frac{1}{r'}.$$

$$-\,4\pi q'^5\,\mathfrak{q}''(h - \tfrac{9}{7}\,hh)\,\frac{M''}{r'^3}$$

$$+\,\tfrac{28}{9}\,\pi q'^7\,\mathfrak{q}^{IV}(3 + \varepsilon)\,hk\,\frac{M^{IV}}{r'^5},$$

also wird durch Differentiation

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\,4\pi q'^3\,\mathfrak{q}^0\,(1 - h + \tfrac{6}{35}\,hh - \text{[illegible]}\,\varepsilon hh)\,\frac{1}{r'r'}$$

$$+\,12\pi q'^5\,\mathfrak{q}''(h - \tfrac{9}{7}\,hh)\,\frac{M''}{r'^4}$$

$$-\,\tfrac{140}{9}\,\pi q'^7\,\mathfrak{q}^{IV}(\varepsilon + 3)\,hh\,\frac{M^{IV}}{r'^6}.$$

Führt man statt h die Abplattung α nach §. 346. ein, so kommt

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\,4\pi q'^3\,\mathfrak{q}^0(1 - \alpha + \frac{3 - 2\varepsilon}{5}\,\alpha\alpha)\,\frac{1}{r'r'}$$

$$+\,12\pi q'^5\,\mathfrak{q}''(\alpha - \alpha\alpha\,\frac{12 - \varepsilon}{7})\,\frac{M''}{r'^4}$$

$$-\,\tfrac{140}{9}\,\pi q'^7\,\mathfrak{q}^{IV}(\varepsilon + 3)\,\alpha\alpha\,\frac{M^{IV}}{r'^6}.$$

Ferner ist §. 346.

$$r' = q'(1 - \alpha\,\sin\psi'^2 - \varepsilon\alpha\alpha\,\sin\psi'^2\,\cos\psi'^2)$$

also hieraus, wenn man blos die nöthigen Glieder beibehält

$$\frac{1}{r'r'} = \frac{1}{q'q'}\,[1 + 2\alpha\,\sin\psi^2 + \varepsilon\alpha\alpha\,\sin\psi'^2\,\cos\psi'^2$$
$$+\,3\alpha\alpha\,\sin\psi'^4]$$

$$\frac{1}{r'^4} = \frac{1}{q'^4}\,[1 + 4\alpha\, sin\,\psi'^2]$$
$$\frac{1}{r'^6} = \frac{1}{q'^6}.$$

Hierdurch bekommt man die Entwickelung von

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -4\pi\, q'\, \mathrm{q}^0 \left\{\begin{array}{l} 1 - \alpha + 2\alpha\, sin\,\psi'^2 \\ + \frac{3-2\varepsilon}{5}\,\alpha\alpha \\ - 2\alpha\alpha\, sin\,\psi'^2 \\ + \varepsilon\alpha\alpha\, sin\,\psi'^2\, cos\,\psi'^2 \end{array}\right\}$$
$$+ 12\pi\, q'\, \mathrm{q}''\, M'' \left\{\begin{array}{l} \alpha - \alpha\alpha\,\frac{12-\varepsilon}{7} \\ + 4\alpha\alpha\, sin\,\psi'^2 \end{array}\right\}$$
$$- \tfrac{140}{9}\pi\, q'\, \mathrm{q}^{IV}\, M^{IV}\, (\varepsilon + 3)\,\alpha\alpha.$$

§. 353.

Auf gleiche Weise erhält man, indem man das partielle Differential von V nach ψ' nimmt, und noch mit $\frac{1}{r'}$ multiplicirt, darauf statt $\frac{1}{r'^4}$, $\frac{1}{r'^6}$ ihre Werthe setzt

$$\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)\cdot\frac{1}{r'} = -4\pi\, q'\, \mathrm{q}''\, \frac{dM''}{d\psi'} \left\{\begin{array}{l} \alpha - \alpha\alpha\,\frac{12-\varepsilon}{7} \\ + 4\alpha\alpha\, sin\,\psi'^2 \end{array}\right\}$$
$$+ \tfrac{28}{9}\pi\, q'\, \mathrm{q}^{IV}\, \frac{dM^{IV}}{d\psi'}\,(\varepsilon + 3)\,\alpha\alpha.$$

Nun ist aber

$$M'' = sin\,\psi'^2 - \tfrac{1}{3}$$
$$M^{IV} = sin\,\psi'^4 - \tfrac{6}{7}\, sin\,\psi'^2 + \tfrac{3}{35}$$

also auch wenn man differentiirt

$$\frac{dM''}{d\psi'} = 2\, sin\,\psi'\, cos\,\psi'$$
$$\frac{dM^{IV}}{d\psi'} = 4\, cos\,\psi'\,(sin\,\psi'^3 - \tfrac{3}{7}\, sin\,\psi')$$

Beschränkt man sich auf die erste Potenz der Abplattung, welches in allen Fällen für die Unter-

suchungen, bei denen das Gesetz der Schwere in Betracht kommt, hinreichend ist, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -4\pi\, q'\, q^{\circ}$$
$$+ 4\pi q' \alpha\, (q^{\circ} - 2q^{\circ}\, \sin\psi'^2 - q'' + 3q''\, \sin\psi'^2)$$

also auch

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'r'}$$
$$= 16\pi^2\, q'^2\, q^{\circ 2}$$
$$- 32\pi^2\, q'^2\, q^{\circ}\alpha\, (q^{\circ} - q'' - 2q^{\circ}\, \sin\psi'^2$$
$$+ 3q''\, \sin\psi'^2).$$

Ferner wird mit Vernachlässigung des Products αf

$$4f\left[\left(\frac{dV}{dr'}\right) r' \cos\psi'^2 - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \sin\psi' \cos\psi'\right]$$
$$= -16 f\pi\, q'^2\, q^{\circ}\, \cos\psi'^2;$$
$$4ff\, r'r'\, \cos\psi'^2 = 0.$$

Man erhält daher den Werth von GG (§. 350.)

$$GG = 16\pi^2\, q'^2\, q^{\circ 2}$$
$$- 32\pi^2\, q^{\circ}\alpha\, (q^{\circ} - q'' - 2q^{\circ} \sin\psi'^2 + 3q'' \sin\psi'^2$$
$$+ \frac{f}{2\pi\alpha} \cos\psi'^2).$$

Um die Grösse f aus diesem Ausdruck wegzuschaffen, hat man

$$\frac{f}{2\pi} = g, \quad (§.\ 332.)$$
$$g = 2(q^{\circ} - q'')\, h, \quad (§.\ 335.)$$
$$h = \alpha, \quad (§.\ 346.)$$

folglich wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt

$$\frac{f}{2\pi\alpha} = 2(q^{\circ} - q'').$$

Es wird daher die Grösse

$$q^{\circ} - q'' - 2q^{\circ}\, \sin\psi'^2 + 3q''\, \sin\psi'^2 + \frac{f}{2\pi\alpha} \cos\psi'^2$$
$$= q^{\circ}\, (1 - 2\sin\psi'^2 + 2\cos\psi'^2)$$
$$- q''(1 - 3\sin\psi'^2 + 2\cos\psi'^2)$$
$$= q^{\circ}\, (3 - 4\sin\psi'^2) - q''(3 - 5\sin\psi'^2).$$

§. 354.

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung für GG, und zieht dann auf beiden Seiten die Wurzel aus, so kommt der Werth der Schwere

$$G = 4\pi q' \mathfrak{q}^\circ - 4\pi q' \alpha \begin{bmatrix} \mathfrak{q}^\circ (3 - 4 \sin \psi'^2) \\ - \mathfrak{q}'' (3 - 5 \sin \psi'^2) \end{bmatrix}.$$

Am Aequator wo $\psi' = 0$ ist, sey die Schwere $= G^\circ$, am Pol wo $\psi' = 90^\circ$, sey dieselbe $= G'$, so wird

$$G^\circ = 4\pi q' \mathfrak{q}^\circ - 12\pi q' \alpha (\mathfrak{q}^\circ - \mathfrak{q}'')$$
$$G' = 4\pi q' \mathfrak{q}'' + 12\pi q' \alpha (\tfrac{1}{3} \mathfrak{q}^\circ - \tfrac{2}{3} \mathfrak{q}'').$$

Setzt man $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}^\circ \delta$, so hat man

$$\frac{G}{G^\circ} = \frac{1 - \alpha (3 - 3\delta - 4 \sin \psi'^2 + 5\delta \sin \psi'^2)}{1 - 3\alpha (1 - \delta)}$$

oder wenn man mit dem Nenner dividirt

$$G = G^\circ (1 + 4\alpha \sin \psi'^2 (1 - \tfrac{5}{4} \delta)).$$

Im Fall, dass die Dichtigkeit constant ist, erhält man nach §. 347., $\delta = \tfrac{3}{5}$, also

$$G = G^\circ (1 + 4\alpha \sin \psi'^2).$$

Nimmt man die Dichtigkeit als vom Mittelpunkt aus abnehmend an, und zwar um den einfachsten Fall zu betrachten, in arithmetischer Progression, so kann man

$$\rho = \rho' - \gamma \frac{q}{q'}$$

annehmen, wo ρ' die Dichtigkeit im Mittelpunkt, und γ den Unterschied der Dichtigkeiten im Mittelpunkte und an der Oberfläche bedeutet; dann kommt

$$\int \rho .\, qqdq = \tfrac{1}{3} \rho' q'^3 - \tfrac{1}{4} \gamma q'^3$$
$$\int \rho .\, q^4 dq = \tfrac{1}{5} \rho' q'^5 - \tfrac{1}{6} \gamma q'^6$$

folglich

$$\mathfrak{q}^\circ = \tfrac{1}{3} \rho' - \tfrac{1}{4} \gamma, \quad \mathfrak{q}'' = \tfrac{1}{5} \rho' - \tfrac{1}{6} \gamma$$

und hieraus

$$\delta = \frac{12\rho' - 10\gamma}{20\rho' - 15\gamma}.$$

Man setze dies $= \tfrac{3}{5} - \delta'$, so ergiebt sich

$$\delta' = \frac{\gamma}{20\rho' - 15\gamma}$$

welcher Ausdruck positiv ist, wenn γ einen positiven Werth erhält, indem $20\rho'$ immer grösser als 15γ seyn muss, wenn man nicht eine negative Dichtigkeit

an der Oberfläche annehmen wollte, und wir können hieraus schliessen, dass δ kleiner als ξ ist, wenn die Dichtigkeit nach der Oberfläche zu abnimmt. Hingegen wird δ grösser als ξ, wenn die Dichtigkeit nach der Oberfläche hin zunimmt, weil dann γ als negativ betrachtet werden muss.

§. 355.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, in welchem die Erde anfangs aus einer tropfbaren Flüssigkeit bestehend angenommen wird. Die Gleichung für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten §. 290.

$$dp = \rho\,(Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta)$$

wo p den Druck, ρ die Dichtigkeit, P, Q, R die nach den drei Axen wirkenden Kräfte bezeichnen, zeigt, dass im Allgemeinen ρ eine Function von

$$\int (Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta)$$

seyn muss, wenn irgend Gleichgewicht unter der Wirkung der angegebenen Kräfte vorhanden seyn soll, weil sonst dp kein vollkommenes Differential seyn könnte. Uebrigens muss auch

$$Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta$$

ein vollkommenes Differential einer Function der drei veränderlichen Grössen ξ, η, ζ ausmachen.

Ist daher die Dichtigkeit der Flüssigkeit nicht homogen, so wird sich dieselbe im Zustande des Gleichgewichts in Schichten theilen, auf denen eine constante Dichtigkeit, und daher auch ein constanter Druck herrscht, und die Differentialgleichung der Oberfläche einer solchen Schicht wird durch

$$Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta = 0$$

ausgedrückt. Man sieht hieraus, dass alle diese Schichten als ähnliche Oberfläche betrachtet werden können, indem dieselben nur durch den Werth der Constante, welcher durch die Integration hinzukommt, und sich von einer Schicht zur andern ändert, von einander verschieden sind.

§. 356.

In unserer vorigen Untersuchung über die Gestalt der Oberfläche, eines wenig von der Kugel ab-

weichenden Körpers, der von einer sehr dünnen Schicht einer Flüssigkeit überdeckt wird, konnten wir im Ausdruck von V (§. 320.) die eine nach den positiven Potenzen von r' fortschreitende Reihe vernachlässigen, da die durch Integration zu findenden Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$. . . . Null wurden, oder wenigstens wegen der unbeträchtlichen Tiefe der Flüssigkeit, als unendlich klein betrachtet werden mussten. Allein sobald wir die ganze Masse als flüssig annehmen, wie wir jetzt thun werden, ist es nöthig, dass auch der zweite Theil des Ausdrucks von V im erwähnten Paragraph mit in Betracht gezogen wird, da das Gleichgewicht nicht blos bei der Oberfläche, sondern zugleich bei allen innern Theilen der Masse statt finden muss. Die Gleichung des Gleichgewichts

$$V + frr\cos\psi'^2 = c$$

wird daher in dem vorliegenden Falle:

$$c = fr'r'\cos\psi^2 + 2\pi\left\{\begin{array}{l}\frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^2} + \frac{L'''}{r'^3}\\ + \text{etc. etc. etc.}\\ + \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r'^2\\ + \text{etc. etc. etc.}\end{array}\right\}.$$

§. 357.

Wir können nun annehmen, es sey allgemein für jede Schicht

$$r = q(1 - s),$$

wo q unabhängig vom Winkel ψ, den grössten Werth von r in der Schicht angiebt, und s eine kleine Grösse bedeutet, deren Potenzen wir vernachlässigen können. Bemerkt man nun, dass aus den §§. 317, 322 bis 325.

$$L = \int N.\,dx$$
$$L' = a'\,M'\int N'\,\Psi'\,dx$$
$$L'' = a''\,M''\int N''\,\Psi''\,dx$$
$$L''' = a'''\,M'''\int N'''\,\Psi'''\,dx$$
etc. etc. etc.

$$N = \int\rho.\,rrdr$$
$$N' = \int\rho.\,r^3dr$$
$$N'' = \int\rho.\,r^4dr$$
$$N''' = \int\rho.\,r^6dr.$$ etc. etc. etc.

wird, so hat man, indem in den letztern Integralen statt r seinen Werth $q(1-s)$ gesetzt, und dann von $q=0$ bis $q=q'$ integrirt wird, wo q' der Schicht entspricht die durch irgend einen angezogenen Punkt geht

$$N = \int\rho\, qqdq - 3\int\rho\, sqqdq - \int\rho\, q^3 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

$$N' = \int\rho\, q^3dq - 4\int\rho\, sq^3dq - \int\rho\, q^4 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

$$N'' = \int\rho\, q^4dq - 5\int\rho\, sq^4dq - \int\rho\, q^6 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

$$N''' = \int\rho\, q^6dq - 6\int\rho\, sq^6dq - \int\rho\, q^6 \left(\frac{ds}{dq}\right) dq.$$

etc. etc. etc.

Die ersten Glieder aller dieser Ausdrücke werden blos Functionen von q seyn, allein die übrigen werden zugleich den Winkel ψ enthalten, da s ausser von q auch noch von ψ abhängt, weswegen das Differential von ds so geschrieben ist $\left(\frac{ds}{dq}\right) dq$, um anzuzeigen, dass blos q als veränderlich betrachtet werden solle. Der Kürze wegen wollen wir diese Grössen so schreiben:

$$N = Q - 3T - U$$
$$N' = Q' - 4T' - U'$$
$$N'' = Q'' - 5T'' - U''$$
$$N''' = Q''' - 6T''' - U'''$$

etc. etc. etc.

wo man leicht sieht, was die Grössen Q, Q', Q''..., T, T', T''...., U, U', U''... zu bedeuten haben, wobei man übrigens bemerken kann, dass die Grössen T, T', T''..., U, U', U''.... von derselben Ordnung als s selbst, seyn müssen. Multiplicirt man diese Ausdrücke durch dx, $\Psi' dx$, $\Psi'' dx$ u. s. w., wo $x = \sin\psi$ ist, und integrirt von $x=-1$ bis $x=+1$, so wird

$$L = 2Q - 3\int T\, dx \qquad - \int U\, dx$$
$$L' = \quad (-4\int T'\, \Psi'\, dx - \int U'\, \Psi'\, dx)\, a'\, M'$$
$$L'' = \quad (-5\int T''\, \Psi''\, dx - \int U''\, \Psi''\, dx)\, a''\, M''$$
$$L''' = \quad (-6\int T'''\, \Psi'''\, dx - \int U'''\, \Psi'''\, dx)\, a'''\, M'''$$

etc. etc. etc.

§. 358.

Was die Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ ... betrifft, so hat man (§. 318.)

$$\mathfrak{L} = \int \mathfrak{N} . dx$$
$$\mathfrak{L}' = a' M' \int \mathfrak{N}' \Psi' dx$$
$$\mathfrak{L}'' = a'' M'' \int \mathfrak{N}'' \Psi'' dx$$
$$\mathfrak{L}''' = a''' M''' \int \mathfrak{N}''' \Psi''' . dx$$

etc. etc. etc.

$$\mathfrak{N} = \int \rho . rdr$$
$$\mathfrak{N}' = \int \rho . dr$$
$$\mathfrak{N}'' = \int \rho . \frac{dr}{r}$$
$$\mathfrak{N}''' = \int \rho . \frac{dr}{rr} \text{ etc. etc. etc.}$$

wo diese letztern Integrale aber von $q = q'$ bis zu dem Werthe von q, welcher der Oberfläche entspricht, genommen werden müssen, und den wir durch q'' bezeichnen wollen. Man sieht aber leicht, dass ein von $q = q'$ bis $q = q''$ genommenes Integral, gleich ist dem Unterschiede zweier andern Integrale, von denen das eine zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q = q''$, das andere aber zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q = q'$ enthalten ist. Bezeichnet man daher die zwischen $q = 0$ und $q = q''$ enthaltenen Werthe von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ ...., durch $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ ...., so wird

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} - \int \rho . rdr$$
$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}' - \int \rho \ dr$$
$$\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}'' - \int \rho . \frac{dr}{r}$$
$$\mathfrak{N}''' = \mathfrak{M}''' - \int \rho . \frac{dr}{rr} \quad \text{etc. etc. etc.}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken, statt r, $q(1-s)$, so erhält man

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} - \int \rho \ qdq + 2\int \rho \ sqdq + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) q^2 dq$$
$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}' - \int \rho \ dq + \int \rho \ s \ dq + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) q \ dq$$
$$\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}'' - \int \rho \frac{dq}{q} + \int \rho \left(\frac{ds}{dq}\right) dq$$

$$\mathfrak{N}''' = \mathfrak{M}''' - \int\rho \frac{dq}{qq} - \int\rho\, s \frac{dq}{qq} + \int\rho \left(\frac{ds}{dq}\right) \frac{dq}{q}$$

etc. etc. etc.

und wir wollen diese Werthe der Kürze wegen so schreiben:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} - \mathfrak{Q} + 2\mathfrak{T} + \mathfrak{U}$$
$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}' - \mathfrak{Q}' + \mathfrak{T}' + \mathfrak{U}'$$
$$\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}'' - \mathfrak{Q}'' + \mathfrak{U}''$$
$$\mathfrak{N}''' = \mathfrak{M}''' - \mathfrak{Q}''' - \mathfrak{T}''' + \mathfrak{U}'''$$

etc. etc. etc.

Multiplicirt man diese Ausdrücke durch dx, $\Psi' dx$, $\Psi'' dx$ u. s. w. und nimmt die Integrale von $x = -1$ bis $x = +1$, so erhält man

$$\mathfrak{L} = 2\mathfrak{M} - 2\mathfrak{Q} + 2\int\mathfrak{T}\, dx + \int\mathfrak{U}\, dx$$
$$\mathfrak{L}' = (\int\mathfrak{T}'\, \Psi'\, dx + \int\mathfrak{U}'\, \Psi'\, dx)\, a' M'$$
$$\mathfrak{L}'' = a'' M'' \int\mathfrak{U}''\, \Psi''\, dx$$
$$\mathfrak{L}''' = -(\int\mathfrak{T}'''\, \Psi'''\, dx - \int\mathfrak{U}'''\, \Psi'''\, dx)\, a''' M'''$$

etc. etc. etc.

§. 359.

Diese Werthe müssen wir in die Gleichung des Gleichgewichts §. 356. substituiren; diese ist, wenn man $c = 2\pi k$, $f = 2\pi g$, der Kürze wegen nimmt

$$k = g\, r' r' \cos\psi'^2 + \frac{L}{r'} + \frac{L'}{r'^2} + \frac{L''}{r'^2} + \ldots$$
$$+ \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' r' + \mathfrak{L}'' r'^2 + \mathfrak{L}''' r'^3 + \ldots$$

Wir müssen nun zugleich statt r', $q'(1 - s')$ setzen, welches aber blos in dem Gliede $\frac{L}{r'}$ nothwendig ist; in allen übrigen kann $r' = q'$ gesetzt werden, weil die Coefficienten L', L'', L''' ..., $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}'''$..., selbst von der Ordnung der Grösse s' sind. Man hat dann

$$\frac{L}{r'} = \frac{2Q}{q'} + \frac{2Qs'}{q'} - \frac{3\int T\, dx + \int U\, dx}{q'}$$

und da $\cos\psi'^2 = \frac{2}{3} - M''$, so kommt

$$k = g\, q' q' (\tfrac{2}{3} - M'') + \frac{2Q}{q'} + \frac{2Qs'}{q'}$$

$$- \frac{3\int T\,dx + \int U\,dx}{q'}$$
$$- \frac{4\int T'\,\Psi'\,dx + \int U'\,\Psi'\,dx}{q'q'}\,a'M'$$
$$- \frac{5\int T''\,\Psi''\,dx + \int U''\,\Psi''\,dx}{q'^3}\,a''M''$$
$$- \frac{6\int T'''\,\Psi'''\,dx + \int U'''\,\Psi'''\,dx}{q'^4}\,a'''M'''$$
— etc. etc. etc.
$$+ 2\mathfrak{M} - 2\mathfrak{Q} + 2\int \mathfrak{T}\,dx + \int \mathfrak{U}\,dx$$
$$+ a'\,M'\,q'\,(\int \mathfrak{T}'\,\Psi'\,dx + \int \mathfrak{U}'\,\Psi'\,dx)$$
$$+ a''\,M''\,q''\,q'\int \mathfrak{U}''\,\Psi''\,dx$$
$$- a'''M'''q'^3\,(\int \mathfrak{T}'''\,\Psi'''\,dx - \int \mathfrak{U}'''\,\Psi'''\,dx)$$
— etc. etc. etc.

§. 360.

Alle Integrale, welche in diesem Ausdruck vorkommen, sind blos Functionen von q', da die Integration welche zum zweiten Male nach ψ ausgeführt werden soll, zwischen ganz bestimmten Gränzen geschieht, also der Winkel ψ ganz in der Formel verloren geht. Sucht man also hieraus den Werth von s', so würde diese Grösse die Form
$$s = K^0 + K'\Psi' + K''\Psi'' + K'''\Psi''' + \ldots.$$
erhalten, wo K, K', K'', K'''... Functionen von q sind, und statt M', M''...., ihre allgemeinen Werthe Ψ', Ψ''.... gesetzt werden.

Man erhält hierdurch
$$T = \int \rho\; qq\,(K^0 + K'\,\Psi' + K''\,\Psi'' + \ldots)\,dq$$
$$T' = \int \rho\; q^3\,(K^0 + K'\,\Psi' + K''\,\Psi'' + \ldots)\,dq$$
$$T'' = \int \rho\; q^4\,(K^0 + K'\,\Psi' + K''\,\Psi'' + \ldots)\,dq$$
etc. etc. etc.

also wenn man bemerkt, dass die Factoren Ψ', Ψ''... ausserhalb des Integralzeichens gesetzt werden können, indem sie bei dieser Integration als constant betrachtet werden.
$$\int T\,dx = 2\int \rho\; qq\;K^0\,dq$$
$$\int T'\,\Psi'\,dx = \frac{2}{3a}\int \rho\; q^3\;K'\,dq$$

$$\int T'' \, \Psi'' \, dx = \frac{2}{5a''} \int \rho . \, q^4 \, K'' \, dq$$

$$\int T''' \, \Psi''' \, dx = \frac{2}{7a'''} \int \rho . \, q^6 \, K''' \, dq$$

etc. etc. etc.

Auf gleiche Weise findet man noch, da

$$\left(\frac{ds}{dq}\right) dq = dK^{\circ} + \Psi' dK' + \Psi'' dK'' + \Psi''' dK''' + \ldots$$

gesetzt werden muss,

$$\int U \, dx = 2 \int \rho \, q^3 \, dK^{\circ}$$

$$\int U' \, \Psi' \, dx = \frac{2}{3a'} \int \rho \, q^4 \, dK'$$

$$\int U'' \, \Psi'' \, dx = \frac{2}{5a''} \int \rho \, q^5 \, dK''$$

$$\int U''' \, \Psi''' \, dx = \frac{2}{7a'''} \int \rho \, q^6 \, dK'''$$

etc. etc. etc.

$$\int \mathfrak{T} \, dx = \int \rho \, K^{\circ} \, dq$$

$$\int \mathfrak{T}' \, \Psi' \, dx = \frac{2}{3a'} \int \rho \, K' \, dq$$

$$\int \mathfrak{T}''' \, \Psi''' \, dx = \frac{2}{5a'''} \int \rho \, K''' \frac{dq}{qq}$$

etc. etc. etc.

$$\int \mathfrak{U} \, dx = 2 \int \rho \, qq \, dK^{\circ}$$

$$\int \mathfrak{U}' \, \Psi' \, dx = \frac{2}{3a'} \int \rho \, q \, dK'$$

$$\int \mathfrak{U}'' \, \Psi'' \, dx = \frac{2}{5a''} \int \rho \, dK''$$

$$\int \mathfrak{U}''' \, \Psi''' \, dx = \frac{2}{7a'''} \int \rho \, dK'''$$

etc. etc. etc.

§. 361.

Vergleicht man den Ausdruck des Gleichgewichts der Flüssigkeit §. 359., mit dem für *s* §. 360. angenommenen, so sieht man, dass

$$K' = a' \frac{4\int T' \Psi' dx + \int U' \Psi' dx}{2qQ}$$
$$- a' \frac{qq}{2Q} (\int \mathfrak{T}' \Psi' dx + \int \mathfrak{U}' \Psi' dx)$$
$$K'' = \frac{gq^3}{2Q} + a'' \frac{5\int T'' \Psi'' dx + \int U'' \Psi'' dx}{2q^2 Q}$$
$$- a'' \frac{q^3}{2Q} \int \mathfrak{U}'' \Psi'' dx$$
$$K''' = a''' \frac{6\int T''' \Psi''' dx + \int U''' \Psi''' dx}{2q^3 Q}$$
$$+ a''' \frac{q^4}{2Q} (\int \mathfrak{T}''' \Psi''' dx - \int \mathfrak{U}''' \Psi''' dx)$$

etc. etc. etc.

seyn wird, und allgemein für den Coefficienten $K^{(n)}$, wenn n grösser als 2, wird man, wie bei einiger Aufmerksamkeit leicht gefunden wird, die Gleichung

$$K^{(n)} = a^{(n)} \frac{(n+3)\int T^{(n)} \Psi^{(n)} dx + \int U^{(n)} \Psi^{(n)} dx}{2q^n Q}$$
$$+ a^{n.} \frac{q^{n+2}}{2Q} [(n-2)\int \mathfrak{T}^{(n)} \Psi^{(n)} dx - \int \mathfrak{U}^n \Psi^n dx]$$

erhalten. Nun ist aber, wie man aus der Entwickelung der einzelnen Integrale im vorigen Paragraph schliessen kann,

$$\int T^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1) a^{(n)}} \int \rho . q^{n+2} K^{(n)} dq$$
$$\int U^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1) a^{(n)}} \int \rho . q^{n+3} dK^{(n)}$$
$$\int \mathfrak{T}^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1) a^{(n)}} \int \rho . K^{(n)} \frac{dq}{q^{n-1}}$$
$$\int \mathfrak{U}^{(n)} \Psi^{(n)} dx = \frac{2}{(2n+1) a^{(n)}} \int \rho \frac{dK^{(n)}}{q^{n-2}}$$

folglich wenn man diese Werthe in vorige Gleichung substituirt, zugleich statt Q seinen Werth $\int \rho\, qqdq$,

(§. 357.) setzt, und der Kürze wegen den Ind weglässt

$$\left.\begin{aligned}(2n+1)\, K q^n \int\rho.\; qqdq \\ = (n+3) \int\rho.\; q^{n+2}\, Kdq \\ + \int\rho.\; q^{n+3}\, dK \\ + (n-2)\, q^{2n+1} \int\rho\; K \frac{dq}{q^{n-1}} \\ - q^{2n-1} \int\rho\; \frac{dK}{q^{n-2}}\end{aligned}\right\} \quad (1$$

aus welcher Gleichung K gefunden werden mus

§. 362.

Die Gleichung (A) lässt sich zwar noch ve fachen, allein auch dann ist dieselbe nicht weite tegrabel, denn indem man diese Gleichung zw hinter einander differentiirt, und die gehörige ductionen anbringt, reducirt sie sich auf die Gleic

$$\left(\frac{ddK}{dq^2} - n\,(n+1)\,\frac{K}{qq}\right).\int\rho.\; qqdq + 2\rho\, q\left(K + \frac{qdK}{dq}\right) = 0$$

die sich nicht integriren lässt; allein die Vo setzung, die wir früher machten, dass die Ober nur wenig von der Kugel abweichen soll, führ auf den Schluss, dass K Null seyn muss. Man nämlich, dass der Werth $K = 0$ der Gleichun wirklich Genüge leistet, obgleich noch ausserdem viel andere Werthe vorhanden seyn können aber nicht für unsere Annahme passend sind. G nun, es leiste ein anderer Werth von K der chung Genüge, so ist einleuchtend, dass wenn diesen Werth durch eine beliebige constante C multiplicirt, dieses Product immer noch die die Gleichung (A) vorgeschriebenen Bedingunge fülle. Wäre also K nicht Null, so erhielte nicht nur wegen des beliebigen Werthes der stanten Multiplicators, unendlich viel Oberfläche im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit, so

man würde auch Oberflächen erhalten, die so sehr als man wollte von der Kugel abweichen, da der besagte constante Factor von beliebiger Grösse angenommen werden könnte. Wir müssen daher K Null setzen, und man hat also

$$K' = 0, \quad K''' = 0, \quad K^{IV} = 0, \quad K^{V} = 0, \text{ etc.}$$

da die Gleichung (A) auch dann noch gilt, wenn $n = 1$ gesetzt wird.

Der Werth von s (§. 360.) reducirt sich also auf

$$s = K^{0} + K''\Psi''$$

und wir haben blos noch die Coefficienten K^{0}, K'' zu bestimmen. Der erste findet sich leicht folgendermassen: Für $\psi = 0$, muss auch s Null seyn, damit $r = q$ werde, und da für diesen Werth von ψ, $\Psi'' = -\frac{1}{3}$ ist; so wird

$$0 = K^{0} - \tfrac{1}{3} K''$$

folglich wenn diese Gleichung von der vorigen abgezogen wird

$$s = K''(\Psi'' + \tfrac{1}{3}).$$

Nun ist aber $\Psi'' = \sin\psi^2 - \frac{1}{3}$, also

$$s = K''. \sin\psi^2.$$

§. 363.

Zur Bestimmung des Coefficienten K'', der wie man sieht, die Abplattung angiebt, hat man aus §. 361. die Gleichung

$$K''q^2 \int\varrho\, qqdq = \tfrac{1}{2} gq^5 + \int\varrho .\, q^4 K''\, dq + \tfrac{1}{5}\int\varrho\, q^5\, dK'' - \tfrac{1}{5} q^6 \int\rho\, dK''.$$

Ist ρ constant, so lässt sich K leicht finden; denn man kann diese Gleichung auch so schreiben

$$K''q^2 \int\rho\, qqdq = \tfrac{1}{2} gq^6 + \tfrac{1}{5}\int\rho .\, d.\, q^5 K'' - \tfrac{1}{5} q^6 \int\varrho .\, dK''$$

also wenn man integrirt, indem ρ als constant betrachtet wird, und lässt alle Integrale von $q = 0$ an verschwinden

$$\tfrac{2}{5} K''q^5 \rho = \tfrac{1}{4} gq^5 + \tfrac{1}{5}\varrho\, q^5 K, \text{ und hieraus}$$

$$K'' = \frac{15g}{4\rho}.$$

Im Allgemeinen lässt sich auch diese Gleichung nicht integriren, obgleich viele besondere Fälle für

das Gesetz der Dichtigkeit ϱ angegeben werden können, in welchen die Integration ausgeführt werden kann; man sieht aber doch so viel aus derselben, dass der Werth von K'' unter der Form $g\sigma$ angegeben werden kann, wo σ eine Function von q ist.

§. 364.

Um das Gesetz der Schwere an der Oberfläche der Erde zu finden, bedient man sich der §. 350. entwichelten Gleichung, und lässt das in ff multiplicirte Glied weg, weil wir blos die von der ersten Potenz der Abplattung abhängenden Glieder berücksichtigt haben. Bezeichnet nämlich G die Schwere an irgend einem Orte der Erde, dessen geocentrische Breite ψ' ist, wofür man auch ohne Fehler die geographische Breite nehmen kann, da beide Winkel blos um eine der Abplattung proportionale Grösse verschieden sind, so hat man

$$GG = \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \frac{1}{r'r'}$$

$$+ 4f\left[\left(\frac{dV}{dr'}\right) r' \cos\psi'^2 - \left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \sin\psi' \cos\psi'\right].$$

Nun haben wir aber bei den frühern Untersuchungen über die Schwere (§. 353.) gesehen, dass das Glied $\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)$ selbst schon der Abplattung proportional ist, folglich können die Grössen

$$\left(\frac{dV}{d\psi'}\right)^2 \cdot \frac{1}{r'r'},$$

$$4f\left(\frac{dV}{d\psi'}\right) \cdot \sin\psi' \cos\psi',$$

Null gesetzt werden, und es bleibt blos

$$GG = \left(\frac{dV}{dr'}\right)^2 + 4f\left(\frac{dV}{dr'}\right) r' \cos\psi'^2$$

also wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht

$$- G = \left(\frac{dV}{dr'}\right) + 2f\, r' \cos\psi'^2.$$

§. 365.

Man hat nun in unserm Fall (§. 356.)

$$V = 2\pi \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{r'} + \frac{L'}{r'^2} + \frac{L''}{r'^3} + \ldots \\ + \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'r' + \mathfrak{L}''r'^2 + \ldots \end{array} \right.$$

also auch

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = 2\pi \left\{ \begin{array}{l} -\frac{L}{r'^2} - \frac{2L'}{r'^3} - \frac{3L'''}{r'^4} \ldots \\ + \mathfrak{L}' + 2\mathfrak{L}''r' + \ldots \end{array} \right.$$

An der Oberfläche werden die Grössen $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''\ldots$ von selbst Null, also bleibt blos

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{2\pi}{r'^2}\left\{L + \frac{2L'}{r'} + \frac{3L''}{r'^2} + \ldots\right.$$

§. 366.

Nun ist aber aus §. 357 bis 362.

$$L = 2\int\rho\, qqdq - 3\int T\, dx - \int U\, dx$$
$$L' = 0$$
$$L'' = -a''M\,[5\int T''\Psi''\,dx + \int U''\Psi''\,dx]$$
$$L''' = 0, \quad L^{IV} = 0 \text{ etc. etc.}$$

$$\int T\,dx = 2\int\rho\, qqK^0\,dq$$
$$\int U\,dx = 2\int\rho\, q^3 dK^0$$
$$\int T''\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\int\rho\, q^5 K''dq$$
$$\int U''\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\int\rho\, q^5 dK''$$

folglich auch

$$3\int T\,dx + \int U\,dx$$
$$= 6\int\rho\, qqK^0\,dq + 2\int q^3\,dK^0$$
$$= 2\int\rho.\, d.\, q^3K^0$$
$$= \tfrac{2}{5}\int\rho.\, d.\, q^3K''$$

indem nach §. 363., $K^0 = \frac{1}{5}K''$ seyn muss. Eben so wird

$$5\int T''\Psi''\,dx + \int U''\Psi''\,dx = \frac{2}{5a''}\int\rho\, d.\, q^5K''$$

also hieraus

$$L = 2\int\rho\, qqdq - \tfrac{2}{5}\int\rho.\, d.\, q^3K''$$

$$L'' = -\frac{2M''}{5}\int\rho.\, d.\, q^5 K''$$

und man erhält endlich

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi\int\rho\, qqdq}{r'^2} + \frac{4\pi}{3}\,\frac{\int\rho.\, d.\, q^5 K''}{r'^2}$$
$$+ \frac{12\pi}{5}M''\frac{\int\rho.\, d.\, q^5 K''}{r'^4}.$$

§. 367.

Nun hatten wir §. 363. die Gleichung

$$K''q^2\int\rho\, qqdq = \tfrac{1}{2}gq^5 + \tfrac{1}{5}\int\rho.\, d.\, q^5 K''$$
$$- \tfrac{1}{5}q^5\int\rho\, dK'',$$

die allgemein die Relation zwischen K'' und q angiebt. An der Oberfläche der flüssigen Masse zieht sich diese Gleichung noch etwas zusammen; denn es ist aus §. 360.

$$\int\rho\, dK'' = \frac{5a''}{2}\int\mathfrak{U}''\Psi''dx$$
$$= \frac{5}{2}\,\frac{\mathfrak{L}''}{M''},\ (§.\ 358.)$$

und da an der Oberfläche $\mathfrak{L}'' = 0$ ist, so wird ebenfalls $\int\rho\, dK'' = 0$ seyn; folglich wird

$$\tfrac{1}{5}\int\rho.\, d.\, q^5 K'' = K''q''^2\int\rho\, qqdq - \tfrac{1}{2}gq''^5$$

wo q'' den Werth von q an der Oberfläche bedeutet.

Diesen Werth von $\int\rho.\, d.\, q^5 K''$ substituire man in die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi\int\rho\, qqdq}{r'r'} + \frac{4\pi\int\rho.\, d.\, q^5 K''}{3r'r'}$$
$$+ \frac{12\pi\int\rho.\, d.\, q^5 K''}{5r'^4}M''$$

so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi\int\rho\, qqdq}{r'r'} + \frac{4\pi\int\rho.\, d.\, q^5 K''}{3r'r'}$$
$$+ \frac{12K''q''^2\pi\int\rho\, qqdq}{r'^4}M'' - \frac{6\pi gq''^5}{r'^4}M''.$$

Es war ferner $r' = q''(1 - K'' \sin\psi'^2)$, folglich

$$\frac{1}{r'r'} = \frac{1}{q''q''}\,(1 + 2K'' \sin\psi'^2).$$

Diesen Werth muss man in die obere Gleichung setzen; allein man kann in allen Gliedern, das erste ausgenommen, $r' = q''$ setzen; es kommt daher, da $2\pi g = f$

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi \int \rho\, qqdq}{q''q''} + \frac{4\pi K'' \int \rho\, qqdq}{q''q''} \sin\psi'^2$$
$$+ \frac{4\pi \int \rho.\, d.\, q^3 K''}{3q''q''} - 3f\, q'' \sin\psi'^2$$
$$+ fq'' - 4K''\pi \frac{\int \rho\, qqdq}{q''q''}$$

indem man zugleich $M'' = \sin\psi^2 - \frac{1}{3}$, $2\pi g = f$ nimmt.

§. 368.

Addirt man auf beiden Seiten $2fr' \cos\psi'^2 = 2fq'' \cos\psi'^2$, so kommt (§. 372.)

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) + 2fr' \cos\psi'^2 = -G$$
$$= -\frac{4\pi \int \rho\, qqdq}{q''q''} + \frac{4\pi \int \rho\, d.\, q^3 K''}{3q''q''}$$
$$- \frac{4K''\pi \int \rho\, qqdq}{q''q''} + 3fq''$$
$$- \sin\psi'^2 \left[5fq'' - \frac{4\pi K'' \int \rho.\, qqdq}{q''q''}\right].$$

Unter dem Aequator wo $\psi' = 0$ ist, sey $G = G^0$, so wird auch

$$G = G^0 \left[1 + \sin\psi'^2 \left(\frac{5fq''}{G^0} - K''\right)\right].$$

Nun war $2f$ die Schwungkraft in der Einheit der Entfernung, folglich wird der Coefficient von $\sin\psi'^2$, indem wir das Verhältniss der Schwungkraft am Aequator zur Schwere daselbst durch γ bezeichnen

$$\tfrac{5}{2}\gamma - K''$$

und wir schliessen hieraus, dass **wenn die Schwere unter dem Aequator als Einheit angenommen wird, die Zunahme der Schwere vom**

Aequator zum Pol zur Abplattung addirt, immer $\frac{5}{2}$ das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere seyn wird, wie auch das Gesetz der Dichtigkeit beschaffen seyn mag. Dieser Satz ist unter dem Namen des Clairaut'schen Theorems bekannt.

§. 369.

Wir wollen nun noch untersuchen, ob in der zweiten Potenz der Abplattung die Oberfläche der Flüssigkeit vom elliptischen Sphäroïd abweicht oder nicht. Zu diesem Ende setzen wir

$$r = q\left[1 - u\left(\Psi'' + \tfrac{1}{2}\right) - v\left(\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35}\right)\right]$$

zu welcher Voraussetzung wir berechtigt sind*, und wo u von der Ordnung der Centrifugalkraft, und v von der Ordnung des Quadrats derselben seyn wird, so dass wir also das Product uv, die Potenzen von v, und alle Potenzen von u die das Quadrat übersteigen, vernachlässigen können. Der allgemeine Ausdruck von r^m wird dann

$$r^m = q^m \left\{ \begin{array}{l} 1 - mu\left(\Psi'' + \tfrac{1}{3}\right) - mv\left(\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35}\right) \\ \qquad + \dfrac{m.m-1}{1.2} u^2 \left(\Psi'' + \tfrac{1}{3}\right)^2 \end{array} \right\}.$$

Nun ist aber aus §. 337.

$$\left(\Psi'' + \tfrac{1}{3}\right)^2 = \Psi^{IV} + \tfrac{6}{7}\Psi'' + \tfrac{1}{5}$$

also auch

$$r^m = q^m \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{mu}{3} + \tfrac{3}{35} mv + \dfrac{m.m-1}{10} uu \\ - \Psi''\left(mu - \tfrac{6}{7}\dfrac{m.m-1}{2} uu\right) \\ - \Psi^{IV}\left(mv - \dfrac{m.m-1}{1.2} u^2\right) \end{array} \right\}.$$

§. 370.

Da also in jeder beliebigen Potenz von r blos die beiden von ψ abhängenden Grössen Ψ'' und Ψ^{IV} vorkommen, so sieht man leicht, dass

$$L' = 0, \quad L''' = 0, \quad L^{V} = 0, \quad L^{VI} = 0, \quad \text{etc.}$$
$$\mathfrak{L}' = 0, \quad \mathfrak{L}''' = 0, \quad \mathfrak{L}^{V} = 0, \quad \mathfrak{L}^{VI} = 0, \quad \text{etc.}$$

werden wird. Die Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigkeit (§. 359.), reducirt sich daher auf

$$k = g\, r'r' \cos\psi'^2 + \frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^3} + \frac{L^{IV}}{r'^5} + \ldots$$
$$+ \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'' r'^2 + \mathfrak{L}^{IV} r'^4 + \ldots$$

Setzt man der Kürze wegen

$$q^m \left(1 - \frac{mu}{3} + \tfrac{3}{35}\, mv + \frac{m.\, m-1}{10}\, uu\right) = X^{(m)}$$

$$q^m \left(mu - \tfrac{6}{7}.\ \frac{m.\, m-1}{2}\, uu\right) = x^{(m)}$$

$$q^m \left(mv - \frac{m.\, m-1}{2}\, uu\right) = y^{(m)}$$

so erhält man

$$r^m = X^{(m)} - \Psi'' x^{(m)} - \Psi^{IV} y^{(m)}$$

und hierdurch (§. 357.)

$$L = \tfrac{3}{5} \int \rho.\ dX^{(3)}.$$
$$L'' = -\tfrac{2}{25} \int \rho.\ d.\ x^{(5)}.\ M''$$
$$L^{IV} = -\tfrac{2}{65} \int \rho.\ d.\ y^{(7)}.\ M^{IV}.$$

§. 371.

Es ist nun auch, wenn man statt Ψ, M setzt

$$r'^m = X^{(m)} - M'' x^{(m)} - \Psi^{IV} y^{(m)}$$

also hieraus, indem man die überflüssigen Glieder, welche zu hohe Potenzen von u und v enthalten würden, weglässt, und bemerkt, dass $x^{(m)}$ von der Ordnung der Centrifugalkraft, $y^{(m)}$ von der Ordnung ihres Quadrates ist.

$$\frac{L}{r'} = \tfrac{2}{5}\, X^{(-1)} \int \rho.\ dX^{(3)}$$
$$- \tfrac{2}{5}\, M'' x^{(-1)} \int \rho.\ dX^{(3)}$$
$$- \tfrac{2}{5}\, M^{IV} y^{(-1)} \int \rho.\ dX^{(3)}.$$

$$\frac{L''}{r'^3} = -\tfrac{2}{25}\, X^{(-3)}\, M'' \int \rho.\ d.\ x^{(5)}$$
$$+ \tfrac{2}{25}\, X^{(-3)}\, M''^2 \int \rho.\ d.\ x^{(5)}.$$

$$\frac{L^{IV}}{r'^{5}} = -\tfrac{2}{35}\, M^{IV}.X^{(-1)} \int \rho.\, d.\, y^{(7)}$$

$$\begin{aligned} g r' r' \cos \psi'^2 &= g r' r' (\tfrac{2}{3} - M'') \\ &= \tfrac{2}{3} g\, X^{(2)} - \tfrac{2}{3} g\, M'' x^{(2)} \\ &\qquad - g\, M'' X^{(2)} + g\, M''^2 x^{(2)}. \end{aligned}$$

§. 372.

An die Stelle von M''^2 kann man noch, wie aus der Betrachtung des Ausdrucks von $(\Psi'' + \tfrac{1}{3})^2$ in vorigen Paragraph sich ergiebt, den Werth

$$M^{IV} + \tfrac{4}{21}\, \Psi'' + \tfrac{4}{45}$$

setzen, und man erhält dann den Werth der Grösse

$$g\, r' r' \cos \psi'^2 + \frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^3} + \frac{L^{IV}}{r'^5}$$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{2}{3} g\, X^{(2)} + \tfrac{4}{45} g\, x^{(2)} \\ &\quad + \tfrac{2}{3} X^{(-1)} \int \rho.\, dX^{(3)} \\ &\quad + \frac{8}{25.45}\, x^{(-3)} \int \rho.\, d.\, x^{(5)} \\ &\quad - M'' \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{2}{3} x^{(-1)}. \int \rho.\, dX^{(3)} \\ &+ \tfrac{2}{25} X^{(-3)}. \int \rho.\, d\, x^{(5)} \\ &- \frac{8}{21.25}\, x^{(-3)}. \int \rho.\, d.\, x^{(5)} \\ &+ \tfrac{10}{21} g\, x^{(2)} + g\, X^{(2)} \end{aligned} \right\} \\ &\quad - M^{IV} \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{2}{3} y^{(-1)} \int \rho.\, d\, X^{(3)} \\ &- \tfrac{2}{25} x^{(-3)} \int \rho.\, d\, x^{(5)} \\ &+ \tfrac{2}{35} X^{(-5)} \int \rho.\, d.\, y^{(7)} - g\, x^{(2)} \end{aligned} \right\}: \end{aligned}$$

§. 373.

Wir haben nun noch die Grösse $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'' r'^2 + \mathfrak{L}^{IV} r'^4$, die den zweiten Theil der Gleichung des Gleichgewichts ausmacht, darzustellen. Aus §. 358. ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \int \mathfrak{R}\, dx \\ \mathfrak{L}'' &= a''\, M'' \int \mathfrak{R}''\, \Psi''\, dx \\ \mathfrak{L}^{IV} &= a^{IV}\, M^{IV} \int \mathfrak{R}^{IV}\, \Psi^{IV}\, dx \end{aligned}$$

$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2} \int \rho d.\, rr.$$
$$\mathfrak{N}'' = \int \rho.\, d.\, \log r.$$
$$\mathfrak{N}^{IV} = -\tfrac{1}{2} \int \rho.\, d.\, \frac{1}{rr}.$$

Nun ist ferner

$$r = q\,[1 - u(\Psi'' + \tfrac{1}{5}) - v(\Psi^{IV} + \tfrac{3}{35})]$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, und den einen Logarithmen in eine Reihe entwickelt

$$\begin{aligned} \log r &= \log q - u(\Psi'' + \tfrac{1}{5}) - v(\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} uu (\Psi'' + \tfrac{1}{5})^2 \\ &= \log q - \tfrac{1}{5} u + \tfrac{3}{35} v - \tfrac{1}{50} uu \\ &\quad - \Psi''(u + \tfrac{3}{7} uu) \\ &\quad - \Psi^{IV}(v + \tfrac{1}{2} uu). \end{aligned}$$

§. 374.

Eben so ist auch vermittelst der §. 370. gebrauchten Bezeichnung

$$rr = X^{(2)} - \Psi'' x^{(2)} - \Psi^{IV} y^{(2)}$$
$$\frac{1}{rr} = X^{(-2)} - \Psi'' x^{(-2)} - \Psi^{IV} y^{(-2)}$$

also wird durch die vorigen Formeln

$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2} \int \rho\, dX^{(2)} - \tfrac{1}{2} \Psi'' \int \varrho\, dx^{(2)} - \tfrac{1}{2} \Psi^{IV} \int \varrho\, dy^{(2)}$$
$$\begin{aligned} \mathfrak{N}'' &= \int \rho.\, d.\,[\log q - \tfrac{1}{5} u + \tfrac{3}{35} v - \tfrac{1}{50} uu] \\ &\quad - \Psi'' \int \rho.\, d(u + \tfrac{3}{7} uu) \\ &\quad - \Psi^{IV} \int \varrho.\, d(v + \tfrac{1}{2} uu). \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^{IV} &= -\tfrac{1}{2} \int \rho\, dX^{(-2)} + \tfrac{1}{2} \Psi'' \int \rho.\, d.\, x^{(-2)} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \Psi^{IV} \int \rho.\, d.\, y^{(-2)} \end{aligned}$$

und hieraus erhält man

$$\mathfrak{L} = \int \varrho.\, dX^{(2)}$$
$$\mathfrak{L}'' = -\frac{2}{5a''} M'' \int \rho.\, d(u + \tfrac{3}{7} uu)$$
$$\mathfrak{L}^{IV} = +\frac{1}{9a^{IV}} M^{IV} \int \varrho.\, d\, y^{(-2)}.$$

Es ist aber zu bemerken, dass diese Integrale nicht dieselben Gränzen haben, als diejenigen, welche die Grössen L, L'', L^{IV} bestimmen, und um zwischen den vorgezeichneten Integrationen Gleichheit

hervorzubringen, wollen wir die von $q=0$ bis $q=q''$ genommenen Integrale

$$\begin{aligned} \int\rho\ dX^{(2)} &= 6 \\ \int\rho\ d.(u+\tfrac{3}{7}uu) &= \delta \\ \int\rho\ d.\ y^{(-2)} &= \varepsilon \end{aligned}$$

setzen, wo daher 6, δ, ε constante Grössen sind, so dass δ von der Ordnung der ersten Potenz der Centrifugalkraft, und ε von der Ordnung ihres Quadrates ist. Dann hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \quad 6 - \int\rho\ dX^{(2)} \\ \mathfrak{L}'' &= -\frac{2}{5a''} M''\ [\delta - \int\rho.\ d(u+\tfrac{3}{7}uu)], \\ \mathfrak{L}^{IV} &= +\frac{1}{9a^{IV}} M^{IV}\ [\varepsilon - \int\rho.\ d\,y^{(-2)}]. \end{aligned}$$

wo die Integrale zwischen denselben Gränzen, als die zur Bestimmung von L, L'', L^{IV} dienenden, nämlich von $q=0$ bis $q=q'$, genommen werden müssen.

§. 375.

Aus §. 370. sieht man, dass

$$\begin{aligned} r'r' &= X^{(2)} - M''x^{(2)} - M^{IV}y^{(2)}, \\ r'^4 &= X^{(4)} - M''x^{(4)} - M^{IV}y^{(4)}, \end{aligned}$$

folglich wird mit Vernachlässigung derjenigen Glieder die das Quadrat der Centrifugalkraft übersteigen

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}''r'r &= -\tfrac{2}{5}M''\ X^{(2)}\ [\delta - \int\rho.\ d(u+\tfrac{3}{7}uu)] \\ &\quad + \tfrac{2}{5}M''^2 X^{(2)}\ [\delta - \int\rho.\ d(u+\tfrac{3}{7}uu)] \\ \mathfrak{L}^{IV}r'^4 &= \quad \tfrac{1}{9}M^{IV}\ X^{(4)}\ [\varepsilon - \int\rho.\ d\,y^{(-2)}]. \end{aligned}$$

Setzt man hierin statt M''^2 seinen Werth

$$M^{IV} + \tfrac{4}{21}M'' + \tfrac{4}{45}$$

so erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L} + \mathfrak{L}''r'^2 + \mathfrak{L}^{IV}r'^4 \\ &= 6 - \int\rho\ d\ X^{(2)} \\ &\qquad + \tfrac{8}{225}x^{(2)}\ [\delta - \int\rho.\ d(u+\tfrac{3}{7}uu)] \\ &\quad - M'' \left\{ \begin{aligned} &+ \tfrac{2}{5}\ X^{(2)}\ [\delta - \int\rho.\ d.(u+\tfrac{3}{7}uu)] \\ &- \tfrac{8}{105}\ x^{(2)}\ [\delta - \int\rho.\ d.(u+\tfrac{3}{7}uu)] \end{aligned} \right\} \\ &\quad + M^{IV} \left\{ \begin{aligned} &+ \tfrac{2}{5}\ x^{(2)}\ [\delta - \int\rho.\ d(u+\tfrac{3}{7}uu)] \\ &+ \tfrac{1}{9}\ X^{(4)}\ [\varepsilon - \int\rho.\ d\,y^{(-2)} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

§. 376.

Man sieht aus dieser und der Gleichung §. 372., dass man folgende Formen erhält

$$g r' r' \cos\psi'^2 + \frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^3} + \frac{L^{IV}}{r'^5}$$
$$= \mathfrak{A} - \mathfrak{B} M'' - \mathfrak{C} M^{IV},$$
$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'.\, r' r' + \mathfrak{L}'.\, r^4$$
$$= \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}' M'' + \mathfrak{C}' M^{IV},$$

folglich wird die Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigkeit §. 370.

$$k = (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') - M''(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}') - M^{IV}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}').$$

Setzt man hierin

$$M'' = \sin\psi'^2 - \tfrac{1}{3}$$
$$M^{IV} = \sin\psi'^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi'^2 + \tfrac{3}{35}$$

so wird dieselbe, indem man sie nach den Potenzen von $\sin\psi'$ ordnet, folgende Gestalt erhalten:

$$k = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'}{3} - 3\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{35}$$
$$- \sin\psi'^2 \left[\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' + 6\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{7}\right]$$
$$- \sin\psi'^4 (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')$$

und da k von ψ' völlig unabhängig seyn muss, so wird

$$k = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'}{3} - 3\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{35}$$
$$0 = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}' + 6\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{7}$$
$$0 = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}'.$$

Diese Gleichungen reduciren sich auf

$$k = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$$

von denen die beiden letztern zur Bestimmung von u und v dienen.

§. 377.

Die Werthe von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ finden sich, indem man immer die höhern Potenzen, die nicht mit in Betracht gezogen werden sollen, vernachlässigt

$$\mathfrak{C} = \tfrac{2}{5}.\ \frac{1}{q^6}.\ \int \rho.\ d.\ q^7 (v - 3uu)$$
$$+ \tfrac{6}{5}.\ \frac{u}{q^3} \int \rho.\ d.\ q^6 u - 2gqqu$$
$$- \tfrac{3}{5}.\ \frac{v + uu}{q}.\ \int \rho.\ d.\ q^3.$$

$$\mathfrak{C}' = \tfrac{4}{5}\, qq.\ u\, [\delta - \int \rho\ du]$$
$$- \tfrac{3}{5}\, q^4 \left[\varepsilon + 2 \int \rho.\ d\ \frac{v + \frac{3}{2}\, uu}{qq}\right].$$

$$\mathfrak{B} = - \tfrac{2}{5}.\ \frac{u}{q} \int \rho.\ d.\ q^3 - \tfrac{4}{7} \frac{uu}{q} \int \rho.\ d.\ q^3$$
$$+ \tfrac{2}{5}.\ \frac{u}{q} \int \rho.\ d.\ q^3 u + \tfrac{2}{5} \frac{1}{q^3} \int \rho.\ d.\ q^6 u$$
$$+ \tfrac{6}{35}.\ \frac{u}{q^3} \int \rho.\ d.\ q^6 u - \tfrac{6}{7} \frac{1}{q^3} \int \rho.\ d.\ q^6 uu$$
$$+ \tfrac{2}{7}.\ gugq + gqq.$$

$$\mathfrak{B}' = + \tfrac{2}{5}\, qq\ [\delta - \int \rho\ du - \tfrac{3}{7} \int \rho.\ d.\ u^2]$$
$$- \tfrac{20}{21} qqu\ [\delta - \int \rho.\ du).$$

§. 378.

Diese Gleichungen $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ lassen sich nun freilich nicht integriren, allein man kann aus denselben doch zeigen, dass die Schichten **nicht** elliptische Sphäroïde bilden, wenn man die zweite Potenz der Abplattung mit berücksichtigt. Bezeichnet man nämlich durch α die Abplattung eines elliptischen Sphäroïds, den Radius Vector, der mit dem Aequator den Winkel ψ macht, durch r, und die halbe grosse Axe desselben durch q, so ist nach §. 347.

$$r = q\, [1 - \alpha \sin \psi^2 - \tfrac{3}{2}\, \alpha\alpha \sin \psi'^2 \cos \psi'^2].$$

Wir hatten §. 369. angenommen, die Gleichung irgend einer Schicht von constanter Dichtigkeit werde durch

$$r = q\, [1 - u\, (\Psi'' + \tfrac{1}{3}) - v\, (\Psi^{IV} - \tfrac{3}{35})]$$

ausgedrückt, also wenn man statt Ψ'', Ψ^{IV} ihre Werthe (§. 376.)

$$\Psi'' = \sin\psi^2 - \tfrac{1}{3}$$
$$\Psi^{IV} = \sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi^2 + \tfrac{3}{35}$$

tzt, so kommt

$$r = q\,[1 - u\sin\psi^2 - v(\sin\psi^4 - \tfrac{6}{7}\sin\psi^2)].$$

n diese Gleichung auf die Form der vorigen zu ingen, schreibe man sie so:

$$r = q\,[1 - (u + \tfrac{1}{7}v)\sin\psi^2 + v\sin\psi^2\cos\psi^2].$$

wird daher, wenn man diese mit der vorigen eichung vergleicht

$$u + \tfrac{1}{7}v = \alpha, \qquad v = -\tfrac{3}{2}\alpha\alpha.$$

Sollte also die Oberfläche der Schichten von gleier Dichtigkeit ein elliptisches Sphäroïd seyn, so üsste zwischen den Coefficienten u und v die Retion

$$v + \tfrac{3}{2}uu = 0$$

att finden, und die Gleichung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ würde durch e Substitution des hieraus folgenden Werthes von identisch werden.

§. 379.

Setzt man für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ ihre Werthe aus §. 377. die Gleichung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, so wird dieselbe, indem gleich $v = -\tfrac{3}{2}uu$ genommen wird, und man beerkt, dass unter dieser Voraussetzung auch ε Null yn muss, da diese Constante den Werth des dabei ehenden Integrals ausdrückt, welches in unserm ll allgemein Null ist

$$-\frac{1}{q^5}\int\rho.\,d.\,q^7uu + \tfrac{6}{5}.\frac{u}{q^3}\int\rho.\,d.\,q^6u$$
$$-2g\,qqu + \tfrac{1}{5}.\frac{uu}{q}\int\rho.\,d.\,q^5$$
$$= \tfrac{4}{5}qqu\,\delta - \tfrac{4}{5}qqu\int\rho\,du.$$

Die Gleichung $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0$ giebt, wenn man für und $\mathfrak{B}'$ ihre Werthe substituirt, und die höhern tenzen von u, so wie das Product ug, vernachisigt

$$-\tfrac{2}{3}.\frac{u}{q}\int\rho.\,d.\,q^3 + \tfrac{2}{5}.\frac{1}{q^3}.\int\rho.\,d.\,q^6u$$
$$+ g\,qq = -\tfrac{2}{5}qq\delta + \tfrac{2}{5}qq\int\rho\,du$$

ultiplicirt man diese Gleichung mit $2u$, und addirt

das Product zur vorigen, so kommt, indem zugleich durch q^5 multiplicirt worden ist,

$$\int \rho.\ d.\ q^7 uu - 2uqq \int \rho.\ d.\ q^5 u + uuq^4 \int \rho.\ d.\ q^3 = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht, wie man leicht bemerkt, dann Genüge, wenn die Dichtigkeit als constant angenommen wird, so dass daher eine homogene Flüssigkeit gewiss ein elliptisches Sphäroïd im Zustande des Gleichgewichts bildet, wie auch schon allgemein §. 292. bewiesen worden.

Man setze der Kürze wegen $uqq = x$, $\rho qq = y$, so lässt sich vorige Gleichung auch so schreiben

$$3\int yxxdq + 2\int yxqdx - 6x\int yxdq - 2x\int yqdx + 3xx\int ydq = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so wird

$$3x\int ydq = 3\int yxdq + \int yqdx.$$

Durch die zweite Differentiation erhält man

$$3\int ydq = yq,$$

und wenn zum dritten Male differentiirt wird

$$2ydq = qdy$$

oder indem wir durch qy dividiren

$$\frac{2dq}{q} = \frac{dy}{y}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist bekanntlich

$$\log y = \log c + \log qq$$

also auch $y = cqq$, wo c eine constante Grösse bedeutet. Nun war aber zugleich $y = \rho qq$, folglich $\rho = c$, und wir müssen aus dieser Analyse schliessen, dass nur in dem Falle, wo eine Flüssigkeit homogen ist, im Zustande des Gleichgewichts, dieselbe, während sie um eine Axe sich dreht, die Gestalt eines elliptischen Sphäroïds annehmen wird.

§. 380.

Wir wollen als ein Beispiel, über den Zusammenhang der Abplattung und der halben grossen Axe der Schicht, eine Hypothese aufstellen, die viel wahrscheinliches für sich hat. Es ist nämlich durch Canton's Versuche ausgemacht worden, dass durch starken Druck das Volumen der Flüssigkeit wirklich verringert wird, folglich ihre Dichtigkeit zunimmt;

bezeichnen wir den Druck durch p, die Dichtigkeit durch ρ, so wollen wir annehmen, es sey

$$dp = \frac{4\pi}{66} \rho d\rho$$

wo 6 eine constante Grösse bedeutet, und man sieht daraus, dass die Zunahme der Dichtigkeit, die durch eine bestimmte Vermehrung des Drucks hervorgebracht wird, desto kleiner ausfällt, je grösser die Dichtigkeit schon geworden ist. Wäre $6 = 0$, so würde das Fluidum nicht zusammendrückbar seyn. Bezeichnet man die Dichtigkeit an der Oberfläche, wo $p = 0$ ist, durch ρ', so hat man durch Integration der vorigen Differentialgleichung

$$p = \frac{2\pi}{66} (\rho\rho - \rho'\rho').$$

Nun ist, wenn wir die auf alle Theilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte nach den drei Axen zerlegt, durch P, Q, R bezeichnen, aus. 290.

$$dp = \rho (Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta)$$

also auch, wenn auf beiden Seiten durch ρ dividirt und dann integrirt wird,

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int (Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta).$$

In unserm Fall haben wir aber

$$\int (Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta) = V + fr'r' \cos\psi^2$$

und da ausserdem (§. 356.)

$$V + fr'r' \cos\psi'^2 = c = 2k\pi$$

so wird auch

$$2k\pi = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{4\pi}{66} \rho + Const.$$

§. 381.

Nun ist ferner, wenn wir alle von der Schwungkraft abhängenden Glieder vernachlässigen, aus §. 359.

$$k = \frac{2Q}{q} + 2\mathfrak{M} - 2\Omega$$

oder da aus §. 357 und 358.

$$Q = \int \rho\, qqdq, \qquad \Omega = \int \rho\, qdq$$

$$k = \frac{2\int \rho\, qqdq}{q} + 2\mathfrak{M} - 2\int \rho\, qdq,$$

Differentiirt man diese Gleichung, und bemerkt, dass 𝔐 eine constante Grösse ist, so kommt

$$dk = -\frac{2dq}{qq}\int\varrho\, qqdq$$

oder da aus vorigem Paragraph

$$dk = \frac{2}{\beta\beta}\,d\rho$$

so kommt auch

$$d\varrho + \frac{\beta\beta dq}{qq}\int\varrho\, qqdq = 0.$$

Man setze $\rho = \frac{\omega}{q}$, so wird

$$d\varrho = \frac{qd\omega - \omega dq}{qq} \text{ also}$$

$$qd\omega - \omega dq + \beta\beta dq\int\omega qdq = 0.$$

Nimmt man hiervon das Differential, indem dq als constant betrachtet wird, so erhält man

$$dd\omega + \beta\beta\omega\, dq^2 = 0.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten durch $2d\omega$ und integrirt dann, so wird

$$d\omega^2 + \beta\beta\omega\omega.\, dq^2 = \beta\beta aa\, dq^2$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Hieraus erhält man

$$\beta dq = \frac{d\omega}{\sqrt{aa - \omega\omega}}$$

von welcher Gleichung bekanntlich das Integral

$$\beta q + b = Arc\ sin = \frac{\omega}{a}$$

ist, und b eine Constante bedeutet. Dieser Ausdruck lässt sich auch so schreiben

$$\omega = a \sin(b + \beta q)$$

folglich, wenn auf beiden Seiten durch q dividirt, und statt $\frac{\omega}{q}$ sein Werth ρ gesetzt wird

$$\rho = \frac{a. \sin(b + \beta q)}{q}.$$

Die Constante b muss Null seyn, weil sonst für $q = 0$ im Mittelpunkte der Erde eine unendlich grosse Dichtigkeit statt finden würde, so dass

$$\rho = a. \frac{\sin \beta q}{q}.$$

An der Oberfläche sey die Dichtigkeit $= \rho'$, und der Werth von $q = q''$; es muss daher

$$\rho' = a \frac{\sin \beta q''}{q''}.$$

werden, und vermittelst dieser Gleichung lässt sich a eliminiren. Man erhält dann

$$\rho = \rho' \frac{\sin \beta q}{\sin \beta q''}. \frac{q''}{q}.$$

§. 382.

Die ganze Masse der Erde wird durch $4\pi \int \rho\, qqdq$ ausgedrückt; indem man die von der Abplattung abhängenden Glieder weglässt. Bezeichnet man also die mittlere Dichtigkeit der Erde durch ρ°, so wird

$$4\pi \int \rho\, qqdq = 4\pi\, \rho^{\circ} \int qqdq$$

oder

$$\int \rho\, qqdq = \tfrac{1}{3} \rho^{\circ}\, q''^{3}.$$

Nun ist aber, wenn wir den vorigen Werth von ρ nehmen

$$\int \rho\, qqdq = \rho' \frac{q''}{\sin \beta q''}. \int q. \sin \beta q. dq$$

$$= \rho' \frac{q''}{\sin \beta q''} \left[- \frac{q'' \cos \beta q''}{\beta} + \frac{\sin \beta q''}{\beta\beta} \right]$$

indem das Integral von $q = 0$ bis $q = q''$ genommen wird. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\rho^{\circ}}{\rho'} = \frac{3}{\beta\beta q'' q''} \left[1 - \frac{q'' \beta}{\tang q'' \beta} \right].$$

§. 383.

Die zur Bestimmung der Abplattung u dienende Gleichung ist $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0$, oder (§. 379.)

$$- \frac{2}{3}. \frac{u}{q} \int \rho. d. q^{5} + \tfrac{2}{5}. \frac{1}{q^{3}} \int \rho. d. q^{5} u$$

$$+ gqq = - \tfrac{2}{5} qq\delta + \tfrac{2}{3} qq \int \rho\, du.$$

Durch fortgesetzte Differentiation wird dieselbe

$$\left(\frac{ddu}{dq^2} - 6\frac{u}{qq}\right) \int \rho .\ qqdq$$

$$+ 2\varrho\, q \left(u + \frac{qdu}{dq}\right) = 0.$$

Man setze, um diese Gleichungen zu integriren

$$u. \int \rho .\ qqdq = t$$

so wird

$$\frac{du}{dq} \int \varrho\ qqdq + u\rho qq = \frac{dt}{dq}$$

$$\frac{ddu}{dq^2} \int \rho\ qqdq + 2\frac{du}{dq}\ \rho qq + \frac{d\varrho}{dq} uqq + 2u\varrho q = \frac{ddt}{dq^2}$$

also aus dieser letztern Gleichung

$$\frac{ddu}{dq^2} \int \rho\ qqdq + 2\frac{du}{dq}\ \rho qq + 2u\rho q$$

$$= \frac{ddt}{dq^2} - \frac{d\rho}{dq}\ uqq$$

und die vorige Gleichung lässt sich so schreiben

$$\frac{ddt}{dq^2} - \frac{d\varrho}{dq} .\ uqq - \frac{6t}{qq} = 0.$$

Nun ist aber vermöge des Ausdrucks §. 381.

$$d\rho + \frac{66}{qq}\ dq \int \rho .\ qqdq = 0.$$

wenn man durch $\frac{dq}{uqq}$ dividirt,

$$\frac{d\rho}{dq}\ uqq + 66.\ u \int \rho\ qqdq = 0$$

und da $u \int \varrho\ qqdq = t$, so wird

$$\frac{d\rho}{dq}\ uqq = -\ 66t.$$

Man hat daher die Gleichung

$$\frac{ddt}{dq^2} - \frac{6t}{qq} + 66t = 0.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, indem man annimmt, es sey

$$t = A\left(1 - \frac{3}{\beta\beta qq}\right) \sin \beta q + A . \frac{3}{\beta q} \cos \beta q$$

wo A eine willkührliche Constante bedeutet.

§. 384.

Um diese Constante zu bestimmen, setzen wir zuerst statt t seinen Werth $u \int \rho\; qqdq$, und nehmen der Kürze wegen

$$\beta q = x, \quad \frac{\varrho' q''}{\sin \beta q''} = \Delta, \quad \text{so wird}$$

$$u \int \rho\; qqdq = A . \sin x - \frac{3A}{xx} (\sin x - x . \cos x).$$

Den Werth von $\int \varrho\; qqdq$ erhält man aus §. 382.

$$\int \rho\; qqdq = \frac{\Delta}{\beta\beta} (\sin x - x . \cos x)$$

folglich kommt

$$u = \frac{A\beta\beta}{\Delta} . \frac{\sin x}{\sin x - x . \cos x} - \frac{3A\beta\beta}{\Delta xx} .$$

§. 385.

Die Gleichung $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = 0$ (§. 383.), lässt sich nun so schreiben

$$- u \int \rho\; qqdq + \tfrac{1}{5} . \frac{1}{qq} \int \varrho . d . q^5 u + \tfrac{1}{2} g q^3$$
$$= - \tfrac{1}{6} q^3 \left[\delta - \int \rho\; du\right]$$

aus welcher sich A bestimmen lassen muss. Da nun diese Grösse constant ist, so brauchen wir die vorige Gleichung nur in einem besondern Falle zu betrachten, und wir wollen annehmen, die in derselben vorkommenden Integrale werden bis zur Oberfläche der Erde ausgedehnt; dann ist bekanntlich

$$\delta - \int \rho\; du = 0$$

weil δ das von $q = 0$ bis an die Oberfläche genommene Integral $\int \rho\; du$ ausdrückt. Es wird daher hinreichen, die Gleichung

$$- u \int \rho\; qqdq + \tfrac{1}{5} . \frac{1}{qq} \int \rho . d . q^5 u + \tfrac{1}{2} g q^3 = 0$$

zu nehmen, oder wenn wir den an der Oberfläche statt findenden Werth von u durch u' bezeichnen, und den correspondirenden Werth von x durch x', so dass $x' = 6q''$, so wird

$$-u' + \frac{\int \rho.\, d.\, q^5 u}{5q''q'' \int \rho\; qqdq} + \tfrac{1}{2}.\, \frac{gq''^6}{\int \rho qqdq} = 0.$$

§. 386.

Nun ist aus §. 368., $2fq''$ oder $4\pi gq''$ die Schwungkraft am Aequator, und die Schwere daselbst $\frac{4\pi \int \rho\; qqdq}{q'q''}$, indem wir die der Schwungkraft proportionalen Glieder vernachlässigen, folglich das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere unter dem Aequator $\quad \gamma = \frac{gq''^3}{\int \rho\; qqdq}$

also ist das letzte Glied der vorigen Gleichung nichts anders als $\frac{1}{2}\gamma$, und man kann dieselbe so schreiben

$$\frac{\int \rho.\, d.\, q^5 u}{q''q'' \int \rho\; qqdq} = 5u' - \tfrac{5}{2}\gamma$$

Man hat ferner

$$\int \rho.\, d.\, q^5 u = \rho' q''^5 u' - \int q^5 u\, d\rho$$

und da (§. 381.)

$$d\rho = -\frac{66dq}{qq}.\int \rho\; qqdq, \quad \text{so wird}$$

$$\int q^5 u\, d\rho = -\int 66\; q^3 dq.\; u \int \rho\; qqdq$$
$$= -\frac{1}{6^2}\int x^3 dx.\; u \int \rho\; qqdq.$$

Setzt man statt $u \int \rho\; qqdq$ seinen Werth aus §. 384., so erhält man

$$\int q^5 u\; d\rho = -\frac{A}{66}\int x^3 \sin x\; dx$$
$$+ \frac{3A}{66}\int x\; dx \sin x$$
$$+ \frac{3A}{66}\int x^2 \cos x\; dx$$
$$= \frac{A}{66}\,[x'.\cos x'(x'^2 - 15) - 3\sin x'(2x'^2 - 5)]$$

indem man das Integral von $x = 0$ bis $x' = x$ ausdehnt. Ferner hat man

$$\varrho = \Delta . \frac{\sin \beta q}{q}, \quad \varrho' = \Delta . \frac{\beta \sin x'}{x'}$$

$$u' = \frac{A\beta\beta}{\Delta} \frac{\sin x'}{\sin x' - x' \cos x'} - \frac{3A\beta\beta}{\Delta x'x'}$$

also da auch $q''^6 = \frac{x'^6}{\beta^6}$, so wird

$$\varrho' q''^6 u' = \frac{A}{\beta\beta} \left[\frac{x'^4 \sin x'^2}{\sin x' - x' \cos x'} - 3x'^3 \sin x' \right]$$

und hieraus

$$\int \varrho . \, d . \, q^5 u = \frac{A}{\beta\beta} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x'^4 \sin x'^2}{\sin x' - x' \cos x'} \\ - x' \cos x' (x'^2 - 15) \\ + 3 \sin x' (x'^2 - 6) \end{array} \right\}.$$

Auf gleiche Weise wird ferner

$$q''q'' \int \varrho . \, qqdq = \frac{\Delta x'x'}{\beta^4} (\sin x' - x' \cos x'),$$

$$5u'q''q'' \int \varrho . \, qqdq = \frac{6A}{\beta\beta} x'x' \sin x' - \frac{15A}{\beta\beta} (\sin x' - x' \cos x'),$$

und nach den gehörigen Zusammenziehungen findet man leicht

$$A = \frac{5\Delta\gamma}{2\beta\beta} . \frac{(\sin x' - x' \cos x')^2}{\sin x'^2 - x' \cos x' \sin x' - x'x'}.$$

Nun war

$$u' = \frac{A\beta\beta}{\Delta} . \frac{\sin x' (x'x' - 3) + 3x' \cos x'}{\sin x' - x' \cos x'}$$

folglich wenn man hierin den Werth von A substituirt

$$u' = \tfrac{5}{2}\gamma \frac{(\sin x' - x' \cos x') [\sin x' (3 - x'x') - 3x' \cos x']}{x'x' (x'x' + x' \cos x' \sin x' - 2 \sin x'^2)}.$$

wodurch der Ausdruck der Abplattung an der Oberfläche gefunden ist.

§. 387.

Die Untersuchung der Messungen der Pendellängen wird zeigen, dass die Abplattung der Grösse γ so nahe als möglich kommt. Nehmen wir daher an,

dass bei der Beschaffenheit des Innern der Erde, die §. 380. gemachte Hypothese über den Zusammenhang des Drucks mit der Dichtigkeit, wirklich statt hat, so werden wir x' aus voriger Gleichung bestimmen können, indem wir $u' = \gamma$ setzen. Wir erhalten dann die Gleichung

$$\frac{(\sin x' - x' \cos x')\,[\sin x'(3 - x'x') - 3x' \cos x']}{x'x'(x'x' + x' \cos x' \sin x' - 2 \sin x'^2)} = \tfrac{3}{8},$$

welche nur durch Probiren aufgelöst werden kann. Der Werth $x' = \frac{5}{6}\pi$ leistet dieser Gleichung sehr nahe Genüge, so dass also $q''6 = \frac{5}{6}\pi$ seyn wird.

Die mittlere Dichtigkeit ρ^0 findet sich

$$= \rho'.\ 1{,}814;$$

die Dichtigkeit im Mittelpunkte $= \rho'.\ 3{,}332$.

Die Abplattung der Schicht die zunächst um den Mittelpunkt herum liegt, ergiebt sich aus der Formel (§. 384.)

$$u = \frac{A66}{\Delta}\left(\frac{\sin x}{\sin x - x \cos x} - \frac{3}{xx}\right)$$

indem in derselben $x = 0$ gesetzt wird. Allein das Resultat wird unter dieser Form unbestimmt, und um den wahren Werth zu erhalten, müssen wir diesen Ausdruck in Reihen entwickeln. Wir können den veränderlichen Theil

$$\frac{\sin x}{\sin x - x \cos x} - \frac{3}{xx}$$

auch so schreiben

$$\frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5}{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5} - \frac{3}{xx}$$

und dies wird, indem man beide Brüche auf einerlei Benennung bringt, die gemeinschaftlichen Factoren des Zählers und des Nenners wegwirft, und dann x Null setzt, $= -\frac{1}{5}$, folglich wird die Abplattung im Mittelpunkte der Erde

$$= -\frac{A66}{5\Delta}$$

und wenn man statt A seinen Werth aus §. 386. setzt

$$= \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{(\sin x' - x' \cos x')^2}{x'x' + x' \cos x' \sin x' - 2 \sin x'^2}.$$

In dem hier betrachteten Fall ist $x' = \frac{3}{4}\pi$, also die Abplattung der mittelsten Schicht

$$= \frac{\gamma}{2} \quad \frac{\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}\pi)^2}{\frac{9}{16}\pi\pi - \frac{3}{8}\pi - 1} = \frac{1}{345}$$

indem man $\gamma = \frac{1}{288}$ annimmt. Die Abplattung der Schichten wächst also vom Mittelpunkt nach der Oberfläche.

§. 388.

Nimmt man für die Abplattung u, den aus den Gradmessungen abgeleiteten Werth $= \frac{1}{298}$; so erhält man ziemlich genau $x' = \frac{19}{24}\pi = 142^\circ\, 30'$.

Hieraus ergiebt sich die mittlere Dichtigkeit

$$\rho^\circ = \varrho' . 2{,}057,$$

die Dichtigkeit im Mittelpunkte

$$= \varrho' \frac{x'}{\sin x'} = 4{,}087.$$

Nimmt man β unendlich klein, welches dann statt findet, wenn die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist (§. 380.), so geht die Formel für u, da dann auch x unendlich klein wird

$$u = \frac{A\beta\beta}{\Delta} \left\{ \frac{\sin x}{\sin x - x \cos x} - \frac{3}{xx} \right\}$$

in diese über

$$u = -\frac{A\beta\beta}{5\Delta}.$$

Eben so giebt der Ausdruck von A (§. 386.)

$$A = \frac{5}{4} \frac{\Delta\gamma}{\beta\beta} \quad \frac{(\sin x' - x' \cos x')^2}{2 \sin x'^2 - x' \cos x' . \sin x' - x'x'}$$

indem man x' ebenfalls unendlich klein annehmen muss

$$A = -\frac{25}{4} . \frac{\Delta\gamma}{\beta\beta}$$

folglich, wenn man diesen Werth in vorigen Ausdruck von u substituirt

$$u = \frac{5}{4}\gamma$$

also beträgt im Fall der Homogenität der Flüssigkeit, die Abplattung jeder Schicht derselben, $\frac{5}{2}$ des Verhältnisses der Schwungkraft zur Schwere am Aequator.

§. 389.

Wir wollen jetzt noch das Gesetz der Schwere betrachten, welches in geringen Entfernungen über und unter der Erdoberfläche statt findet. Es bezeichne Γ die Schwere, welche für einen Punkt statt findet, der die Entfernung r' vom Mittelpunkt hat, und welcher an der Umdrehung der Erde Theil nimmt, also der Wirkung der Centrifugalkraft unterworfen ist, so hat man aus §. 364.

$$\Gamma = -\left(\frac{dV}{dr'}\right) - 2fr' \cos \psi'^2$$

wo ψ' die geographische Breite des Punktes bedeutet, und

$$V = 2\pi \left[\frac{L}{r'} + \frac{L''}{r'^3} + \mathfrak{L} + \mathfrak{L}''r'^2\right]$$

seyn wird.

Im Fall der Körper über der Erdoberfläche sich befindet, muss $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{L}'' = 0$ seyn, und dann haben wir schon aus §. 367. den Werth von

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{r'r'}\int \rho\, qqdq + \tfrac{4}{5}\cdot\frac{\pi}{r'r'}\int \rho.\ d.\ q^5 K''$$
$$+ \frac{3q''^2 M''}{r'^4}\left[4K''\pi \int \rho\, qqdq - 2\pi g q''\right],$$

wo die Integrale von $q = 0$ bis $q = q''$ genommen werden müssen. Hieraus ergiebt sich, indem wir für M'' seinen Werth, $\sin \psi''^2 - \frac{1}{3}$, und für $2\pi g$, f setzen

$$\Gamma = \frac{4\pi}{r'r'}\int \rho\, qqdq - \frac{4\pi}{3r'r'}\int \rho.\ d.\ q^5 K''$$
$$+ \frac{q''q''}{r'^4}\left[4K''\pi \int \rho.\ qqdq - fq''^3\right] - 2fr'$$
$$- \frac{3q''q''}{r'^4}\sin \psi'^2\left[4K''\pi \int \rho\, qqdq - fq''^3\right]$$
$$+ 2fr' \sin \psi'^2.$$

§. 390.

Nun sey $q''l$ die Höhe des Gegenstandes über der Oberfläche, und R der Halbmesser der Erde für den

jenigen Punkt der Oberfläche, über welchem sich der Gegenstand befindet, so wird $r' = R + q''l$, $R = q''(1 - K'' \sin \psi'^2)$, und man kann das Verhältniss l der Höhe zum Halbmesser der Erde, immer von der Ordnung der Centrifugalkraft oder der Abplattung annehmen, da alle Erhöhungen und Vertiefungen an der Oberfläche der Erde gegen ihren Halbmesser genommen, sehr gering sind. Hieraus folgt, dass das Quadrat von l, so wie die Producte $K''l$, fl vernachlässigt werden müssen. Man wird daher in allen Gliedern des Werthes von Γ, das erste ausgenommen, statt r', q'' setzen können. Für das erste erhält man

$$\frac{1}{r'r'} = \frac{1}{q''^2(1 - K'' \sin \psi'^2 + l)^2}$$
$$= \frac{1}{q''^2} + \frac{2(K'' \sin \psi'^2 - l)}{q''^2}$$

folglich auch

$$\Gamma = \frac{4\pi}{q''q''} \int \rho\, qqdq - \frac{4\pi}{3q''q''} \int \rho .\, d.\, q^5 K''$$
$$+ \frac{4K\pi}{q''q''} \int \rho\, qqdq - 3fq''$$
$$+ \sin \psi'^2 \left[5fq'' - \frac{4\pi K''}{q''q''} \int \rho\, qqdq\right]$$
$$- \frac{8\pi l}{q''q''} . \int \rho\, qqdq.$$

Nun sey an der Oberfläche der Erde, wo $l = 0$ ist, die Schwere $= G$, so hat man auch

$$\Gamma = G - \frac{8\pi l}{q''q''} \int \rho\, qqdq$$

oder da, wenn man die von der Centrifugalkraft abhängenden Glieder vernachlässigt,

$$G = \frac{4\pi}{q''q''} . \int \rho .\, qqdq$$

wird, so erhält man, indem man durch Hülfe dieser Gleichung das Integral $\int \rho\, qqdq$ eliminirt

$$\Gamma = G - 2lG$$

Hieraus folgt, dass wenn man die in einer bestimmten Höhe statt findende Schwere aus der an

der Oberfläche der Erde finden will, man die letztere mit dem doppelten Verhältniss der Höhe zum Halbmesser der Erde multipliciren, und dies Product von der an der Oberfläche statt findenden Schwere abziehen muss.

§. 391.

Ist der angezogene Körper so weit entfernt, dass er nicht mit an der umdrehenden Bewegung der Erde Theil nimmt, so muss man in dem Ausdruck von Γ (§. 389.) das von der Centrifugalkraft herrührende Glied $2fr' \cos \psi'^2$ weglassen, so dass $\Gamma = -\left(\frac{dV}{dr'}\right)$ wird. Wenn ausserdem die Entfernung r' gegen den Halbmesser q'' sehr gross ist, so darf man alle Glieder des Ausdrucks von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, die durch höhere Potenzen von r', als die zweite, dividirt sind, vernachlässigen, und es bleibt dann

$$\Gamma = \frac{4\pi}{r'r'} [\int \varrho\, qqdq - \tfrac{1}{3} \int \varrho .\, d.\, q^3 K''].$$

Man findet aber aus den frühern Untersuchungen leicht, dass der Ausdruck

$$4\pi\, [\int \rho\, qqdq - \tfrac{1}{3} \int \varrho .\, d.\, q^3 K'']$$

die Masse der Erde bedeutet, folglich wird die Anziehung der Erde auf sehr entfernte Punkte, ihrer Masse direct, und dem Quadrat der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt der Erde, umgekehrt proportional seyn.

§. 392.

Für die Schwere im Innern der Erde, muss zu dem in §. 389. gegebenen Ausdruck von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, noch ein durch die Differentiation der Grösse $2\pi \mathfrak{L}'' r'^2$ noch r' entstehendes Glied $4\pi \mathfrak{L}'' r'$ hinzutreten. Es ist aber aus §. 358.

$$\mathfrak{L}'' = a'' M'' \int \mathfrak{U}'' \Psi'' dx$$

und da ausserdem nach §. 360.

$$\int \mathfrak{U}'' \Psi'' dx = \frac{2}{5a''} \int \rho . \, dK''$$

so wird das hinzuzufügende Glied

$$\frac{8\pi}{5} r' . \int \rho . \, dK''$$

seyn, und man erhält, indem man diese Grösse zu dem §. 366. gegebenen Werthe von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$ hinzusetzt

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = - \frac{4\pi \int \rho \, qqdq}{r'r'} + \tfrac{4}{3} \pi \frac{\int \rho . \, d. \, q^3 K''}{r'r'}$$

$$+ \frac{12\pi}{5} M'' \frac{\int \rho . \, d. \, q^5 K''}{r'^4} + \frac{8\pi}{5} r' M'' \int \rho \, dK''.$$

Man muss aber hierbei bemerken, dass die Integrale von $q = 0$ bis zu dem Werthe von q genommen werden müssen, der derjenigen Schicht entspricht, auf welcher der angezogene Punkt sich befindet. Da wir aber annehmen, dass die Tiefe des Punktes unter der Erdoberfläche, im Verhältniss zum Halbmesser der Erde, blos von der Ordnung der Centrifugalkraft seyn soll, so ist einleuchtend, dass die auf die angegebene Weise genommenen Integrale, von den vollständigen, welche zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q = q''$ genommen werden, blos um eine Grösse verschieden seyn werden, deren Ordnung der der Centrifugalkraft gleich kommt. Man wird daher in allen Gliedern des Ausdrucks von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, das erste ausgenommen, die Integrationen von $q = 0$ bis $q = q''$ ausdehnen dürfen; ausserdem kann man in denselben Gliedern sogleich statt r', q'' setzen, so dass

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = - \frac{4\pi}{r'r'} \int \rho \, qqdq + \frac{4\pi}{3q''q''} \int \rho . \, d. \, q^3 K''$$

$$+ \frac{12\pi M''}{5q''^4} \int \rho . \, d. \, q^5 K''$$

wird, indem zwischen den besagten Gränzen das Integral $\int \rho \, dK''$ den Werth Null erhält (§. 367.).

§. 393.

Nimmt man aus §. 367. die Gleichung

$$\tfrac{1}{5}\int\rho.\ d.\ q^5 K'' = K'' q''^2 \int\rho\ qqdq - \tfrac{1}{5} g q''^5$$

und eliminirt durch ihre Hülfe aus vorigem Ausdruck das Integral $\int\rho.\ d.\ q^5 K''$, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{r'r'}\int\rho\ qqdq + \frac{4\pi}{3q''q''}\int\rho.\ d.\ q^5 K''$$

$$+ \frac{12\pi\ M''K''}{q''q''}\int\rho\ qqdq - 6\pi g M'' q''.$$

Es sey nun $q''(1-\lambda)$ die halbe grosse Axe derjenigen Schicht, auf welcher sich der angezogene Punkt befindet, so wird das Integral $\int\rho\ qqdq$, welches im ersten Gliede des vorigen Ausdrucks vorhanden ist, zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q''(1-\lambda)$ genommen werden müssen. Man weiss aber, dass

$$\int\rho\ qqdq \begin{bmatrix} q = 0 \\ q = q''(1-\lambda) \end{bmatrix}$$

$$= \int\rho\ qqdq \begin{bmatrix} q = 0 \\ q = q'' \end{bmatrix} - \int\rho\ qqdq \begin{bmatrix} q = q''(1-\lambda) \\ q = q'' \end{bmatrix},$$

wo die in den Klammern angegebenen Werthe von q die Gränzen bedeuten, zwischen denen die Integrale zu nehmen sind. Das letztere Integral kann leicht gefunden werden, da die Gränzen zwischen denen es gesucht wird, einander sehr nahe liegen, indem die Grösse $q''\lambda$ als sehr klein angenommen werden soll. Man hat nämlich so nahe als möglich

$$\int\rho\ qqdq \begin{bmatrix} q = q''(1-\lambda) \\ q = q'' \end{bmatrix} = \rho' q''^3 \lambda$$

wo ρ' die Dichtigkeit der Erde an der Oberfläche bedeutet. Hierdurch wird

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{r'r'}\int\rho\ qqdq + 4\pi\rho' q''\lambda$$

$$+ \frac{4\pi}{3q''q''}\int\rho.\ d.\ q^5 K''$$

$$+ \frac{12\pi\ M''K''}{q''q''}\int\rho.\ qqdq - 6\pi g M'' q''$$

wo die Integrale zwischen den Gränzen $q = 0$ und $q = q''$ enthalten seyn müssen.

§. 394.

Nun ist $r' = q''(1-\lambda)(1-K'' \sin\psi'^2$
$= q''(1-\lambda-K'' \sin\psi'^2)$
folglich auch

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{1}{q''q''} + \frac{2(\lambda+K'' \sin\psi'^2)}{q''q''}.$$

Ferner ist $2\pi g = f$
$M'' = \sin\psi'^2 - \frac{1}{3}$
folglich, wenn man alle diese Werthe in vorigen Ausdruck von $\left(\frac{dV}{dr'}\right)$ substituirt, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr'}\right) = -\frac{4\pi}{q''q''}\int\rho\, qqdq + \frac{4\pi}{3q''q''}\int\rho.\, d.\, q^5K''$$
$$+ \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho\, qqdq + fq''$$
$$- \sin\psi^2\left[3fq'' - \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho\, qqdq\right]$$
$$- \frac{8\pi\lambda}{q''^2}\int\rho\, .qqdq + 4\pi\rho' q''\lambda.$$

Da nun allgemein (§. 389.)

$$\Gamma = -\left(\frac{dV}{dr'}\right) - 2fr' \cos\psi'^2$$

erhält man endlich, indem statt fr', fq'' gesetzt wird, welches wegen des geringen Unterschiedes von r' und q'' erlaubt ist,

$$\Gamma = +\frac{4\pi}{q''q''}\int\rho.\, qqdq - \frac{4\pi}{3q''q''}\int\rho.\, d.\, q^5K''$$
$$- \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho.\, qqdq - 3fq''$$
$$+ \sin\psi'^2\left[5fq'' - \frac{4\pi K''}{q''q''}\int\rho\, qqdq\right]$$
$$+ \frac{8\pi\lambda}{q''q''}\int\rho\, qqdq - 4\pi\rho' q''\lambda.$$

§. 395.

An der Oberfläche der Erde, unter der Breite ψ', wo $\lambda = 0$ ist, sey die Schwere $= G$, so hat man

$$\Gamma = G + \frac{8\pi\lambda}{q''q''} \int \rho\, qqdq - 4\pi\, \rho' q'' \lambda$$

und da auch mit Vernachlässigung der Glieder die der Centrifugalkraft und Abplattung proportional sind

$$G = \frac{4\pi}{q''q''} \int \rho\, qqdq$$

so kann man vorigen Ausdruck auch so schreiben:

$$\Gamma = G + 2\lambda G - 4\pi \rho' q'' \lambda,$$

wo λ das Verhältniss der Tiefe des Punktes unter der Erdoberfläche, zum Halbmesser der Erde ist.

Unter der Voraussetzung der Relation zwischen Druck und Dichtigkeit, welche §. 380. gemacht ist, wird, wenn man die mittlere Dichtigkeit der Erde durch ρ° bezeichnet

$$\rho^{\circ} = \rho'.\ 1{,}814, \quad (\text{§. } 387.)$$

$$\int \rho\, qqdq = \tfrac{1}{3} \rho^{\circ} q''^{3}, \quad (\text{§. } 382.)$$

folglich auch

$$\frac{4\pi}{q''q''} \int \rho\, qqdq = 4\pi.\ \rho' q''\ 0{,}605$$

und da das vor dem Gleichheitszeichen stehende Glied die Schwere G ist, so hat man

$$4\pi\ \rho' q'' \lambda = \frac{G\lambda}{0{,}605}$$

und hierdurch wird

$$\Gamma = G + \tfrac{42}{121}\, G\lambda$$

oder beinahe

$$\Gamma = G\, (1 + \tfrac{1}{3}\, \lambda)$$

also nimmt bei der angegebenen Hypothese, in geringen Tiefen die Schwere keinesweges ab, sondern zu. Wir gehen jetzt zu den Untersuchungen über die Gestalt der Erde über, die sich aus den durch Versuche mit Pendeln beobachteten Wirkungen der Schwere ableiten lassen.

Bestimmung der Abplattung der Erde durch die an den verschiedenen Oertern gemessenen Längen des Secundenpendels.

§. 396.

Befestigt man einen schweren Körper an einen Faden, so nimmt dieser Faden, wenn er frei aufgehängt wird, vermöge der Anziehung der Erde, die Richtung der Verticallinie an, und wenn man demselben eine andere Richtung giebt, so wird derselbe doch wieder nach der Verticale zurückgehen; indem aber der Körper durch den Fall, in der Lage der Verticallinie eine bestimmte Geschwindigkeit erlangt hat, die nicht augenblicklich aufgehoben werden kann, so muss die Bewegung so lange noch fortdauern, bis die erlangte Geschwindigkeit durch die Gegenwirkung der Schwere zerstört ist; der Körper wird daher auf der andern Seite der Verticallinie eben so hoch wieder steigen, als er vorher gefallen war, und die Zeit, welche erforderlich ist, dass die Geschwindigheit von Null anfangend, wieder bis auf Null abnehme, heisst die Zeit einer Oscillation des Pendels oder eines Pendelschwunges. In so fern wir blos die Bewegung des mathematischen Pendels, bei welchem der Faden ohne Schwere, und der daran befestigte Körper blos als ein materieller Punkt angenommen wird, betrachten, wird die Zeit einer Oscillation von der Länge des Fadens, von der Schwere und dem Winkel abhängen, welchen die anfängliche Lage desselben mit der Verticale macht.

§. 397.

Es sey daher (Fig. 6.) AB die Richtung der Verticallinie, AS das Pendel, welches um den Winkel SAB, den wir durch φ bezeichnen, von der Verticale entfernt ist; in S befindet sich der materielle Punkt, welcher in der Richtung SM parallel mit AB von der Erde angezogen wird, allein da derselbe ver-

mittelst des Fadens an den Punkt A befestigt ist, so kann er nicht nach der Richtung SM herabfallen. Wir zerlegen die Kraft der Schwere $MS = G$, nach den beiden auf einander senkrechten Richtungen SP, SQ, von denen die erste senkrecht auf dem Faden AS steht, also die Berührungslinie des Kreisbogens SNC ausmacht, und die zweite nach der Verlängerung des Fadens wirkt. Die letztere Kraft wird durch den Widerstand des festen Punktes A völlig aufgehoben, so dass wir es blos noch mit der Kraft SP zu thun haben. Man sieht leicht, dass der Winkel $SMP = SAB$, folglich ist $SMP = \varphi$, $SP = SM. \sin SMP = G. \sin \varphi$. Bezeichnen wir ferner das Element des Kreisbogens SNC durch ds, die Zeit durch t, so erhalten wir vermittelst der bekannten Lehrsätze der Dynamik, indem wir den Bogen NS von S anfangen lassen, und derselbe daher durch das Fortrücken des Punktes S vermindert wird, die Gleichung

$$dds + G. \sin \varphi. dt^2 = 0.$$

Setzen wir nun die Länge des Fadens $AS = l$, so ist $s = l. \varphi$, da l den Halbmesser des Kreises angiebt, der vom Punkt S beschrieben wird, also auch $dds = l. dd\varphi$, und wenn wir diesen Werth in vorige Gleichung substituiren

$$l. dd\varphi + G. \sin \varphi. dt^2 = 0.$$

§. 398.

Um aus dieser Differentialgleichung der zweiten Ordnung, die Gleichung zwischen φ und t abzuleiten, multiplicire man dieselbe mit $2l. d\varphi$, so wird

$$ll. \frac{2d\varphi}{dt} . \frac{dd\varphi}{dt^2} + G \sin \varphi. d\varphi = 0.$$

Dies giebt, wenn man integrirt, und bedenkt, dass die Zeit als die unabhängige veränderliche Grösse angesehen wird, und daher $ddt = 0$ ist,

$$\left(l. \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 2Gl \sin \varphi = C,$$

wo C die hinzuzufügende Constante ist. Es ist aber $\frac{ld\varphi}{dt}$ nichts anders als die Geschwindigkeit des Punktes; bezeichnen wir daher den Werth des Winkels

ϕ, welcher die grösste Abweichung des Fadens von der Verticale angiebt, durch α, so ist zu gleicher Zeit die Geschwindigkeit $l\frac{d\phi}{dt} = 0$, und man hat also, wenn man diese gleichzeitigen Werthe von $\frac{ld\phi}{dt}$ und ϕ in voriger Gleichuug substituirt,

$$-2Gl\cos\alpha = C$$

folglich, wenn man aus beiden Gleichungen die Constante eliminirt, und die Wurzel auszieht

$$l\frac{d\phi}{dt} = -\sqrt{2\cos\phi - 2\cos\alpha} : \sqrt{lG}.$$

Wir wählen das negative Zeichen bei Ausziehung der Quadratwurzel, weil der Winkel ϕ abnimmt, während die Zeit zunimmt.

§. 399.

Nun ist bekanntlich

$$2\cos\phi = 2 - 4\sin\tfrac{1}{2}\phi^2$$
$$2\cos\alpha = 2 - 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

folglich wird vorige Gleichung diese Form erhalten

$$\frac{ld\phi}{dt} = -2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\phi^2}.\sqrt{l.G}$$

oder auch

$$\sqrt{G}\frac{2dt}{\sqrt{l}} = -\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\phi^2}}.$$

Bezeichnen wir durch T die Zeit einer ganzen Schwingung, während welcher der Winkel ϕ von α bis $-\alpha$ abnimmt, so kommt aus obiger Gleichung durch Integration

$$2T\sqrt{\frac{G}{l}} = -\int\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\phi^2}},$$

wo von $\phi = \alpha$ bis $\phi = -\alpha$ integrirt werden muss. Wir setzen nun der leichtern Integration wegen

$$\sin\tfrac{1}{2}\phi = \sin\tfrac{1}{2}\alpha.\sin u.$$

so wächst $\sin u$ von $+1$ bis -1, und indem wir die veränderliche Grösse u statt ϕ einführen, erhalten wir

$$T\sqrt{\frac{G}{l}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin u^2}},$$

wo man wegen der Veränderung des Zeichens vor der Integralformel, auch die Gränzen umkehren muss, also von $u = -\tfrac{1}{2}\pi$ bis $u = +\tfrac{1}{2}\pi$ integrirt wird.

§. 400.

Will man die Integration wirklich ausführen, so ist es nothwendig, die Wurzelgrösse in eine Reihe zu verwandeln, die nach den graden Potenzen von $\sin u$ fortschreitet, und man erhält dann

$$T\sqrt{\frac{G}{l}} = \int du. \left\{\begin{array}{l} 1 + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 . \sin u^2 \\ + \frac{1.3.}{2.4.}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^4 \sin u^4 \\ + \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^6 \sin u^6 \\ + \text{etc. etc. etc.} \end{array}\right\}.$$

Man sieht hieraus, dass jedes zu findende Integral die Form

$$\int \sin u^{2n}.\, du. \begin{bmatrix} u = -\tfrac{1}{2}\pi \\ u = +\tfrac{1}{2}\pi \end{bmatrix}$$

erhält, wo die in den Klammern enthaltenen Werthe von u die Gränzen bedeuten, zwischen denen das Integral enthalten seyn soll. Betrachtet man die Potenz $\sin u^{2n}$ als ein Product von $\sin u^{2n-1}.\sin u$, und bedenkt, dass $\int \sin u.\, du = -\cos u$ ist, so erhält man durch die bekannte Methode der Integration durch Theile

$$\int \sin u^{2n}.\, du = -\cos u.\, \sin u^{2n-1} + (2n-1)\int \cos u^2.\, \sin u^{2n-2}.\, du.$$

Setzt man statt $\cos u^2$, $1 - \sin u^2$, so wird

$$\int \sin u^{2n}.\, du = -\cos u.\, \sin u^{2n-1} + (2n-1)\int \sin u^{2n-2} - (2n-1)\int \sin u^{2n}.\, du$$

und hieraus findet sich

$$\int \sin u^{2n}.\, du = -\frac{1}{2n}.\cos u \sin u^{2n-1} + \frac{2n-1}{2n}\int \sin u^{2n-2}\, du.$$

An den Gränzen des Integrals wird $\cos u = 0$, also bleibt blos

$$\int \sin u^{2n}\, du = \frac{2n-1}{2n} \int \sin u^{2n-2}\, du.$$

Nimmt man zuerst $n = 1$, so erhält man

$$\int \sin u^2 . du = \tfrac{1}{2} \int du = \tfrac{1}{2}\pi$$

also wenn nach und nach $n = 2, 3, 4$ u. s. w. gesetzt wird,

$$\int \sin u^4 . du = \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4}\pi$$
$$\int \sin u^6 . du = \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6}\pi$$
$$\int \sin u^8 . du = \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6} . \tfrac{7}{8}\pi$$

etc. etc. etc.

Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichung, so kommt:

$$T\sqrt{\frac{G}{l}} = \pi . \left\{ \begin{array}{l} 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 \\ + \left(\frac{1.3.}{2.4.}\right)^2 . \sin \tfrac{1}{2}\alpha^4 \\ + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \sin \tfrac{1}{2}\alpha^6 \\ + \text{etc. etc.} \end{array} \right.$$

Da der Winkel α, um welchen sich das Pendel von der Verticale entfernt, immer sehr klein bleibt, so ist die Convergenz dieser Reihe sehr beträchtlich, und wenige Glieder reichen hin, dieselbe mit aller nöthigen Genauigkeit in Zahlen darzustellen. Setzt man α unendlich klein oder Null, so ist

$$T . \sqrt{G} = \pi \sqrt{l}$$

und wenn man für T die Zeit einer Secunde, oder den 86400ten Theil eines mittlern Sonnentages annimmt, und diese als die Einheit betrachtet, so erhält man die Länge des sogenannten Secundenpendels, durch die Gleichung

$$G = \pi\pi l.$$

§. 401.

Aus §. 368. haben wir die Gleichung

$$G = G^\circ + \sin \psi^2 . G^\circ (\tfrac{5}{2}\gamma - K)$$

wo G° die Schwere unter dem Aequator, γ das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere an demselben Orte, K die Abplattung der Erde, und ψ die geo-

24

centrische Breite des Ortes bedeutet, für welchen man die Schwere G sucht. Da aber, wenn wir in der Formel für die Schwere, die höhern Potenzen der Abplattung und Schwungkraft vernachlässigen, die geocentrische Breite von der geographischen nicht verschieden ausfällt, so wird man ψ in der Bedeutung der geographischen Breite oder Polhöhe annehmen können.

Setzt man diesen Werth von G in die Gleichung $G = \pi\pi l$, so erhält man

$$\pi\pi l = G^\circ + \sin\psi^2\ G^\circ\left(\tfrac{5}{2}\gamma - K\right).$$

§. 402.

Man sieht leicht, dass wenn an zwei verschiedenen Oertern der Erde, deren Polhöhen bekannt sind, die Längen des Secundenpendels gemessen werden, daraus die Grössen G° und K bestimmt werden können, da die Grösse $G^\circ\gamma$ sich aus dem bekannten Halbmesser der Erde, und der Rotationszeit derselben um ihre Axe, berechnen lässt. Denn es seyen die beobachteten Pendellängen l', l'', die Polhöhen ψ', ψ'', so ist, wenn man diese Werthe in vorige Gleichung substituirt

$$\pi\pi l' = G^\circ + \tfrac{5}{2}\sin\psi'^2\ G^\circ\gamma - KG^\circ\ \sin\psi'^2$$
$$\pi\pi l'' = G^\circ + \tfrac{5}{2}\sin\psi''^2\ G^\circ\gamma - KG^\circ\ \sin\psi''^2.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so wird

$$\pi\pi(l' - l'') = \left(\tfrac{5}{2}G^\circ\gamma - KG^\circ\right)(\sin\psi'^2 - \sin\psi''^2)$$

also hieraus

$$KG^\circ = \tfrac{5}{2}G^\circ\gamma - \frac{\pi\pi(l' - l'')}{\sin\psi'^2 - \sin\psi''^2}.$$

Hat man hieraus KG° gefunden, so substituire man diesen Werth in die erste Gleichung, so dass man

$$G^\circ = \pi\pi l' - \frac{\pi\pi(l' - l'')}{\sin\psi'^2 - \sin\psi''^2}\ \sin\psi'^2$$

erhält.

§. 403.

Als ein hierher gehöriges Beispiel, wollen wir zwei von Sabine auf Spitzbergen und St. Thomas angestellte Beobachtungen wählen. Man hat daselbst:

Spitzbergen $l' = 39''21460$, $\psi' = 79^\circ\ 49'\ 58''$
St. Thomas $l'' = 39,02074$, $\psi'' = 0.\ 24.\ 41.$

wo die Längen der Secundenpendel in englischen Zollen angegeben sind.

Wir müssen nun zuerst die Grösse $G^\circ\gamma$ oder die Schwungkraft am Aequator berechnen, und aus §. 273. finden wir, dass wenn der Halbmesser des Aequators durch a bezeichnet wird,

$$G^\circ\gamma = \frac{4\pi\pi}{TT} a$$

wo T die Anzahl der Secunden der mittlern Sonnenzeit bedeuten, welche die Erde gebraucht, um sich einmal um ihre Axe zu drehen. Der Halbmesser a muss in englischen Zollen ausgedrückt werden, weil die andern Längen in demselben Maasse angegeben sind. Es ist aus §. 242.

$$a = 3271837{,}5 \text{ Toisen.}$$

und da der pariser Fuss sich zum englischen wie 1,06575 zur Einheit verhält, so hat man

$$a = 12.6.3271837{,}5 \cdot 1{,}06575 \text{ engl. Zoll}$$
$$\log a = 8.3997796.$$

Ferner ist die Rotationszeit der Erde 0,99727 des mittlern Sonnentages, also

$$T = 86400''.\ 0{,}99727$$
$$\log T = 4.9353265$$

und hierdurch erhält man

$$\log G^\circ\gamma = 0.1254864$$
$$G^\circ\gamma = 1{,}33502 \text{ engl. Zoll}$$
$$\tfrac{5}{2}\, G^\circ\gamma = 3{,}33755.$$

Aus den Formeln des vorigen Paragraphs ergiebt sich dann mit Berücksichtigung der angenommenen numerischen Werthe

$$KG^\circ = 1{,}3616 \text{ Zoll}$$
$$G^\circ = 385{,}0576 \text{ Zoll.}$$

Die Abplattung $K = \frac{1}{283}$.

§. 404.

Da die Abplattung, wie man aus den vorigen Gleichungen sieht, durch sehr kleine Grössen, nämlich die Unterschiede der Pendellängen, gefunden wird, so kann man leicht schliessen, dass geringe Fehler in den Bestimmungen der Länge des Secundenpendels, bedeutende Aenderuugen der daraus berechneten Abplattung hervorbringen werden. Ausserdem kann an einem Orte die Schwere etwas grösser oder geringer seyn, als es die Theorie angiebt, wozu die ungleichartige Beschaffenheit der obern Schichten der Erde die Veranlassung ist; denn es ist leicht eingesehen, dass wenn an einer Stelle sich tief unter die Oberfläche hinab, Felsenmassen erstrecken, die Anziehung der Erde an diesem Orte stärker seyn wird, als wenn sich daselbst Höhlungen befänden. Man sieht hieraus, dass die Intensität der Schwere, eben so wohl wie ihre Richtung, localen Störungen unterworfen seyn wird, und man könnte wohl annehmen, dass fast nirgends eine vollständige Uebereinstimmung der Natur mit der Theorie statt findet.

§. 405.

Will man daher aus Pendelbeobachtungen ein genügendes Resultat, sowohl für die daraus entspringende Abplattung, als die Kraft der Schwere unter dem Aequator, erhalten, so muss man eine grosse Anzahl von Beobachtungen, die an verschiedenen Oertern der Erde angestellt worden sind mit einander verbinden, und sie nach einem der Natur der Sache angemessenen Princip behandeln.

Wir wollen daher die vorzüglichern Beobachtungen der Längen des Secundenpendels so behandeln, dass die Abplattung und die Kraft der Schwere unter dem Aequator dergestalt bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede, zwischen den beobachteten und berechneten Längen der Pendel ein Minimum werde.

Nun sey die beobachtete Pendellänge $= l$, der bei ihrer Bestimmung statt findende Fehler $= \delta l$, so wird

$$\pi\pi(l + \delta l) = G^{o} + \tfrac{5}{2} \sin\psi'^{2}\, G^{o}\gamma - KG^{o} \sin\psi'^{2}$$

oder auch

$$\delta l = -l + \frac{G^{o}}{\pi\pi} + \frac{5}{2} \cdot \sin\psi'^{2} \frac{G^{o}}{\pi\pi} - K.\frac{G^{o}}{\pi\pi} \cdot \sin\psi'^{2}.$$

Man setze ferner, da Näherungsweise $G^{o} = 39. \pi\pi$, $K = \frac{1}{300}$ ist

$$\frac{G^{o}}{\pi\pi} = 39 + x$$

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39},$$

und es wird, indem man bemerkt, dass aus vorigem Paragraph

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{G^{o}\gamma}{\pi\pi} = 0{,}33816$$

und zugleich das Product xy vernachlässigt

$$\delta l = -l + 39 + 0{,}20816 \sin\psi^{2} + x\left(1 - \frac{\sin\psi^{2}}{300}\right) - \sin\psi^{2}.\, y.$$

Man kann nun wohl annehmen, dass der Werth von $\frac{G^{o}}{\pi\pi}$ von dem genäherten Werthe 39 nur um ein oder zwei Hunderttheile abweicht, und wir werden daher den Factor von x, ohne Fehler, der Einheit gleich setzen können, so dass

$$\delta l = 0 = -l + 39 + 0{,}20816 \sin\psi^{2} + x - y \sin\psi^{2}$$

die Gleichung ist, aus welcher die Bedingungsgleichungen gebildet werden müssen.

§. 406.

Wir nehmen zuerst die Beobachtungen von Sabine (An Account of Experiments to determine the figure of the Earth, by Edward Sabine. London 1825. pag. 333.)

St. Thomas	$\psi = +00^{o}\ 24'\ 41''$,	$l = 39{,}02074$ engl. Z.
Maranham	$-02.\ 31.\ 43$,	39,01214
Ascension	$-07.\ 55.\ 48$,	39,02410
Sierra Leona	$+08.\ 29.\ 28$,	39,01997

Trinidad	$\psi = + 10^\circ\ 38'\ 56''$,	$l = 39{,}01884$ engl. Z.
Bahia	$- 12.\ 59.\ 21$,	39,02425
Jamaica	$+ 17.\ 56.\ 07$,	39,03510
New York	$+ 40.\ 42.\ 43$,	39,10168
London	$+ 51.\ 31.\ 08$,	39,13929
Drontheim	$+ 63.\ 25.\ 54$,	39,17456
Hammerfest	$+ 70.\ 40.\ 05$,	39,19519
Grönland	$+ 74.\ 32.\ 19$,	39,20335
Spitzbergen	$+ 79.\ 49.\ 58$,	39,21469.

Gleichungen für x

$$0 = - 0{,}02073 + x - 0{,}00005\,y$$
$$0 = - 0{,}01172 + x - 0{,}00195\,y$$
$$0 = - 0{,}01996 + x - 0{,}01903\,y$$
$$0 = - 0{,}01543 + x - 0{,}02180\,y$$
$$0 = - 0{,}01173 + x - 0{,}03415\,y$$
$$0 = - 0{,}01373 + x - 0{,}05052\,y$$
$$0 = - 0{,}01537 + x - 0{,}09483\,y$$
$$0 = - 0{,}01313 + x - 0{,}42544\,y$$
$$0 = - 0{,}01174 + x - 0{,}61280\,y$$
$$0 = - 0{,}00806 + x - 0{,}79995\,y$$
$$0 = - 0{,}00985 + x - 0{,}89041\,y$$
$$0 = - 0{,}00999 + x - 0{,}92893\,y$$
$$0 = - 0{,}01303 + x - 0{,}96884\,y.$$

Hieraus folgt die Fundamentalgleichung

$$0 = - 0{,}17447 + 13\,x - 4{,}84870\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = + 0{,}00000 - 0{,}00005\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = + 0{,}00000 - 0{,}00195\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = + 0{,}00038 - 0{,}01903\,x + 0{,}00036\,y$$
$$0 = + 0{,}00032 - 0{,}02180\,x + 0{,}00048\,y$$
$$0 = + 0{,}00039 - 0{,}03415\,x + 0{,}00117\,y$$
$$0 = + 0{,}00068 - 0{,}05052\,x + 0{,}00255\,y$$
$$0 = + 0{,}00147 - 0{,}09483\,x + 0{,}00899\,y$$
$$0 = + 0{,}00558 - 0{,}42544\,x + 0{,}18100\,y$$
$$0 = + 0{,}00717 - 0{,}61280\,x + 0{,}37552\,y$$
$$0 = + 0{,}00645 - 0{,}79995\,x + 0{,}63993\,y$$
$$0 = + 0{,}00876 - 0{,}89041\,x + 0{,}79283\,y$$
$$0 = + 0{,}00929 - 0{,}92893\,x + 0{,}86291\,y$$
$$0 = + 0{,}01262 - 0{,}96884\,x + 0{,}93865\,y$$

also die Fundamentalgleichung für y

$$0 = + 0{,}05311 - 4{,}84870\,x + 3{,}80439\,y.$$

§. 407.

Andere Beobachtungen stellte Sabine *) auf der ersten Reise von Parry an, nämlich:

Brassa	$\psi = 60°.\ 09'\ 42''$,	$l = 39{,}16929$
Hare Island	$= 70\ .\ 26.\ 17$,	$39{,}19840$
Melville	$= 74\ .\ 47.\ 12$,	$39{,}20700$.

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01267 + x - 0{,}75244\,y$$
$$0 = -0{,}01359 + x - 0{,}88789\,y$$
$$0 = -0{,}01318 + x - 0{,}93114\,y$$

also die Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}03944 + 3\,x - 2{,}57147\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}01022 - 0{,}75244\,x + 0{,}56617\,y$$
$$0 = +0{,}01205 - 0{,}88789\,x + 0{,}78835\,y$$
$$0 = +0{,}01227 - 0{,}93114\,x + 0{,}86703\,y$$

hieraus die Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}03454 - 2{,}57147\,x + 2{,}22155\,y.$$

§. 408.

Beobachtungen von Kater in England (Philosophical Transactions. 1819. S. 416.)

Shanklin Farm	$\psi = 50°\ 37'\ 24''$,	$l = 39{,}13614$
Arbury Hill	52. 12. 55 ,	39,14250
Clifton	53. 27. 43 ,	39,14600
Fort Leith	55. 58. 41 ,	39,15554
Portsoy	57. 40. 59 ,	39,16159
Unst	60. 45. 28 ,	39,17146

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01078 + x - 0{,}59750\,y$$
$$0 = -0{,}01249 + x - 0{,}62460\,y$$
$$0 = -0{,}01163 + x - 0{,}64554\,y$$
$$0 = -0{,}01256 + x - 0{,}68694\,y$$

*) Man sehe Philosophical Transactions. 1821. II. Theil. S. 189.

$$0 = -0{,}01293 + x - 0{,}71420\,y$$
$$0 = -0{,}01298 + x - 0{,}76138\,y$$

also die Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}07337 + 6x - 4{,}03016\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}00643 - 0{,}59750\,x + 0{,}35701\,y$$
$$0 = +0{,}00780 - 0{,}62460\,x + 0{,}39012\,y$$
$$0 = +0{,}00750 - 0{,}64554\,x + 0{,}41672\,y$$
$$0 = +0{,}00862 - 0{,}68694\,x + 0{,}47189\,y$$
$$0 = +0{,}00923 - 0{,}71420\,x + 0{,}51008\,y$$
$$0 = +0{,}00990 - 0{,}76138\,x + 0{,}57970\,y$$

also die Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}04948 - 4{,}03016\,x + 2{,}72552\,y.$$

§. 409.

Einige einzelne Beobachtungen sind noch folgende, ebenfalls von Engländern angestellt:

Gallopagos Inseln ψ =	+ 0° 32′ 19″,	l = 39,01717
San Blas	+ 21. 32. 24 ,	39,03776
Rio de Janeiro	— 22. 55. 22 ,	39,04381
San Blas	+ 21. 32. 24 ,	39,03881
Rio de Janeiro	— 22. 55. 22 ,	39,04368
Paramatta	— 33. 48. 43 ,	39,07696
Paramatta	— 33. 48. 43 ,	39,07751
Madras	+ 13. 4. 09 ,	39,02630.

Die drei ersten sind von Basil Hall, die beiden folgenden von Foster, die erste in Paramatta von Brisbane, die zweite von Dunlop, und die in Madras von Goldingham.

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01715 + x - 0{,}00009\,y$$
$$0 = -0{,}00971 + x - 0{,}13480\,y$$
$$0 = -0{,}01224 + x - 0{,}15170\,y$$
$$0 = -0{,}01076 + x - 0{,}13480\,y$$
$$0 = -0{,}01211 + x - 0{,}15170\,y$$
$$0 = -0{,}01251 + x - 0{,}30966\,y$$
$$0 = -0{,}01306 + x - 0{,}30966\,y$$
$$0 = -0{,}01566 + x - 0{,}05113\,y.$$

Hieraus die Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}10320 + 8x - 1{,}24354\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = + 0{,}00000 - 0{,}00009\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = + 0{,}00133 - 0{,}13480\,x + 0{,}01817\,y$$
$$0 = + 0{,}00185 - 0{,}15170\,x + 0{,}02301\,y$$
$$0 = + 0{,}00144 - 0{,}13480\,x + 0{,}01817\,y$$
$$0 = + 0{,}00183 - 0{,}15170\,x + 0{,}02301\,y$$
$$0 = + 0{,}00387 - 0{,}30966\,x + 0{,}09588\,y$$
$$0 = + 0{,}00403 - 0{,}30966\,x + 0{,}09588\,y$$
$$0 = + 0{,}00080 - 0{,}05113\,x + 0{,}00261\,y$$

also die Fundamentalgleichung für y

$$0 = + 0{,}01515 - 1{,}24354\,x + 0{,}27674\,y.$$

§. 410.

Freycinet *) hat die auf seiner Reise um die Welt angestellten Beobachtungen des Pendels, nur in Verhältnisszahlen angegeben, nachdem er alle gehörigen Reductionen an demselben angebracht hat, nämlich

Paris	$\psi = +48°\ 50'\ 14''$,	$l = 1{,}00002271$
Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	0,99783538
Cap de bonne Esp.	$-33.\ 55.\ 15$,	0,99871582
Isle de France	$-20.\ 9.\ 56$,	0,99794215
Rawak	$-0.\ 1.\ 34$,	0,99709575
Guam	$+13.\ 27.\ 51$,	0,98759331
Mowi	$+20.\ 52.\ 7$,	0,99792816
Port Jackson	$-33.\ 51.\ 34$,	0,99877424
Malvinen	$-51.\ 35.\ 18$,	1,00022319.

Wir müssen nun diese Angaben auf englische Zoll reduciren. Aus den Versuchen von Borda folgt, dass die Länge des Secundenpendels in Paris 0,993849 Meter beträgt, also, wenn man den Meter = 0,513074 Toisen annimmt, und das Verhältniss des englischen Fuss zum französischen wie 1 : 1,06575 setzt, so erhält man die Länge des Secundenpendels zu Paris = 39,12805, und hieraus findet man die an den übrigen Oertern, indem man diese Länge durch die bei dem Orte stehende Verhältnisszahl multiplicirt,

---

*) Man sehe Voyage autour du Monde par M. Louis de Freycinet, Observations du Pendule. S. 26.

und durch die bei Paris angegebene dividirt. Hierdurch ergiebt sich folgendes Tableau:

Paris	$\psi = + 48^\circ\ 50'\ 14''$,	$l = 39{,}12805$
Rio de Janeiro	$- 22.\ 55.\ 22$,	39,04247
Cap de bonne Esp.	$- 33.\ 55.\ 15$,	39,07691
Isle de France	$- 20.\ 9.\ 56$,	39,04664
Rawak	$- 0.\ 1.\ 34$,	39,01353
Guam	$+ 13.\ 27.\ 51$,	39,03298
Mowi	$+ 20.\ 52.\ 7$,	39,04610
Port Jackson	$- 33.\ 51.\ 33$,	39,07921
Malvinen	$- 51.\ 35.\ 18$,	39,13589.

Gleichungen für x

$$0 = - 0{,}01008 + x - 0{,}56677\,y$$
$$0 = - 0{,}01090 + x - 0{,}15167\,y$$
$$0 = - 0{,}01209 + x - 0{,}31142\,y$$
$$0 = - 0{,}02192 + x - 0{,}11884\,y$$
$$0 = - 0{,}01353 + x - 0{,}00000\,y$$
$$0 = - 0{,}02170 + x - 0{,}05421\,y$$
$$0 = - 0{,}01970 + x - 0{,}12690\,y$$
$$0 = - 0{,}01439 + x - 0{,}31042\,y$$
$$0 = - 0{,}00809 + x - 0{,}61398\,y$$

also die Fundamentalgleichung für x

$$0 = - 0{,}13240 + 9\,x - 2{,}25421\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = + 0{,}00567 - 0{,}56677\,x + 0{,}32124\,y$$
$$0 = + 0{,}00168 - 0{,}15167\,x + 0{,}02300\,y$$
$$0 = + 0{,}00376 - 0{,}31142\,x + 0{,}09698\,y$$
$$0 = + 0{,}00260 - 0{,}11884\,x + 0{,}01412\,y$$
$$0 = + 0{,}00000 - 0{,}00000\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = + 0{,}00117 - 0{,}05421\,x + 0{,}00294\,y$$
$$0 = + 0{,}00246 - 0{,}12690\,x + 0{,}01610\,y$$
$$0 = + 0{,}00443 - 0{,}31042\,x + 0{,}09636\,y$$
$$0 = + 0{,}00495 - 0{,}61398\,x + 0{,}37687\,y.$$

Hieraus die Fundamentalgleichung für y

$$0 = + 0{,}02672 - 2{,}25421\,x + 0{,}94761\,y.$$

§. 411.

Endlich haben wir noch die von **Biot**, **Arago**, **Matthieu** und **Chaix** gemachten Pendelbeobachtungen mit zuzuziehen. Die Längen der Pendel sind in

Meter ausgedrückt, und beziehen sich nicht auf das bisherige Sexagesimalsecundenpendel, sondern auf das Decimalsecundenpendel, welches in einem mittlern Sonnentage 100000 Schwingungen macht. Die Beobachtungen sind folgende, aus Recueil d'Observations géodesiques, astronomiques et physiques, par Biot et Arago.

Formentera	ψ = 38° 39′ 56″,	l = 0,74125200 Meter
Figeac	44. 36. 45 ,	0,74161228
Bourdeaux	44. 50. 26 ,	0,74160872
Clermont	45. 46. 48 ,	0,74170518
Paris	48. 50. 14 ,	0,74191749
Dünkirchen	51. 02. 10 ,	0,74207703
Forth Leith	55. 58. 37 ,	0,74241343
Unst	60. 45. 25 ,	0,74272314.

Um diese Beobachtungsreihe an die frühern anschliessen zu können, müssen wir die gefundenen Längen auf englische Zoll, und dann das Decimalpendel auf das Sexagesimalpendel reduciren. Zu der ersten Reduction sind die nothwendigen Data schon bei Freycinet's Beobachtungen angegeben worden. Um die zweite auszuführen, hat man aus den frühern Paragraphen die Gleichung

$$T\sqrt{G} = \pi\sqrt{l}$$

oder, indem man quadrirt

$$TT\sqrt{G} = \pi\pi l$$

und man sieht hieraus, dass bei gleicher Kraft der Schwere G, die Pendellängen sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten, in denen die Pendel eine Oscillation vollbringen. Nun sind die Zeiten zu einander im Verhältniss von 86400 : 100000, folglich verhält sich das Decimalpendel zum Sexagesimalpendel wie $864^2 : 1000^2$, und wir müssen daher vorige Längen mit $\left(\frac{1000}{864}\right)^2$ multipliciren. Auf diese Weise erhält man

Formentera	l = 39,09364 engl. Zoll
Figeac	39,11264
Bourdeaux	39,11245
Clermont	39,11755
Paris	39,12874
Dünkirchen	39,13715

Fort Leith l = 39,15489 engl. Zoll
Unst 39,17123.

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01239 + x - 0{,}39034\,y$$
$$0 = -0{,}00997 + x - 0{,}49324\,y$$
$$0 = -0{,}00975 + x - 0{,}49721\,y$$
$$0 = -0{,}01064 + x - 0{,}51361\,y$$
$$0 = -0{,}01077 + x - 0{,}56677\,y$$
$$0 = -0{,}01131 + x - 0{,}60456\,y$$
$$0 = -0{,}01191 + x - 0{,}68694\,y$$
$$0 = -0{,}01275 + x - 0{,}76138\,y.$$

Hieraus erhält man die Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}08950 + 8x - 4{,}51405\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}00488 - 0{,}39034\,x + 0{,}15237\,y$$
$$0 = +0{,}00493 - 0{,}49324\,x + 0{,}24328\,y$$
$$0 = +0{,}00493 - 0{,}49721\,x + 0{,}24722\,y$$
$$0 = +0{,}00515 - 0{,}51361\,x + 0{,}26380\,y$$
$$0 = +0{,}00570 - 0{,}56677\,x + 0{,}32123\,y$$
$$0 = +0{,}00684 - 0{,}60456\,x + 0{,}36550\,y$$
$$0 = +0{,}00817 - 0{,}68694\,x + 0{,}47189\,y$$
$$0 = +0{,}00970 - 0{,}76138\,x + 0{,}57970\,y$$

also die Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}05030 - 4{,}51405\,x + 2{,}64499\,y.$$

§. 412.

Wir müssen nun die Fundamentalgleichungen, sowohl für x als für y, addiren. Die für x sind

$$0 = -0{,}17447 + 13\,x - 4{,}84870\,y$$
$$0 = -0{,}03944 + 3\,x - 2{,}57147\,y$$
$$0 = -0{,}07337 + 6\,x - 4{,}03016\,y$$
$$0 = -0{,}10320 + 8\,x - 1{,}24354\,y$$
$$0 = -0{,}13240 + 9\,x - 2{,}25421\,y$$
$$0 = -0{,}08950 + 8\,x - 4{,}51405\,y$$

also die Summe

$$0 = -0{,}61238 + 47\,x - 19{,}46213\,y. \qquad \text{(A)}$$

Die Fundamentalgleichungen für y sind

$$0 = +0{,}05311 - 4{,}84870\,x + 3{,}80439\,y$$
$$0 = +0{,}03454 - 2{,}57147\,x + 2{,}22155\,y$$

$$0 = + 0{,}04948 - 4{,}03016x + 2{,}72552y$$
$$0 = + 0{,}01515 - 1{,}24354x + 0{,}27674y$$
$$0 = + 0{,}02672 - 2{,}25421x + 0{,}94761y$$
$$0 = + 0{,}05030 - 4{,}51405x + 2{,}64499y$$

also ihre Summe

$$0 = + 0{,}22930 - 19{,}46213x + 12{,}62080y. \quad (B)$$

§. 413.

Löst man die Gleichungen (A) und (B) auf, um die unbekannten Grössen x und y zu erhalten, so findet man

$$x = 0{,}0152333$$
$$y = 0{,}0053223$$

und hieraus die Pendellänge unter dem Aequator

$$= \frac{G^o}{\pi\pi} = 39 + x = 39{,}015233 \text{ engl. Zoll}$$

ferner die Abplattung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39} = \frac{1}{288{,}20}$$

also bedeutend grösser als aus den Gradmessungen.

Die Schwere am Aequator wird

$$G^o = 385{,}0649 \text{ engl. Zoll}$$
$$= 30{,}10906 \text{ pariser Fuss}$$
$$= 9{,}78061 \text{ Meter.}$$

Das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere am Aequator erhält man

$$\gamma = \frac{1}{288{,}44}.$$

Die allgemeine Formel für die Pendellänge

$$l = \frac{G^o}{\pi\pi} + \sin\psi^2 . \frac{G^o}{\pi\pi} [\tfrac{5}{2}\gamma - K]$$

wird, indem wir die gefundenen numerischen Werthe substituiren

$$l = 39''015233 + 0''202898 \sin\psi^2$$

wodurch man die Länge des Pendels in englischen Zollen erhält.

§. 414.

Jetzt wollen wir die bei den einzelnen Messungen begangenen Fehler aufsuchen; wir finden diese indem wir die vorigen Werthe von x und y in die einzelnen Bedingungsgleichungen substituiren, das Resultat giebt den Fehler der Messung an, welcher die Gleichung zugehört. Man erhält auf diese Weise:

St. Thomas	$l =$	39,02074,	$\delta l =$	− 0,00550
Maranham		39,01214,		+ 0,00350
Ascension		39,02410,		− 0,00482
Sierra Leona		39,01997,		− 0,00022
Trinidad		39,01884,		+ 0,00333
Bahia		39,02425,		+ 0,00124
Jamaica		39,03510,		− 0,00064
New York		39,10168,		− 0,00017
London		39,13929,		+ 0,00022
Drontheim		39,17456,		+ 0,00291
Hammerfest		39,19519,		+ 0,00064
Grönland		39,20335,		+ 0,00029
Spitzbergen		39,21469,		− 0,00296.
Brassa	$l =$	39,16929,	$\delta l =$	− 0,00145
Hare Island		39,19840,		− 0,00310
Melville		39,20700,		− 0,00292
Shanklin Farm	$l =$	39,13614,	$\delta l =$	+ 0,00127
Arbury Hill		39,14250,		− 0,00059
Clifton		39,14600,		+ 0,00016
Fort Leith		39,15554,		− 0,00099
Portsoy		39,16159,		− 0,00151
Unst		39,17146,		− 0,00181.
Gallopagos Inseln	$l =$	39,01717,	$\delta l =$	− 0,00191
San Blas		39,03776,		+ 0,00482
Rio de Janeiro		39,04381,		+ 0,00220
San Blas		39,03881,		+ 0,00377
Rio de Janeiro		39,04368,		+ 0,00231
Paramatta		39,07696,		+ 0,00108
Paramatta		39,07751,		+ 0,00053
Madras		39,02630,		− 0,00069.

Paris	l = 39,12805,	δl = + 0,00213
Rio de Janeiro	39,04247,	+ 0,00344
Cap de bon. Esp.	39,07691,	+ 0,00149
Isle de France	39,04664,	— 0,00731
Rawak	39,01353,	+ 0,00171
Guam	39,03298,	— 0,00674
Mowi	39,04610,	— 0,00514
Port Jackson	39,07921,	— 0,00083
Malwinen	39,13589,	+ 0,00389.

Formentera	l = 39,09364,	δl = + 0,00079
Figeac	39,11264,	+ 0,00264
Bourdeaux	39,11245,	+ 0,00285
Clermont	39,11755,	+ 0,00185
Paris	39,12874,	+ 0,00144
Dünkirchen	39,13715,	+ 0,00063
Fort Leith	39,15489,	— 0,00034
Unst	39,17123,	— 0,00157.

Die Summen der Quadrate der Fehler in den einzelnen Beobachtungsreihen sind

0,0000966176
0,0000202389
0,0000086229
0,0000531929
0,0001361505
0,0000241897

also die ganze Summe der Quadrate
= 0,0003390125.

Zur Bestimmung der beiden Grössen x und y haben wir 47 Gleichungen angewendet. Dividiren wir daher diese Summe durch 47 — 2, und ziehen aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhalten wir den mittlern Fehler, der bei der Messung von Pendellängen begangen werden kann,

= 0,00274474 englische Zoll.

Es ist wohl zu bemerken, dass die vorigen durch δl bezeichneten Fehler, nicht blos die bei der eigentlichen Bestimmung der Pendellängen begangenen Irrungen enthalten, sondern auch zugleich durch die sich nach der geognostischen Beschaffenheit der Erdoberfläche ändernde Intensität der Schwere afficirt sind.

§. 415.

Um die Gewichte der gefundenen Werthe von x und y zu erhalten, schreibe man die zur Bestimmung dieser Grössen gebrauchten Gleichungen so:

$$X = -0,61238 + 47x - 19,46213y$$
$$Y = +0,22930 - 19,46213x + 12,62080y.$$

Giebt man denselben dann die Form

$$x = A + BX + CY$$
$$y = A' + B'X + C'Y,$$

so wird (§. 238.), $\frac{1}{B}$ das Gewicht von x, $\frac{1}{C'}$ das Gewicht von y seyn. Man erhält auf diese Art

das Gewicht von $x = 16,988$
das Gewicht von $y = 4,562$

und hieraus der mittlere zu befürchtende Fehler

$$\text{im Werthe von } x = \frac{0,00274474}{\sqrt{16,988}} = 0,00066594$$
$$\text{im Werthe von } y = \frac{0,00274474}{\sqrt{4,562}} = 0,0012851$$

folglich wird die Pendellänge unter dem Aequator, die wir $= 39,015233$ engl. Zoll fanden, zwischen 39,014567 und 39,015899 nothwendig enthalten seyn müssen. Die Abplattung war $= \frac{1}{288}$; die sich aus dem Werthe $y = 0,0053223$ fand. Nun könnte aber auch $y = 0,0053223 - 0,0012851 = 0,0040372$ seyn, also wenn man diesen Werth in die Gleichung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39}$$

setzt, so kommt der kleinste Werth der Abplattung, welcher aus den Pendelmessungen gefolgert werden kann

$$K = \frac{1}{291}$$

folglich wird die Abplattung zwischen $\frac{1}{285}$ und $\frac{1}{291}$ schwanken.

§. 416.

Das Tableau der Messungen der Pendellängen, welches wir §. 414. gegeben haben, zeigt, dass an mehren Orten, wie zu St. Thomas, Ascension, Isle de France, Guam und Mowi, die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Längen bedeutend sind, so dass an diesen Oertern eine Abweichung der Intensität der Schwere augenscheinlich ist. Nehmen wir z. B. die beobachtete Pendellänge

Isle de France $= 39''04664$

so sollte der Theorie zufolge an diesem Orte die Länge $39''04664 - 0,00731 = 39''03933$ betragen. Gesetzt nun, das letztere Pendel macht in einem mittlern Sonnentage 86400 Schwingungen, und das beobachtete s Schwingungen, so ist die Zeit einer Oscillation für das berechnete $= \frac{1}{86400}$, für das beobachtete $\frac{1}{s}$. Die Formel für die Pendelschwingungen §. 400.

$$T\sqrt{G} = \pi\sqrt{l}$$

zeigt ferner, dass die Quadrate der Schwingungszeiten, sich wie die Längen der Pendel verhalten. Man erhält daher zur Bestimmung von s die Proportion

$$39,04664 : 39,03933 = \frac{1}{ss} : \left(\frac{1}{86400}\right)^2$$

und hieraus

$$s = 86400\sqrt{\frac{39,03933}{39,04664}}$$

$$\begin{aligned} \log 39,03933 &= 1.5915023 \\ \log 39,04664 &= 1.5915836 \\ 2 : & \; 9.9999187 \\ & \; 9.9999593. \\ \log 86400 &= 4.9365137 \\ \log s &= 4.9364730 \\ s &= 86391,9 \end{aligned}$$

also hatte das Pendel 8,1 Schwingungen weniger gemacht, welcher Unterschied zu gross ist, als dass

man denselben als einen Beobachtungsfehler ansehen könnte, und man muss denselben aus der, zufällig durch locale Ursachen an diesem Beobachtungsorte, geänderten Intensität der Schwungkraft erklären. Aus der Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{G}}$$

sieht man, dass wenn die Länge l wächst, und die Schwingungszeit T dieselbe bleiben soll, auch die Schwere G wachsen muss, und umgekehrt.

§. 417.

Da nun in der erwähnten Tabelle ein negativer Werth von δl anzeigt, dass die Länge des Secundenpendels zu gross beobachtet ist, so schliessen wir daraus, dass an denjenigen Beobachtungsorten, an welchen dieses statt findet, die Schwere durch locale Ursachen eine Vermehrung ihrer Intensität erlitten hat, und dies im Allgemeinen um so mehr, je grösser der negative Werth von δl ausfällt, wenn wir die etwanigen wirklichen Beobachtungsfehler bei Seite setzen. Das umgekehrte findet an denjenigen Oertern statt, an welchen δl einen positiven Werth erhält.

Es ist nun merkwürdig, dass an denjenigen Orten, wo die Oberfläche aus dichtern Materien besteht, der Werth δl immer negativ wird, während das Gegentheil da sich vorfindet, wo die Oberfläche aus Materie von geringer Dichtigkeit besteht. Dies zeigt folgende Tabelle noch deutlicher, indem Sabine (a. a. O. pag. 338.) in den Beobachtungen, welche die erste Reihe §. 414. ausmachen, zugleich die geognostische Beschaffenheit der Oberfläche angegeben hat.

St. Thomas	$\delta l = -$ 550.	Basaltfelsen
Maranham	+ 350.	Angeschwemmtes Land.
Ascension	− 482.	Vulcanischer Felsen.
Sierra Leona	− 22.	Schnell verwitternder Granit.
Trinidad	+ 333.	Angeschwemmtes Land.
Bahia	+ 124.	Tiefe Erde üb. Sandst.
Jamaica	− 64.	Kalk.

New York	$\delta l = -$ 17.	Sand von 100 Fuss Tiefe auf Serpentinstein.
London	+ 22.	Kiesel und Kalk.
Drontheim	+ 291.	Thon auf Glimmerschief.
Hammerfest	+ 64.	Glimmerschiefer.
Grönland	+ 29.	Sandstein.
Spitzbergen	— 296.	Quarzfelsen.

Die Zahlen bedeuten Hunderttausendtheile von englischen Zollen, und man sieht deutlich, dass die dichtern Materien dem negativen Werthe von δl zugehören. Es ist daher gewiss, dass vorzüglich die der Oberfläche am nächsten liegenden Schichten, einen bedeutenden Einfluss auf die verschiedene Länge des Pendels äussern, und dass man, um Formeln zu erhalten, welche so viel als möglich von diesen localen Einflüssen unabhängig sind, sich Beobachtungen verschaffen muss, die bei den verschiedensten Arten der Beschaffenheit des Erdbodens angestellt worden.

§. 418.

Lässt man die Beobachtungen zu St. Thomas, Maranham, Ascension, Trinidad, Bahia weg, so ist die Summe der übrigen Werthe von δl beinahe Null, und es könnte die Oberfläche der Erde als ein Aggregat aus den, bei diesen übrig bleibenden Oertern, angegebenen Materien angesehen werden. Man hat dann

Sierra Leona,	Granit	Dichtigkeit 2,538.
Jamaica,	Kalk	2,720.
New York,	Sand	2,500.
London,	Kiesel	2,660.
Drontheim,	Thon auf Schiefer	2,630.
Hammerfest,	Glimmerschiefer	2,934.
Grönland,	Sandstein	2,500.
Spitzbergen,	Quarzfelsen	2,652.

Hieraus würde das Mittel 2,642 für die Dichtigkeit der Erdoberfläche, das Wasser als Einheit genommen, seyn, und wenn wir nach §. 387. die mittlere Dichtigkeit der Erde gleich 1,814 der Dichtigkeit an der Oberfläche setzen, so kommt die mittlere Dichtigkeit = 4,785.

§. 419.

Wir wollen die §. 413. gefundene Formel für das Gesetz der Länge des Secundenpendels unter den verschiedenen geographischen Breiten, noch mit einigen andern Messungen vergleichen, die früher gemacht sind, und denen man nicht die Genauigkeit zuschreiben kann, als diejenigen besitzen, welche zur Berechnung des Ausdrucks der Pendellänge gebraucht sind. Die Formel war

$$l = 39''015233 + 0{,}202898 \sin \psi^2$$

wo l die Länge des Sexagesimalsecundenpendels in englischen Zollen, und ψ die Breite des Beobachtungsortes bedeutet. Ich entnehme die Data der Beobachtungen aus Mecanique céléste, Tom. 2. pag. 147.

	Breite	Länge des Pendels
1)	0°00	0,99669
2)	10,61	0,99689
3)	13,25	0,99710
4)	20,00	0,99745
5)	20,50	0,99728
6)	37,69	0,99877
7)	48,44	0,99950
8)	53,57	0,99987
9)	54,26	1,00000
10)	56,63	1,00006
11)	57,22	1,00018
12)	64,72	1,00074
13)	66,60	1,00101
14)	74,22	1,00137
15)	74,53	1,00148.

Die erste Beobachtung ist unter dem Aequator in Peru, die zweite in Portobello von Bouguer gemacht; die dritte von le Gentil in Pondichery, die vierte von Campell in Jamaica, die fünfte von Bouguer auf Klein Goave, die sechste von Lacaille am Vorgebirge der guten Hoffnung, die siebente von Darquier in Toulouse, die achte von Liesganig in Wien, die neunte in Paris von Bouguer, die zehnte in Gotha von Zach, die eilfte in London von Graham, die zwölfte von Grischow in Arensberg, die

dreizehnte und funfzehnte von Mallet in Petersburg und Ponoi, und endlich die vierzehnte von Maupertuis in Pello.

§. 420.

Da die Breiten der Beobachtungsörter in Decimalgraden angegeben sind, so müssen wir dieselben auf die gewöhnlichen Sexagesimalgrade reduciren, und indem wir zugleich für das als Einheit angenommene Secundenpendel 39″12805 englische Zoll nach Borda (§. 410.) setzen, so erhalten wir folgendes Tableau:

Breite	beobacht. Länge	Fehler
+ 0° 0′ 0″	38,99855	— 0,01668
+ 9. 32. 56.	39,00636	— 0,01450
+ 11. 55. 30.	39,01457	— 0,00152
+ 18. 0. 0.	39,02828	— 0,00632
+ 18. 27. 0.	39,02161	— 0,01303
— 33. 55. 16.	39,07992	+ 0,00148
+ 43. 35. 46.	39,10849	— 0,00322
+ 48. 12. 47.	39,12296	— 0,00507
+ 48. 50. 2.	39,12805	— 0,00216
+ 50. 58. 1.	39,13035	— 0,00731
+ 51. 29. 53.	39,13510	— 0,00441
+ 58. 14. 53.	39,15620	— 0,00573
+ 59. 56. 24.	39,16763	+ 0,00041
+ 66. 47. 53.	39,18163	— 0,00501
+ 67. 4. 37.	39,18595	— 0,00141.

Die Fehler müssen mit entgegengesetzten Zeichen zu den beobachteten Längen hinzugefügt werden, um die berechneten zu erhalten, und man sieht daraus, dass alle Pendel zu klein gefunden sind.

§. 421.

Legen wir bei der Reduction der §. 419. angegebenen proportionalen Längen des Pendels, statt der Borda'schen Bestimmung der absoluten Länge, die von Bouguer unter dem Aequator zum Grunde, welcher die Länge des Sexagesimalsecundenpendels zu 439,21 pariser Linien angiebt, so erhalten wir fol-

gende Fehlerbestimmungen, indem man bemerkt, dass 439,21 par. Lin. = 39,00735 engl. Zoll.

Peru	Fehler	— 0,00788
Portobello		— 0,00570
Pondichery		+ 0,00628
Jamaica		+ 0,00248
Klein Goave		— 0,00423
Cap d. gut. Hoff.		+ 0,01028
Toulouse		+ 0,00568
Wien		+ 0,00373
Paris		+ 0,00664
Gotha		+ 0,00149
London		+ 0,00439
Arensberg		+ 0,00307
Petersburg		+ 0,00921
Pello		+ 0,00379
Ponoi		+ 0,00739.

§. 422.

Im fünf und zwangzigsten Bande der Monatlichen Correspondenz von Zach befinden sich folgende Beobachtungen über die Schwingungen eines unveränderlichen Pendels, die von Malaspina auf seiner Reise um die Erde auf den Corvetten Descubierta und Atrevida angestellt, und von Gabriel de Ciscar, so gut als es die mangelhaften Angaben erlauben wollten, reducirt sind.

Beobacht. - Ort	Breite	Oscillation in einer Stunde.
Aequator	0° 0′	3607,00
Zamboango	+ 6. 55.	3607,25
Lima	— 12. 5.	3607,39
Umatog	+ 13. 18.	3607,07
Manilla	+ 14. 36.	3608,06
Acapulco	+ 16. 50.	3607,83
Insel Babao	— 18. 39.	3608,12
Macao	+ 23. 12.	3607,58
Port Jackson	— 33. 51.	3610,24
Monte Video	— 34. 55.	3610,38
Cadix	+ 36. 32.	3610,24
Monterey	+ 36. 36.	3609,75
Concepcion	— 36. 42.	3610,29

Beobacht.-Ort		Breite	Oscillation in einer Stunde.
St. Helena	—	44. 30.	3612,37
Nutka	+	49. 35.	3612,21
Puerto Egmont	—	51. 21.	3612,73
Mulgrave	+	59. 33.	3614,85.

Es sey nun die unbekannte Länge des hierbei gebrauchten Pendels $= \lambda$, und t die Zeit, in welcher dasselbe die Schwingung vollendete, so hat man nach §. 400.

$$t \sqrt{G} = \pi \sqrt{\lambda}.$$

Die Länge des Secundenpendels unter dem Aequator bezeichne man durch L, die daselbst statt findende Schwere durch G°, so ist, indem man die Secunde als Einheit annimmt

$$\sqrt{G^\circ} = \pi \sqrt{L}.$$

Das von Malaspina gebrauchte Pendel machte in einer Stunde 3607 Schwingungen unter dem Aequator, während das Secundenpendel nur 3600 macht; man hat daher

$$t = \frac{3600}{3607}, \quad \frac{3600}{3607} \sqrt{G^\circ} = \pi \sqrt{\lambda}.$$

folglich, wenn man aus dieser letztern Gleichung und der andern $\sqrt{G^\circ} = \pi \sqrt{L}$, die unbekannte Grösse G° eliminirt, so kommt

$$\lambda = L. \left(\frac{3600}{3607}\right)^2$$

An einem andern Orte sey für dasselbe Pendel von der Länge λ, die Schwingungszeit t', die Schwere G', so wird

$$t' \sqrt{G'} = \pi \sqrt{\lambda}.$$

und da ausserdem $t \sqrt{G} = \pi \sqrt{\lambda}$, so erhält man

$$t' \sqrt{G'} = t \sqrt{G}$$

$$t'^2 : t^2 = G : G'.$$

Bezeichnet man die Anzahl der Oscillationen an beiden Orten, die in einer Stunde vollbracht werden, durch s und s', so ist

$$t'^2 : t^2 = \frac{1}{s'^2} : \frac{1}{s^2}$$

folglich, wenn man diese Proportion mit der vorigen verbindet,

$$s^2 : s'^2 = G : G'.$$

Es verhalten sich daher die Schweren an zwei verschiedenen Orten, wie die Quadrate der Anzahl der Schwingungen, die von einerlei Pendel in einerlei Zeit geschehen, und da sich die Längen der Pendel, die ihre Schwingungen in gleicher Zeit vollenden, ebenfalls wie die Schweren verhalten, so werden wir die Proportion

$$l : l' = ss : s's'$$

erhalten, wo l und l' die Längen der Secundenpendel angeben, s und s' aber die Anzahl der Schwingungen eines unveränderlichen Pendels an den entsprechenden Beobachtungsörtern bedeuten.

§. 423.

Wir haben nun zwar keine von Malaspina angestellte lineare Messung des Pendels, dessen er sich bei der Zählung der Oscillationen bediente, allein da wir blos im Allgemeinen eine Uebersicht haben wollen, wie seine Messung mit der Formel, die wir entwickelt haben, übereinstimmen, so werden wir die Länge des Secundenpendels unter dem Aequator so annehmen, wie sie die Formel angiebt, nämlich

$$= 39{,}01523 \text{ engl. Zoll}$$

und wir würden dann die Länge des Secundenpendels nach seinen Messungen für jeden andern der Beobachtungsörter dadurch finden, dass wir diese unter dem Aequator angenommene Länge durch das Quadrat der dabei (§. 422.) befindlichen Angabe der Schwingungen multiplicirten, und durch $(3607)^2$ dividirten.

Auf diese Weise kommt:

Beobacht.-Ort	Länge	Fehler
Aequator	39,01523	0,00000
Zamboango	39,02063	+ 0,00273
Lima	39,02367	— 0,00045
Umatog	39,01674	— 0,00922
Manilla	39,03817	+ 0,01015
Acapulco	39,03319	+ 0,00095
Insel Babao	39,03947	— 0,00188
Macao	39,02778	— 0,01894
Port Jackson	39,08536	+ 0,00718

Beobacht.-Ort	Länge	Fehler
Monto Video	39,08839	+ 0,00668
Cadix	39,08536	— 0,00177
Monterey	39,07475	— 0,01261
Conception	39,08664	— 0,00106
St. Helena	39,13149	+ 0,01658
Nutka	39,12803	— 0,00481
Puerto Egmont	39,13929	— 0,00329
Mulgrave	39,18524	+ 0,01922.

Die Fehler müssen mit entgegengesetzten Zeichen zu den beobachteten Längen hinzugefügt werden, wenn man die berechneten haben will.

§. 424.

Hebt man aus den §. 414. angegebenen Beobachtungsörtern diejenigen aus, welche auf der südlichen Halbkugel der Erde liegen, um aus ihnen allein die Abplattung herzuleiten, so hat man

1)	Maranham	$\psi = -02^\circ\ 31'\ 43,''$	$l = 39{,}01214$
2)	Ascension	$-07.\ 55.\ 48$,	39,02410
3)	Bahia	$-12.\ 59.\ 21$,	39,02425
4)	Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04381
5)	Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04368
6)	Paramatta	$-33.\ 48.\ 43$,	39,07696
7)	Paramatta	$-33.\ 48.\ 43$,	39,07751
8)	Rio de Janeiro	$-22.\ 55.\ 22$,	39,04247
9)	Cap de b. Esp.	$-33.\ 55.\ 15$,	39,07691
10)	Isle de France	$-20.\ 9.\ 56''$,	39,04664
11)	Rawak	$-0.\ 1.\ 34$,	39,01353
12)	Port Jackson	$-33.\ 51.\ 34$,	39,07921
13)	Malvinen	$-51.\ 35.\ 18$,	39,13589

und man bekommt die

Gleichungen für x

$$0 = -0{,}01172 + x - 0{,}00195\,y$$
$$0 = -0{,}01996 + x - 0{,}01903\,y$$
$$0 = -0{,}01373 + x - 0{,}05052\,y$$
$$0 = -0{,}01224 + x - 0{,}15170\,y$$
$$0 = -0{,}01211 + x - 0{,}15170\,y$$
$$0 = -0{,}01251 + x - 0{,}30966\,y$$
$$0 = -0{,}01306 + x - 0{,}30966\,y$$

$$0 = -0{,}01090 + x - 0{,}15167\,y$$
$$0 = -0{,}01209 + x - 0{,}31142\,y$$
$$0 = -0{,}02192 + x - 0{,}11884\,y$$
$$0 = -0{,}01353 + x - 0{,}00000\,y$$
$$0 = -0{,}01439 + x - 0{,}31042\,y$$
$$0 = -0{,}00809 + x - 0{,}61398\,y$$

Fundamentalgleichung für x

$$0 = -0{,}17625 + 13\,x - 2{,}50055\,y.$$

Gleichungen für y

$$0 = +0{,}00000 - 0{,}00195\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = +0{,}00038 - 0{,}01903\,x + 0{,}00036\,y$$
$$0 = +0{,}00068 - 0{,}05052\,x + 0{,}00255\,y$$
$$0 = +0{,}00185 - 0{,}15170\,x + 0{,}02301\,y$$
$$0 = +0{,}00183 - 0{,}15170\,x + 0{,}02301\,y$$
$$0 = +0{,}00387 - 0{,}30966\,x + 0{,}09588\,y$$
$$0 = +0{,}00403 - 0{,}30966\,x + 0{,}09588\,y$$
$$0 = +0{,}00168 - 0{,}15167\,x + 0{,}02300\,y$$
$$0 = +0{,}00376 - 0{,}31142\,x + 0{,}09698\,y$$
$$0 = +0{,}00260 - 0{,}11884\,x + 0{,}01412\,y$$
$$0 = +0{,}00000 - 0{,}00000\,x + 0{,}00000\,y$$
$$0 = +0{,}00443 - 0{,}31042\,x + 0{,}09636\,y$$
$$0 = +0{,}00495 - 0{,}61398\,x + 0{,}37687\,y$$

Fundamentalgleichung für y

$$0 = +0{,}03006 - 2{,}50055\,x + 0{,}84802\,y.$$

§. 425.

Aus den beiden Gleichungen

$$0 = -0{,}17625 + 13{,}00000\,x - 2{,}50055\,y$$
$$0 = +0{,}03006 - 2{,}50055\,x + 0{,}84802\,y$$

erhält man nun die Werthe von

$$x = +0{,}015089$$
$$y = +0{,}009045$$

folglich hieraus die Pendellänge unter dem Aequator

$$39 + x = 39{,}015089 \text{ engl. Zoll}$$

ferner die Abplattung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39} = \frac{1}{280{,}34}.$$

Die auf der südlichen Seite der Erde angestellten Pendelbeobachtungen geben also die Abplattung bei Weitem grösser, als die auf beiden Halbkugeln zusammengenommen.

§. 426.

Zieht man die beiden Gleichungen für x und y des vorigen Paragraphs, von den Gleichungen (A) und (B) des §. 412. ab, die alle Beobachtungen sowohl auf der nördlichen als auf der südlichen Halbkugel umfassen, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x und y, welche natürlicherweise diejenigen sind, welche man dann erhalten würde, wenn man sich zur Bestimmung dieser unbekannten Grössen, blos der auf der nördlichen Halbkugel angestellten Beobachtungen bedient hätte. Sie sind

$$0 = -0,43613 - 34,00000\,x - 16,96158\,y$$
$$0 = +0,19924 - 16,96158\,x + 11,77278\,y$$

und man erhält aus ihnen die Werthe

$$x = +0,0155896$$
$$y = +0,0055369$$

folglich hieraus die Pendellänge unter dem Aequator

$$39 + x = 39,0155896 \text{ engl. Zoll}$$

ferner die Abplattung

$$K = \frac{1}{300} + \frac{y}{39} = \frac{1}{287,75}.$$

§. 427.

Wir wollen nun zeigen, auf welche Art die Beobachtungen der Pendellängen angestellt werden, und welche Correctionen erforderlich sind, um die zur Beobachtung gebrauchten physischen Pendel auf das mathematische Secundenpendel zu reduciren, welches im leeren Raume an der Meeroberfläche schwingt, und dessen Schwingungen unendlich klein sind. Da die Schwingungen des physischen Pendels immer sehr klein angenommen werden, so können wir uns bei dem Gebrauch der früher entwickelten Formel (§. 400.)

$$T = \pi.\sqrt{\frac{l}{G}}.\left\{1 + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{9}{64}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^4 + \ldots\right\}$$

wo α den Winkel der grössten Ausweichung des Pendels von der Verticale bedeutet, immer auf das Quadrat von α beschränken, indem wir die höhern

Potenzen vernachlässigen, und zugleich statt $\sin \frac{1}{2} \alpha^2$, $\frac{1}{4} \alpha^2$ setzen, so dass

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{G}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha\alpha}{16}\right)$$

wird. Denn beträgt auch der Schwingungsbogen 4°, so giebt doch das Glied $\frac{9}{64} \sin \frac{1}{2} \alpha^4$ nur einen Werth

$$= 0{,}0000002086,$$

welche Grösse zu gering ist, als dass sie bei den Beobachtungen, in denen nur einige Tausend Schwingungen hinter einander gezählt werden, in Betracht kommen könnte.

§. 428.

Man stellt eine astronomische Pendeluhr auf, klebt auf die Mitte der Linse des Pendels ein rundes Stück Papier, auf welchem zwei sich unter rechten Winkeln schneidende Linien, die mit dem Horizont Winkel von 45° bilden, so gezogen sind, dass ihr Durchschnittspunkt genau mit der Mitte der Linse zusammenfällt, und setzt vor die Linse, in einer Entfernung von ungefähr sechs Fuss, ein Fernrohr. Hierauf hängt man in der Entfernung von ungefähr sechs Zoll von der Linse ein Pendel auf, das aus einer Metallkugel (am besten Platina) besteht, die an einem metallnen Drath befestigt ist (Borda wählte einen eisernen Drath, weil Eisen eine starke Cohäsion besitzt, also der Drath bei einem bedeutenden Gewicht der Kugel sehr dünn genommen werden kann), so dass wenn das Pendel der Uhr sowohl als das davor hängende in Ruhe ist, der Faden des Letztern durch das Fernrohr gesehen, den Durchschnittspunkt der beiden, auf dem an die Linse geklebten Papier, gezogenen Linien deckt. Um die Bewegung der Pendel noch genauer beobachten zu können, stellt man eine Tafel zwischen dem Fernrohr und beiden Pendeln so auf, dass ihr senkrechter, stehender Rand durch das Fernrohr gesehen, den Drath halbirt, und daher zugleich durch den Durchschnittspunkt der beiden erwähnten Linien geht. Hierauf setzt man beide Pendel in Bewegung, und beobachtet genau den Zeitpunkt, in welchem der Drath mit dem erwähnten

Durchschnittspunkt zugleich, an den Rand der Tafel tritt. Nachdem diese Coincidenz statt gefunden hat, entfernen sich die Pendel wieder von einander, bis der Winkel, den beide beim Eintreten in den Rand der Tafel bilden, ein Maximum geworden ist; hernach nähern sie sich wieder, und zuletzt tritt eine zweite Coincidenz ein, deren Zeitpunkt man ebenfalls bemerken muss.

§. 429.

Aus dem Unterschiede der Zeiten, zu welchen diese beiden Coincidenzen statt fanden, verbunden mit der Länge des gebrauchten Pendels, lässt sich nun die Länge des an dem Beobachtungsorte statt findenden Secundenpendels bestimmen. Man begreift aber leicht, dass wegen den vielleicht vorkommenden Fehlern in den Beobachtungen, da man die wahre Zeit der Coincidenz beider Pendel nur innerhalb der Gränzen von 30 bis 40 Secunden bestimmen kann, und genau genommen, eine mathematische Coincidenz bei der verticalen Lage der Pendel in welcher man beobachtet, wohl nie statt findet, diese Beobachtungen mehremal wiederholt werden müssen, und dann aus den einzelnen Bestimmungen, nach den gehörig angebrachten Reductionen, das arithmetische Mittel genommen werden muss.

§. 430.

Die Beobachtung der Coincidenzen der Pendel, dient zur Bestimmung der Anzahl der Schwingungen, die das eine Pendel während des Zeitraums zweier auf einander folgenden Coincidenzen gemacht hat, sobald die Anzahl der Schwingungen des andern in demselben Zeitraum bekannt ist. Da nun die verflossene Secundenzahl, welche die Uhr angiebt, zugleich die Anzahl der Schwingungen des an der Uhr befindlichen Pendels bestimmt, so sieht man, dass man sich hierdurch die Mühe erspart, die Schwingungen des andern zu zählen. Wir bezeichnen das an der Uhr befindliche Pendel durch A, das andere durch B, und nehmen an, man habe durch einen

vorläufigen Versuch gefunden, dass A während der Zeit in welcher B eine Schwingung macht, n Schwingungen + einem Theile einer Schwingung vollendet habe.

Fangen nun beide Pendel zugleich an zu schwingen, so wird, nachdem B eine Schwingung vollendet hat, A demselben vorausgeeilt seyn, und die $n + 1$te Schwingung angefangen haben, welches ebenfalls bei jeder folgenden Schwingung des Pendels B geschieht; dieses setzt sich so lange fort, bis beide Pendel sich zugleich in ihren grössten Ausweichungen von der Verticale, auf entgegengesetzten Seiten derselben befinden, so dass dann A eine Schwingung mehr als die $n$fache Anzahl der Schwingungen von B beträgt, gemacht hat. Hierauf nimmt der Winkel zwischen beiden Pendeln wieder ab, indem, wenn B die grösste Ausweichung auf der einen Seite erreicht, A dieselbe auf der andern Seite schon verlassen hat, so dass endlich beide zu gleicher Zeit die grösste Ausweichung auf einer und derselben Seite erlangen; dann hat A noch eine Schwingung über die $n$fache Anzahl der Schwingungen von B genommen, und man sieht leicht, dass wenn man die Anzahl der Schwingungen von A durch N, die von B durch N' bezeichnet

$$N = n.\ N' + 2$$

seyn wird. Sollte A in der Zeit, in welcher B eine Schwingung macht, n Schwingungen — einem Theil einer Schwingung vollendet haben, so würde man durch eine ähnliche Schlussfolge wie vorhin, finden, dass man

$$N = n.\ N' - 2$$

haben muss. Bedeutet also N die Anzahl der Secunden die man zwischen zwei auf einander folgenden Coincidenzen beobachtet hat, so wird die Anzahl der Schwingungen des beobachteten Pendels durch die Formel

$$N' = \frac{N \mp 2}{n}$$

ausgedrückt, wo man das obere Zeichen nehmen muss, jenachdem das Uhrpendel mehr oder weniger als n Schwingungen, während einer Schwingung des andern Pendels macht.

§. 431.

Da die Uhren gewöhnlich ungefähr nach Sternzeit gehen, so müssen wir die beobachtete Anzahl Secunden, oder die gleichgeltende Anzahl von Schwingungen des Uhrpendels, die zwischen zwei auf einander folgenden Coincidenzen statt fand, auf mittlere Sonnenzeit reduciren. Geht die Uhr genau nach Sternzeit, so wird ihr Pendel in einem Sterntage 86400 Schwingungen machen; da dies aber nie genau statt findet, so sei die Anzahl derselben $86400 + a$, wo a gewöhnlich gegen 86400 nur klein ist, und sich durch astronomische Beobachtungen leicht ausmitteln lässt. Die Länge eines Sterntages in mittlerer Zeit ausgedrückt, beträgt

$$23^h\ 56'\ 4''09 = 86164''09;$$

bezeichnet man also die Anzahl der Schwingungen, die das Pendel der Uhr in einem mittlern Sonnentage macht, durch x, so wird man x durch die Proportion

$$86164''09 : 86400 = 86400 + a : x$$

finden. Dies giebt

$$x = \frac{86400\ (86400 + a)}{86164{,}09}$$

$$= 86636''51 + a + 0{,}0027\,a.$$

So war z. B. bei den ersten Beobachtungen, die Borda anstellte, $a = 13''4$, folglich wird

$$x = 86650 \text{ Secunden.}$$

§. 432.

Bei der Untersuchung über die Länge eines Pendels, welches seine Schwingungen in einer gegebenen Zeit vollenden soll, setzt man immer voraus, dass die Schwingungen unendlich klein sind. Da nun ein jedes wirkliche Pendel immer endliche Bogen beschreibt, und hierzu nach §. 427. mehr Zeit erforderlich ist, als zu einer unendlich kleinen Schwingung, so sieht man leicht, dass in einem gegebenen Zeitraume ein gewisses Pendel mehr unendlich kleine Schwingungen beschreibt, als die Beobachtung der endlichen Schwingungen angiebt. Die Reduction der beobachteten endlichen Schwingungen auf die Anzahl

der in demselben Zeitraum beschriebenen unendlich kleinen, würde nun sehr leicht seyn, wenn alle Schwingungsbogen immer gleich blieben, allein der Widerstand der Luft sowohl, als auch die, obgleich geringe, Reibung, vermindern nach und nach die Amplitude der Schwingungen, so dass zuletzt die Schwingungen zwar unendlich klein werden, aber dann nicht mehr zu beobachten sind.

Borda fand rücksichtlich des Ganges seines Pendels folgende Resultate:

Beobachtungszeit.	Grösste Ausweichung d. Pendels.
0^h	120'0
1 .	61,2
2 .	35,4
3 .	21,9
4 .	14,1
5 .	9,4
6 .	6,3
7 .	4,1
8 .	2,7
9 .	1,8
10 .	1,2
11 .	0,8
12 .	0,5.

Man könnte nun annehmen, dass das Pendel während der Zeit zweier Coincidenzen, eben so viel Schwingungen bei seinen veränderlichen Schwingungsbogen gemacht hätte, als ob die Ausweichung desselben immer constant, und zwar dem arithmetischen Mittel der Ausweichungen zur Zeit der beiden Coincidenzen gleich gewesen wäre. Bezeichnet man daher die erste Ausweichung durch β, die zweite durch β', so wird die mittlere Ausweichung des Pendels $\frac{\beta + \beta'}{2}$ seyn, und wenn man diesen Werth statt α in die Formel (§. 427.) setzt, so kommt

$$T = \pi . \sqrt{\frac{l}{G}} . \left(1 + \frac{(\beta + \beta')^2}{64}\right)$$

$$= \pi . \sqrt{\frac{l}{G}} . \left(1 + \left(\frac{\beta + \beta'}{8}\right)^2\right)$$

wo nun T die für alle Schwingungen gleich gross anzunehmende Zeit bedeutet. Setzt man die Zeit, in welcher dasselbe Pendel seine unendlich kleinen Schwingungen vollendet, $= T'$, so ist, weil dann $\beta = 0 = \beta'$

$$T' = \pi . \sqrt{\frac{l}{G}},$$

folglich, wenn man diesen Werth in obige Formel substituirt

$$T = T' . \left[1 + \left(\frac{\beta + \beta'}{8}\right)^2\right].$$

Nun habe das Pendel wirklich m Schwingungen gemacht, so beträgt der ganze Zeitraum, innerhalb dessen die Schwingungen beobachtet sind, mT, und wenn man die Anzahl der Schwingungen, welche dasselbe Pendel bei unendlich kleinen Bogen in derselben Zeit gemacht hätte, durch m' bezeichnet, so ist

$$mT = m'T'$$

folglich, wenn man statt T seinen Werth aus obiger Formel setzt, und durch T auf beiden Seiten dividirt

$$m' = m . \left[1 + \left(\frac{\beta + \beta'}{8}\right)^2\right].$$

Es sey z. B. $m = 2196$, $\beta = 64'$, $\beta' = 32'$, so hat man $\frac{\beta + \beta'}{8} = 12$, oder da man dies auf Theile des Kreisbogens, dessen Halbmesser $= 1$ ist, reduciren muss

$$\frac{\beta + \beta'}{8} = 0,0034907$$

und hierdurch ergiebt sich

$$m' = 2196,026758;$$

also würde das Pendel, wenn es nur unendlich kleine Bogen beschrieben hätte, bei 2196 Schwingungen nur ungefähr den vierzigsten Theil einer Schwingung mehr gemacht haben.

Diese Art der Correction würde nun freilich bei sehr kleinen Bogen, von einigen Minuten, keinen merklichen Fehler hervorgebracht haben, da die Annahme des arithmetischen Mittels unter diesen Umständen sich nicht weit von der Wahrheit entfernen kann. Allein wenn die Bogen etwas grösser sind, so

muss man eine genauere Correctionsart wählen, die sich aus den Beobachtungen selbst ableiten lässt. Man sieht nämlich aus der in diesem Paragraph gegebenen Tabelle, dass nach gleichen Zwischenzeiten die Ausweichungen des Pendels beinahe in geometrischer Proportion stehen. Denn man hat

120 : 61,2 = 61,2 : 31,2 statt 35,4
61,2 : 35,4 = 35,4 : 20,5 statt 21,9
35,4 : 21,9 = 21,9 : 13,6 statt 14,1
etc. etc. etc.

so dass man annehmen kann, die Abnahme der Schwingungsbogen geschehe in geometrischer Progression, so dass wenn 6 die erste Ausweichung, δ den Exponenten der geometrischen Progression bedeutet, die Ausweichungen nach und nach 6, $6.\delta$, $6.\delta^2$, $6.\delta^3$ .... $6.\delta^{m-1}$ seyn werden, wo bekanntlich das letzte Glied $6.\delta^{m-1}$ nichts anders als der zuletzt beobachtete Schwingungsbogen $6'$ ist, und m die Anzahl der Schwingungen bedeutet. Entsprechen also diesen Amplituden die Schwingungszeiten T, T_1, T_2, T_3 .... T_{m-1}, so wird, wenn T' wie vorher die Zeit einer unendlich kleinen Schwingung bedeutet

$$T = T'.(1 + \tfrac{1}{16}\,66)$$
$$T_1 = T'.(1 + \tfrac{1}{16}\,66\delta\delta)$$
$$T_2 = T'.(1 + \tfrac{1}{16}\,66\delta^4)$$
$$T_3 = T'.(1 + \tfrac{1}{16}\,66\delta^6)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$T_{m-1} = T'.(1 + \tfrac{1}{16}\,66\,\delta^{2m-2}).$$

Setzt man also

$$T + T_1 + T_2 + \ldots\ldots = \Sigma.\,T$$
$$1 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots + \delta^{2m-2} = \Delta$$

so kommt, indem man alle vorigen Gleichungen zusammenaddirt

$$\Sigma.\,T = mT' + \tfrac{1}{16}\,T'\Delta\,66$$

da m solche Gleichungen vorhanden sind. Ist nun die Anzahl der Schwingungen die dasselbe Pendel in derselben Zeit $\Sigma.\,T$ machen würde, wenn die Bogen unendlich klein sind, $= m'$, so ist ebenfalls

$$\Sigma.\,T = m'.\,T',$$

folglich, wenn man diesen Werth von $\Sigma. T$ in voriger Gleichung substituirt, und durch T' dividirt

$$m' = m + \tfrac{1}{16} \Delta \, 66.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$1 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots + \delta^{2m-2} = \frac{1 - \delta^{2m}}{1 - \delta\delta}$$

also auch

$$\Delta = \frac{1 - \delta^{2m}}{1 - \delta\delta} = \frac{66 - (6.\delta^{m-1})^2 \, \delta\delta}{66 - 66\delta\delta}.$$

Die Gleichung $6.\,\delta^{m-1} = 6'$ giebt

$$\delta = \left(\frac{6'}{6}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \text{ folglich wird auch}$$

$$\delta\delta = \left(\frac{6'}{6}\right)^{\frac{2}{m-1}}.$$

Sieht man den hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Theil als eine Exponentialgrösse an, und entwickelt denselben nach den bekannten Formeln in eine Reihe, so kommt

$$\delta\delta = 1 + \frac{2}{m-1} \log \frac{6'}{6} + \frac{2}{(m-1)^2} \left(\log \frac{6'}{6}\right)^2 + \ldots;$$

da aber m immer eine sehr grosse Zahl ist, so kann man die höhern Potenzen des Bruchs $\frac{1}{m-1}$ vernachlässigen, und es bleibt

$$\delta\delta = 1 + \frac{2}{m-1} \log \frac{6'}{6}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$66 - 66\delta\delta = - \frac{26^2}{m-1} \log \frac{6'}{6}$$

$$= + \frac{26^2}{m} . \log \frac{6}{6'}.$$

Da ferner $\delta\delta$ sehr nahe $= 1$ ist, so kann man

$$(6.\,\delta^{m-1})^2 \, \delta\delta = (6.\,\delta^{m-1})^2 = 6'6'$$

setzen, so dass also endlich

$$\Delta = \frac{66 - 6'6'}{\frac{266}{m} \log \frac{6}{6'}}$$

wird. Setzt man diesen Werth von Δ in die Gleichung

$$m' = m + \tfrac{1}{16}\,\Delta\beta\beta$$

so erhält man

$$m' = m + \frac{m}{32} \cdot \frac{\beta\beta - \beta'\beta'}{\log\beta - \log\beta'}.$$

Man muss hierbei bemerken, dass die hierbei zu gebrauchenden Logarithmen, natürliche sind. Will man daher die gewöhnlichen anwenden, so muss man den Zähler noch mit dem Modulus der gewöhnlichen Logarithmen $k = 0{,}4342944$ multipliciren, so dass dann

$$m' = m + \frac{k.\,m}{32} \cdot \frac{\beta\beta - \beta'\beta'}{\log\beta - \log\beta'}$$

wird. Diese Formel lässt sich noch etwas bequemer zur Berechnung machen; denn es ist $\beta\beta - \beta'\beta' = (\beta + \beta')\,(\beta - \beta')$, und da man doch die in Minuten angegebenen Werthe von β, β' in Theile des Bogens verwandeln muss, so kann man wegen der Kleinheit diesen Bogen $\beta + \beta' = \sin(\beta + \beta')$, $\beta - \beta' = \sin(\beta - \beta')$ also $\beta\beta - \beta'\beta' = \sin(\beta + \beta').\,\sin(\beta - \beta)$, setzen, so dass daher

$$m' = m + \frac{km}{32} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta').\,\sin(\beta - \beta')}{\log\beta - \log\beta'}.$$

Es ist fast überflüssig zu erwähnen, dass man bei der Berechnung des Nenners $\log\beta - \log\beta'$ sich entweder der gewöhnlichen Logarithmen der Sinus bedienen, oder die Winkel β, β' als blosse Zahlen betrachten kann.

§. 433.

Nehmen wir das Beispiel des vorigen Paragraphs wieder vor, wo $m = 2196$, $\beta = 64'$, $\beta' = 32'$ war, so hat man $\log\beta - \log\beta' = 0.3010300$

$$\begin{aligned}
\log k &= 9.6377843 \\
\log m &= 3.3416323 \\
\log \sin(\beta + \beta') &= 8.4459409 \\
\log \sin(\beta + \beta') &= 7.9688698 \\
\log \tfrac{1}{32} &= \underline{8.4948500} \\
&\ 7.8890773.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & 7.8890773 \\ \log(\log 6 - \log 6') = & \underline{9.4786098} \\ & 8.4104675 = 0{,}02573 \end{array}$$

folglich erhält man $m' = 2196{,}02573$, etwas weniges geringer als nach voriger Methode, wo das arithmetische Mittel aus den beiden Ausweichungen angewendet wurde.

§. 434.

Es ist zu bemerken, dass der Widerstand der Luft keinen Einfluss auf die Dauer der unendlich kleinen Schwingung eines Pendels hat. Da nämlich bei so kleinen Geschwindigkeiten, wie das sich bewegende Pendel hat, die Kraft des Widerstandes, welchen die Luft der Bewegung des Pendels entgegensetzt, sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält, und die Geschwindigkeit des Pendels selbst in jedem Punkte durch $l\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt wird, so kann man dieselbe durch $\mu l^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}$ bezeichnen, wo μ einen für jedes Pendel constanten, von der Dichtigkeit der Luft, und der Materie aus welcher das Pendel besteht, abhängenden Coefficienten bedeutet. Diese Kraft sucht den Winkel φ zu vergrössern, und man hat daher für die Bewegung des Pendels in der Luft, die Gleichung:

$$l\frac{dd\varphi}{dt^2} = -G \sin\varphi + \mu ll \frac{d\varphi^2}{dt^2}$$

wo G wie gewöhnlich die Schwerkraft bedeutet. Um diese Gleichung integriren zu können, müssen wir dieselbe etwas transformiren, welches bequem dadurch geschieht, dass wir nicht mehr t, sondern φ als die unabhängige veränderliche Grösse (für welche das zweite Differential Null ist) betrachten. Es ist dann

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} = \frac{1}{dt}.\, d.\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi.\, ddt}{dt^3},$$

folglich wird vorige Gleichung

$$-\frac{d\varphi.\, ddt}{dt^3} = -G. \sin\varphi + \mu ll. \frac{d\varphi^2}{dt^2}.$$

Multipliciren wir die ganze Gleichung durch dt^2 und dividiren durch $d\varphi^2$, so lässt sie sich so schreiben

$$-l\frac{ddt}{d\varphi^2} = -G\sin\varphi.\frac{dt^3}{d\varphi^3} + \mu ll\frac{dt}{d\varphi}.$$

Man setze nun

$$\frac{dt}{d\varphi} = \omega^{-1/2}, \text{ so erhält man}$$

$$\frac{ddt}{d\varphi^2} = -\frac{d\omega}{2d\varphi}.\omega^{-3/2},$$

und die Gleichung wird durch Substitution dieser Werthe

$$\frac{ld\omega}{2d\varphi}.\omega^{-3/2} = -G\sin\varphi.\omega^{-3/2} + \mu ll\omega^{-1/2}.$$

Multiplicirt man durch $2d\varphi.\omega^{3/2}$, so kommt

$$d\omega - 2\mu ll\omega d\varphi = -2G.\sin\varphi\, d\varphi$$

und diese lineare Gleichung lässt sich bekanntlich integriren, sobald sie mit dem Factor $e^{-2\mu l\varphi}$ multiplicirt wird; ihr Integral ist

$$l\omega e^{-2\mu l\varphi} = C - 2G\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und C eine Constante bedeutet. Um die hinter dem Gleichheitszeichen angegebene Integration auszuführen, integrire man theilweise, so ist

$$1)\int\sin\varphi\, d\varphi.e^{-2\mu l\varphi} = -\cos\varphi.e^{-2\mu l\varphi} - 2\mu l\int\cos\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi}.$$

$$2)\int\cos\varphi\, d\varphi.e^{-2\mu l\varphi} = +\sin\varphi.e^{-2\mu l\varphi} + 2\mu l\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi}.$$

Man multiplicire den zweiten Ausdruck durch $2\mu l$, und ziehe ihn dann vom ersten ab, so fällt das Integral $\int\cos\varphi.d\varphi.e^{-2\mu l\varphi}$ ganz heraus, und es bleibt

$$\int\sin\varphi.d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi} = -(\cos\varphi + 2\mu l\sin\varphi)\,e^{-2\mu l\varphi} - 4\mu^2 l^2\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi}.$$

Hieraus findet sich sogleich

$$\int\sin\varphi\, d\varphi\, e^{-2\mu l\varphi} = -\frac{\cos\varphi + 2\mu l\sin\varphi}{1 + 4\mu^2 l^2}.e^{-2\mu l\varphi}$$

also wenn man diesen Werth in die obere Gleichung substituirt; und zugleich statt ω seinen Werth $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$ setzt

$$l.\frac{d\varphi^2}{dt^2}.\,e^{-2\mu l\varphi} = C + 2G.\frac{\cos\varphi + 2\mu l \sin\varphi}{1+4\mu^2l^2}.\,e^{-2\mu l\varphi}.$$

Um die Constante zu bestimmen, sei bei dem Anfange der Bewegung der Werth von $\varphi = \alpha$, so ist zugleich die Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$; man hat daher diese Gleichung

$$0 = C + 2G\,\frac{\cos\alpha + 2\mu l.\,\sin\alpha}{1+4\mu^2l^2}\,e^{-2\mu l\varphi}$$

folglich, wenn man diese von der obern abzieht, und zugleich auf beiden Seiten mit $e^{+2\mu l\varphi}$ multiplicirt

$$l\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2G.\,\frac{\cos\varphi + 2\mu l\,\sin\varphi}{1+4\mu^2l^2}$$

$$-2G.\,\frac{\cos\alpha + 2\mu l.\,\sin\alpha}{1+4\mu^2l^2}\,e^{-2\mu l(\alpha-\varphi)}.$$

Der Kürze wegen setze man noch

$$\frac{G}{l\,(1+4\mu^2l^2)} = \gamma\gamma$$

$$2\mu l = \lambda,\quad \gamma dt = d\theta$$

so lässt sich diese Gleichung auch so schreiben

$$\frac{d\varphi^2}{d\theta^2} = 2.(\cos\varphi + \lambda.\,\sin\varphi)$$

$$-\,2(\cos\alpha + \lambda.\,\sin\alpha).\,e^{-\lambda(\alpha-\varphi)};$$

allein weiter lässt sich diese Gleichung nicht integriren, wenn wir nicht die Voraussetzung machen, dass die Winkel α und φ so klein sind, dass wir alle Potenzen die den Cubus übersteigen, weglassen können. Entwickelt man dann die verschiedenen transcendenten Grössen in Reihen, und zieht gehörig zusammen, so kommt

$$\frac{d\varphi^2}{d\theta^2} = (\alpha\alpha - \varphi\varphi)(1+\lambda\lambda)\left[1+\frac{\lambda}{3}\left(\varphi - \frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\varphi}\right)\right]$$

oder wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht und dann $d\theta$ sucht

$$d\theta.\sqrt{1+\lambda\lambda} = \frac{-d\phi}{\sqrt{\alpha\alpha-\phi\phi}}.\left[1-\frac{\lambda}{6}(\phi-\frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\phi}\right].$$

Wir bedienen uns bei der Ausziehung der Quadratwurzel des negativen Vorzeichens, weil, wenn t wächst, auch θ zunimmt (weil $\gamma dt = d\theta$); ϕ hingegen abnimmt. Wir setzen nun, um vorige Formel zu integriren

$$\phi = \alpha.\cos u, \quad d\phi = -\alpha.\sin u.\, du,$$

$$\frac{d\phi}{\sqrt{\alpha\alpha-\phi\phi}} = -du,$$

folglich wird durch die Substitution dieser Werthe

$$d\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = du\left[1-\frac{\lambda\alpha}{6}\left(\cos u-\frac{2}{1+\cos u}\right)\right]$$

und hiervon ist das Integral

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = u-\frac{\lambda\alpha}{6}(\sin u - 2\tang\tfrac{1}{2}u).$$

Die hinzuzufügende Constante lassen wir sogleich weg, weil für θ oder $t = 0$, $\phi = \alpha$, also $u = 0$ wird. Um nun den Werth von u zu finden, welcher dem Ende der Schwingung entspricht, müssen wir bedenken, dass wenn die Schwingung sich endigt, die Geschwindigkeit des Pendels Null ist, d. h. wir müssen $\frac{d\phi}{dt}$ oder $\frac{d\phi}{d\theta} = 0$ haben; die Gleichung

$$\frac{d\phi^2}{d\theta^2} = (\alpha\alpha-\phi\phi)(1+\lambda\lambda)\left[1+\frac{\lambda}{3}\left(\phi-\frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\phi}\right)\right]$$

giebt uns nun für diejenigen Werthe von ϕ, bei denen $\frac{d\phi}{d\theta} = 0$ ist, die Bedingung

$$0 = (\alpha\alpha-\phi\phi)\left[1+\frac{\lambda}{3}\left(\phi-\frac{2\alpha\alpha}{\alpha+\phi}\right)\right].$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, indem man $\alpha-\phi = 0$, also $\phi = \alpha$ setzt, welches bekanntlich für den Anfang der Bewegung der Fall ist. Dividirt man dann durch $\alpha-\phi$, und setzt den Quotienten wieder Null, so kommt

$$0 = \alpha+\phi+\frac{\lambda}{3}(\alpha\phi+\phi\phi-2\alpha\alpha)$$

und man sieht, dass dieser Gleichung beinahe Genüge geleistet werden würde, indem man $\varphi + \alpha = 0$ setzt, folglich wird man $\varphi + \alpha = b\alpha\alpha$ nehmen können, wo b ein constanter Coefficient ist; setzt man also in voriger Gleichung für φ, $-\alpha + b\alpha\alpha$, so kommt mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von α

$$0 = b\alpha\alpha - \frac{2\lambda}{3}\alpha\alpha$$

also $b = \frac{2\lambda}{3}$; für das Ende der Schwingung hat man

$$\varphi = -\alpha + \frac{2\lambda}{3}.\alpha\alpha$$

und die Gleichung $\varphi = \alpha.\cos u$ giebt den entsprechenden Werth von u,

$$\cos u = -1 + \frac{2\lambda}{3}\alpha.$$

Man findet hieraus $u = \pi - \sqrt{\frac{4\lambda}{3}\alpha}$, wo π die halbe Peripherie eines mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreises bedeutet. Substituirt man diesen Werth von u in die Gleichung

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = u - \frac{\lambda\alpha}{6}(\sin u - 2\tan\tfrac{1}{2}u)$$

so kommt

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = \pi - 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}}$$
$$-\frac{\lambda\alpha}{6}\left(\sin 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} - 2\cot\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}}\right)$$

und da man wegen der Kleinheit des Bogens α,

$$\sin 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} = 2\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}},\quad \cot\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha\lambda}}$$

nehmen kann, so erhält man

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = \pi - \sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} - \left(\frac{\alpha\lambda}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nun war $\theta = \gamma t = \frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{l}.\sqrt{1+\lambda\lambda}}$, also

$$\theta\sqrt{1+\lambda\lambda} = t\sqrt{\frac{G}{l}}$$

und hierdurch findet sich

$$t\sqrt{\frac{G}{l}} = \pi - \sqrt{\frac{\alpha\lambda}{3}} - \left(\frac{\alpha\lambda}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

wo t die Zeit einer vollständigen Schwingung bedeutet. Nimmt man die Schwingung unendlich klein, so bleibt blos

$$t\sqrt{\frac{G}{l}} = \pi$$

welcher Ausdruck von dem Widerstande der Luft unabhängig ist. Es ist nur zu berücksichtigen, dass G einen andern Werth in der Luft als im leeren Raume hat, indem ersterer zu letztern sich verhalten muss, wie das Gewicht des Pendels in der Luft, zu dem im leeren Raume.

§. 435.

Ausser der in §. 432. erwähnten Verbesserung der Anzahl der Schwingungen kann man noch eine andere anbringen, die von der physischen Beschaffenheit des Pendels selbst abhängt. Der Drath nämlich, an welchem die Kugel befestigt ist, besitzt Ausdehnbarkeit, so dass während der Bewegung des Pendels, dieser Drath nicht immer einerlei Länge behalten wird. Man begreift leicht, dass die beiden Ursachen, welche den Drath verlängern, in der Veränderung des Gewichts der Kugel, und in der Centrifugalkraft liegen. Da nämlich die Schwere in verticaler Richtung wirkt, so wird die Kugel bei einer schiefen Lage des Pendels nicht mit ihrem ganzen Gewicht den Drath spannen können, so dass also hierdurch die Länge des Pendels abnähme, so wie es in eine andere als die verticale Lage gelangt. Die Centrifugalkraft hingegen trägt wieder zu seiner Verlängerung bei. Um den Einfluss dieser Veränderungen auf die Bewegung des Pendels auszumitteln, sey l' die Länge des Pendels, sobald es vertical hängt und sich in Ruhe befindet; das Gewicht der Kugel sey p, und man habe gefunden, dass sich der Drath durch ein

Gewicht $= P$ um die Grösse $l' \varepsilon$ ausdehnt, wo ε eine äusserst kleine Zahl ist; das Gewicht der Kugel bringt dann eine Verlängerung $\frac{p}{P} . l' . \varepsilon$ hervor, sobald das Pendel vertical hängt; macht dasselbe aber einen Winkel $= \phi$ mit der Verticale, so ist die Verlängerung des Pendels $\frac{p}{P} . l' . \varepsilon . \cos \phi$, so dass die Länge des Pendels allgemein

$$= l' - \frac{p}{P} l' . \varepsilon . (1 - \cos \phi).$$

Nennt man die Geschwindigkeit v, so ist bekanntlich die Centrifugalkraft der Masse der Kugel und dem Quadrate der Geschwindigkeit direct, dem Halbmesser des Kreises aber umgekehrt proportional, also kann man das Gewicht, das mit der Centrifugalkraft gleiche Wirkung hat, durch

$$\frac{p}{G} . \frac{vv}{l'}$$

ausdrücken, da die Masse der Kugel gleich dem Gewicht derselben dividirt durch die Kraft der Schwere ist. Die Verlängerung, welche sie am Pendel hervorbringt wird daher $\frac{p}{G} . \frac{vv}{l'} . \frac{l' \varepsilon}{P}$, oder wenn man statt vv seinen Werth $\frac{l'^2 d\phi^2}{dt^2}$ setzt

$$= \frac{p}{P} l' \varepsilon . \frac{l'}{G} . \frac{d\phi^2}{dt^2}$$

folglich wird die Länge des Pendels allgemein durch

$$l = l' - \frac{p}{P} l' \varepsilon \left(1 - \cos \phi - \frac{l}{G} . \frac{d\phi^2}{dt^2}\right)$$

ausgedrückt werden. Setzt man hierin aus §. 398. den genäherten Werth

$$\frac{l'}{G} . \frac{d\phi^2}{dt^2} = 2 \cos \phi - 2 \cos \alpha$$

und nimmt der Kürze wegen $\frac{p}{P} . \varepsilon = \mu$, wo μ so klein

seyn wird, dass wir alle Potenzen dieser Grösse vernachlässigen können, so kommt

$$l = l' - \mu l' (1 - 3 \cos\varphi + 2 \cos\alpha).$$

§. 436.

Nun ist nach §. 397. die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels

$$d.\,ds + G.\,\sin\varphi.\,dt^2 = 0$$

und da bekanntlich das Differential des Bogens

$$ds = \sqrt{ll d\varphi^2 + dl^2}$$

so wird, wenn wir hierin den Werth von l substituiren, und die Potenzen von μ weglassen

$$ds = l' d\varphi - \mu l' (1 - 3 \cos\varphi + 2 \cos\alpha)\, d\varphi.$$

$$dds = l' dd\varphi - \mu l' (1 - 3 \cos\varphi + 2 \cos\alpha)\, dd\varphi - 3 \mu l' \sin\varphi\, d\varphi^2.$$

Man kann nun in den mit μ multiplicirten Gliedern näherungsweise

$$l' dd\varphi = - G \sin\varphi.\, dt^2$$

$$l' d\varphi^2 = 2G (\cos\varphi - \cos\alpha)\, dt^2$$

setzen, so dass

$$dds = l\, dd\varphi + \mu G (1 - 9 \cos\varphi + 8 \cos\alpha).\, \sin\varphi.\, dt^2$$

wird, und man erhält die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels

$$\frac{l' dd\varphi}{dt^2} + \mu G (1 - 9 \cos\varphi + 8 \cos\alpha) \sin\varphi = - G \sin\varphi.$$

Multiplicirt man die ganze Gleichung durch $2d\varphi$ und integrirt dann, so kommt

$$\frac{l' d\varphi^2}{dt^2} = 2G \cos\varphi + 2\mu G (\cos\varphi - \tfrac{9}{2} \cos\varphi^2 + 8 \cos\alpha \cos\varphi) + C.$$

Um die Constante C zu bestimmen, bemerke man, dass für $\varphi = \alpha$ die Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist, man hat dann

$$0 = 2G \cos\alpha + 2\mu G (\cos\alpha - \tfrac{9}{2} \cos\alpha^2 + 8 \cos\alpha^2) + C.$$

also

$$\frac{l' d\varphi^2}{dt^2} = 2G.\, (\cos\varphi - \cos\alpha) + 2\mu G (\cos\varphi - \cos\alpha)(1 - \tfrac{9}{2} \cos\varphi + \tfrac{7}{2} \cos\alpha).$$

Der Factor $1 - \frac{9}{2} \cos\varphi + \frac{7}{2} \cos\alpha$ wird, wenn man die höhern Potenzen der Winkel vernachlässigt, $= \frac{9}{4} \varphi\varphi - \frac{7}{4} \alpha\alpha$, so dass also

$$\frac{l' d\varphi^2}{dt^2} = 2G(\cos\varphi - \cos\alpha) \left[1 + \frac{\mu}{4}(9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha)\right]$$

wird. Hieraus erhält man

$$dt \sqrt{\frac{G}{l'}} = - \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos - 2\cos\alpha}}$$
$$+ \frac{\mu}{8} \cdot \frac{9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha}} d\varphi.$$

indem man wie gewöhnlich das negative Vorzeichen bei der Ausziehung der Quadratwurzel nimmt, und die höhern Potenzen von μ vernachlässigt. Integrirt man, so kommt

$$t \sqrt{\frac{G}{l}} = \pi \left(1 + \frac{1}{16} \alpha\alpha\right)$$
$$+ \frac{\mu}{8} \int \frac{9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha}} \cdot d\varphi$$

da das Integral des ersten Theils zwischen den Gränzen $\varphi = + \alpha$ bis $\varphi = - \alpha$ schon bekannt ist. Um den zweiten Theil zu integriren, setze man näherungsweise

$$2\cos\varphi - 2\cos\alpha = \alpha\alpha - \varphi\varphi$$

und nehme dann $\varphi = \alpha . \cos u$, so wird

$$\frac{9\varphi\varphi - 7\alpha\alpha}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha}} d\varphi = - \alpha\alpha\, du\, (9 \cos u^2 - 7)$$
$$= - \alpha\alpha\, du \left(\frac{9}{2} \cos 2u - \frac{5}{2}\right)$$

und hiervon ist das Integral $+ \alpha\alpha\left(\frac{9}{4} \sin 2u + \frac{5}{2} u\right)$; zwischen den Gränzen $u = 0$ und $u = \pi$ genommen, giebt dasselbe $\frac{5}{2} \pi\alpha\alpha$, folglich wird

$$t \sqrt{\frac{G}{l}} = \pi \left(1 + \frac{1}{16} \alpha\alpha + \frac{5}{16} \mu\alpha\alpha\right).$$

§. 437.

Man sieht hieraus, dass die aus der Veränderung des Pendels entspringende Correction sich zu derjenigen, die wegen der endlichen Schwingungsbogen an-

gebracht werden musste, wie $5\mu : 1$ verhält; d. h. wie $\frac{5p}{P} . \varepsilon : 1$. Nun fand Borda durch einen Versuch, dass der Drath sich bei einem Gewicht P, dessen Grösse der 19te Theil des Gewichts der Kugel war, um $\frac{1}{20300}$ ausdehnte, folglich ist

$$p = 19P, \quad \varepsilon = \frac{1}{20300}$$

$$\frac{5p}{P} \varepsilon : 1 = 95 : 20300$$
$$= 1 : 214.$$

Die von der Ausdehnung des Pendels herrührende Veränderung ist daher so klein, dass man sie völlig vernachlässigen kann.

§. 438.

Wir wollen nun die erwähnten Correctionen auf einige von Borda angestellte Beobachtungen anwenden, und dann suchen, wie viel unendlich kleine Schwingungen sein Pendel in einem mittlern Sonnentage gemacht haben würde. Die Beobachtungen waren folgende:

Coincidenz	Bogen	Zwischenzeit
7^h 45′ 56″	64′	
8 . 59. 10 .	32.	4394″
10 . 12. 40 .	19.	4410
11 . 26. 29 .	11,5.	4429
12 . 39. 3 .	7.	4354.

Da das Pendel der Uhr, wie schon erwähnt ist, etwas mehr als doppelt so schnell ging als das beobachtete Pendel, so ist in der Formel (§. 430.)

$$N' = \frac{N-2}{n}$$

$n = 2$, und man hat daher

$N = 4394$;	$N' = 2196$
4410;	2204
4429;	2213,5
4353;	2176.

Berechnet man die Correctionen, wegen der Reduction auf unendlich kleine Bogen, durch die Formel (§. 432.)

$$\frac{km}{32} \cdot \frac{sin(6 + 6') \, sin(6 - 6')}{log\, 6 - log\, 6'}$$

so findet man die in denselben Zwischenzeiten geschehenen unendlich kleinen Schwingungen

$$m' = 2196{,}0257$$
$$2204{,}0068$$
$$2213{,}5027$$
$$2176{,}0010.$$

Um nun zu bestimmen wie viel Schwingungen dieses Pendel in einem mittlern Sonnentage gemacht haben würde, brauchen wir nur zu bemerken, dass das Uhrpendel in derselben Zeit 86650 Schwingungen machte (§. 431.), und man kann daher die Proportion anwenden

$$N : m' = 86650 : y$$

wo dann y die gesuchte Anzahl Schwingungen, die in einem mittlern Sonnentage geschehen, bedeutet. Man findet in Zahlen:

$$y = 43305{,}79$$
$$43305{,}49$$
$$43305{,}49$$
$$43305{,}16$$

also im Mittel 43305,48.

§. 439.

Wir haben bisher das Pendel immer als ein mathematisches betrachtet, d. h. als ein solches, welches aus einem materiellen Punkte besteht, der an einem Faden ohne Schwere, befestigt ist. Da nun aber alle in der Ausübung vorkommenden Pendel gleichsam aus unendlich vielen materiellen Punkten bestehen, die in verschiedenen Entfernungen von der Drehungsaxe angebracht sind, so müssen wir untersuchen, wie man aus der Länge und Gestalt eines solchen Pendels die Länge eines mathematischen Pendels finden kann, das in derselben Zeit als ersteres seine Schwingungen vollendet. Hierzu betrachten wir ein System von materiellen Punkten, die auf eine unveränderliche

Art mit einer Axe verbunden sind, und die um diese Axe, vermöge der Wirkung der Schwere, sich drehen, während die Axe selbst eine horizontale Lage hat. Die Lage jedes Punktes bestimmen wir durch drei Coordinaten x, y, z, und nehmen an, dass die Axe der z mit der Drehungsaxe zusammenfalle, die Axe der x mit der Richtung der Schwere übereinstimme, und y auf beiden senkrecht stehe. Dann ist es einleuchtend, dass die dritte Coordinate z während der ganzen Bewegung constant bleibt, indem jeder Punkt in einer Ebene schwingt die senkrecht auf der Drehungsaxe steht, und wir brauchen daher bei der Untersuchung seiner Bewegung nur die zwei Coordinaten x und y zu berücksichtigen. Es seyen nun die Massen der materiellen Punkte m, m', m'', m''' . . . ., die ihnen correspondirenden Coordinaten x', y'; x'', y''; x''', y'''; . . . ., so hat man aus der Verbindung des d'Alembert'schen Princips der Dynamik mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, folgende Gleichung für die Bewegung dieses Systems, wenn G die Schwere bedeutet:

$$0 = m\left(\frac{ddx}{dt^2} - G\right)\delta x$$
$$+ m'\left(\frac{ddx'}{dt^2} - G\right)\delta x'$$
$$+ m''\left(\frac{ddx''}{dt^2} - G\right)\delta x'' + \ldots.$$
$$+ m.\frac{ddy}{dt^2}\delta y + m'\frac{ddy'}{dt^2}\delta y' + \ldots. \qquad \text{(A)}$$

§. 440.

Wären nun alle einzelnen Punkte frei, und keinen Bedingungen unterworfen, so würden die Variationen δx, $\delta x'$, $\delta x''$ . . . ., δy, $\delta y'$, $\delta y''$ . . . . von einander ganz unabhängig seyn, und man müsste, um die vorige Gleichung identisch Null zu machen, jeden einzelnen Coefficienten Null setzen. Dies findet aber in unserm Fall nicht statt, denn die Bedingung der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage der materiellen Punkte, giebt uns Bedingungsgleichungen

zwischen den Coordinaten x, x', x'' . . . ., y, y', y'' . . . ., aus denen sich die Relationen der Variationen ableiten. Die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage der Punkte unter einander und gegen die Axe, lässt sich, wie man leicht sieht, durch zwei verschiedene Bedingungen ausdrücken; erstens muss der Abstand jedes Punkts von der Axe constant bleiben; nennt man daher die Abstände der Punkte m, m', m'' . . . . resp. a, a', a'' . . . ., so hat man zuerst die Gleichungen

$$xx + yy = aa\,;\quad x'x' + y'y' = a'a'$$
$$x''x'' + y''y'' = a''a''; \quad \text{etc. etc. etc.} \qquad \text{(B)}$$

Zweitens denke man sich durch jeden Punkt und die Drehungsaxe eine Ebene gelegt, so wie auch durch den Schwerpunkt des ganzen Systems und die Drehungsaxe, so bildet jede der erstern Ebenen mit der letztern einen Winkel der unveränderlich bleiben muss. Wir setzen die Coordinaten des Schwerpunkts rücksichtlich der früher erwähnten Coordinatenaxen, X und Y, seinen Abstand von der Drehungsaxe A, so hat man

$$XX + YY = AA.$$

Nennt man ferner die Winkel, welche die erwähnten Ebenen mit der durch den Schwerpunkt gelegten Ebene machen δ, δ', δ'' . . . ., so hat man sofort die Gleichungen zur Bestimmung der Tangenten dieser Winkel

$$\frac{yX - xY}{xX + yY} = \text{tang}\,\delta$$
$$\frac{y'X - x'Y}{x'X + y'Y} = \text{tang}\,\delta'$$
$$\frac{y''X - x''Y}{x''Y + y''Y} = \text{tang}\,\delta'' \qquad \text{(C)}$$
etc. etc. etc.

§. 441.

Man sieht hieraus, dass sich alle Coordinaten x, y . . . . durch X, Y, also auch ihre Variationen durch die Variationen von X, Y ausdrücken lassen, so dass die Gleichung (A) auf die Form

$$0 = R\delta X + S\delta Y$$

gebracht wird. Differentiiren wir die Gleichung

$$\frac{yX - xX}{xX + yY} = tang\, 6$$

rücksichtlich der Charakteristik δ, so kommt

$$\begin{aligned} 0 = &(y\delta X + X\delta y - x\delta Y - Y\delta x)(xX + yY) \\ &- (x\delta X + X\delta x + y\delta Y + Y\delta y)(yX - xY); \end{aligned}$$

oder wenn man wirklich multiplicirt und reducirt

$$\begin{aligned} 0 = &(Y\delta X - X\delta Y)(xx + yy) \\ &- (y\delta x - x\delta y)(XX + YY). \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

Nun ist aber $XX + YY = AA$, $xx + yy = aa$, also wenn man die letztere Gleichung variirt

$$\delta x = -\frac{y}{x}.\,\delta y$$

Aus dieser Gleichung erhält man, in Verbindung mit der Gleichung (D) und mit Hinzuziehung der aus der Gleichung $XX + YY = AA$ durch Differentiation entstehenden Relation $X\delta X + Y\delta Y = 0$, folgende Werthe

$$\delta y = +\frac{x}{X}.\,\delta Y;$$

$$\delta x = -\frac{y}{X}.\,\delta Y;$$

Auf ähnliche Weise erhält man aus den übrigen Gleichungen (B) und (C)

$$\delta y' = +\frac{x'}{X}\delta Y; \quad \delta x' = -\frac{y'}{Y}\delta Y;$$

$$\delta y'' = -\frac{x''}{X}\delta Y; \quad \delta x'' = -\frac{y''}{X}\delta Y;$$

$$\delta y''' = -\frac{x'''}{X}\delta Y; \quad \delta x''' = -\frac{y'''}{X}\delta Y;$$

etc. etc. etc.

§. 442.

Substituirt man alle diese Werthe in die Gleichung (A), so erhält man, indem man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{\delta Y}{X}$ weglässt

$$0 = m\left(\frac{xddy - yddx}{dt^2} + Gy\right)$$
$$+ m'\left(\frac{x'ddy' - y'ddx'}{dt^2} + Gy'\right)$$
$$+ m''\left(\frac{x''ddy'' - y''ddx''}{dt^2} + Gy''\right)$$
$$+ \text{etc. etc. etc.} \qquad (E)$$

Nun ist aber bekanntlich

$$xddy - yddx = d.(xdy - ydx)$$
$$x'ddy' - y'ddx' = d.(x'dy' - y'dx') \text{ etc. etc.}$$

und da die Gleichung (D) §. **441.** sich auch so schreiben lässt, wenn man die Charakteristik δ mit d vertauscht

$$xdy - ydx = (XdY - YdX).\frac{aa}{AA},$$

und auf ähnliche Weise auch

$$x'dy' - y'dx' = (XdY - YdX).\frac{a'a'}{AA}$$
$$x''dy'' - y''dx'' = (XdY - YdX).\frac{a''a''}{AA}$$

seyn muss, so erhält man ebenfalls

$$xddy - yddx = \frac{aa}{AA}.d.(XdY - YdX),$$
$$x'ddy' - y'ddx' = \frac{a'a'}{AA}.d.(XdY - YdX),$$
$$x''ddy'' - y''ddx'' = \frac{a''a''}{AA}.d.(XdY - YdX);$$
$$\text{etc. etc. etc.}$$

folglich wird hierdurch die Gleichung (E) die Gestalt

$$\frac{d(XdY - YdX)}{AA.\,dt^2}.(maa + m'a'a' + m''a''a'' + \ldots)$$
$$+ G(my + m'y' + m''y'' + \ldots) = 0$$

erhalten. Man setze der Kürze wegen

$$maa + m'a'a' + m''a''a'' + \ldots\ldots = \Sigma maa$$
$$m + m' + m'' + \ldots\ldots\ldots\ldots = M$$

so ist aus den Eigenschaften des Schwerpunktes bekannt, dass

$$my + m'y' + m''y'' + \ldots = M.\,Y$$

seyn muss, und vorige Gleichung wird

$$\frac{d\,(XdY - YdX)}{AA.\,dt^2}.\,\Sigma maa + G.\,M\,Y = 0.$$

§. 443.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die durch den Schwerpunkt des Systems der materiellen Punkte und die Drehungsaxe gelegte Ebene, mit der durch dieselbe Axe gelegten Verticalebene zu jeder Zeit t macht, durch ϕ, so ist

$$Y = A.\,sin\,\phi, \quad X = A.\,cos\,\phi,$$
$$dY = A.\,cos\,\phi.\,d\phi, \quad dX = -A.\,sin\,\phi.\,d\phi,$$
$$XdY - YdX = AA\,d\phi$$

folglich wird durch die Substitution dieser Werthe, die letzte Gleichung des vorigen Paragraphs

$$\frac{dd\phi}{dt^2}.\,\frac{\Sigma maa}{MA} + G\,sin\,\phi = 0.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem §. 397. für die Bewegung eines mathematischen Pendels gefundenen,

$$l\,\frac{dd\phi}{dt^2} + G.\,sin\,\phi = 0$$

so sieht man, dass $l = \frac{\Sigma maa}{MA}$ seyn wird, und dieser Ausdruck giebt die Länge eines mathematischen Pendels an, das mit dem physischen gegebenen Pendel in gleichen Zeiten seine Schwingungen vollendet. Bilden die materiellen Punkte einen continuirlichen Körper, so muss statt der Summe Σmaa, die das Trägheitsmoment genannt wird, das Integral $\int aa\,dm$, wo dm das Element der Masse bedeutet, genommen werden.

§. 444.

Ist das Moment der Trägheit eines Körpers rücksichtlich einer Axe bekannt, die durch seinen Schwerpunkt geht, und für welche sie sich immer am bequemsten berechnen lässt, so kann man es leicht für jede andere, mit ersterer parallel laufenden Axe, finden. Denn es sey z. B. (fig. 7.) AB der Durchschnitt

eines Körpers vermittelst einer Ebene die durch den Schwerpunkt H geht und senkrecht auf der durch H gelegten Drehungsaxe steht, M die Projection irgend eines Elements des Körpers auf dieser Ebene, die wir als die Ebene der x und y betrachten wollen, F der Punkt, durch welchen eine Axe geht die mit der durch den Schwerpunkt gelegten parallel läuft, dann hat man im Dreieck FMH, wo MP senkrecht auf FH gezogen ist

$$FM^2 = FH^2 + HM^2 - 2FH.\ PH.$$

Multiplicirt man die ganze Gleichung mit dem Element der Masse dm, und integrirt dann, so kommt, indem man bemerkt, dass FH constant ist

$$\int GM^2.\ dm = FH^2.\ m + \int HM^2.\ dm.$$

Das letzte Integral $2\int FH.\ PH.\ dm = 2FH. \int PH.\ dm$, wird nämlich Null, da dasselbe nichts anders ist als das Product der Masse m in den Abstand des Schwerpunkts derselben von H, auf der Linie FH gerechnet, und dies Product wird verschwinden, weil H selbst der Schwerpunkt ist. Nun bedeutet aber $\int FM.\ dm$ das Moment der Trägheit rücksichtlich einer durch den Punkt F gehenden Axe, $\int HM^2.\ dm$ das Moment der Trägheit für eine durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte, und FM den Abstand beider Axen; man kann daher obige Gleichung in Worten so ausdrücken: Das Moment der Trägheit eines Körpers rücksichtlich einer beliebigen Axe, ist gleich dem Moment der Trägheit rücksichtlich einer durch den Schwerpunkt mit ersterer parallel gelegten Axe + dem Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat des Abstands beider Axen.

§. 445.

Wir wollen zuerst das Moment der Trägheit für eine Kugel rücksichtlich einer durch den Schwerpunkt, und da wir die Kugel als homogen betrachten, zugleich durch ihren Mittelpunkt gehenden Axe aufsuchen. Diese Axe sey die Axe der z; dann wird, wie schon oft erwähnt ist, das Element der Masse

$$dm = \varrho.\ rrdr\ d\varphi.\ d\psi\ \cos\psi$$

wo ρ die Dichtigkeit bedeutet; der Abstand dieses

Elements von der Axe wird $r \cos\psi$, also das Moment der Trägheit

$$= \rho.\ r^4 dr\ d\varphi.\ \cos\psi^2.\ \cos\psi\ d\psi.$$

Integrirt man zuerst von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, dann von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\psi = +\frac{1}{2}\pi$, und zuletzt von $r = 0$ bis $r = R$, wo R den Halbmesser der Kugel bedeutet, so findet man ihr Moment der Trägheit

$$= \tfrac{8}{15}\rho\ R^5\ \pi = \tfrac{4}{3}\ R^3 \pi\rho.\ \tfrac{2}{5}\ RR$$

und da die Masse derselben durch $m = \frac{4}{3}\rho R^3 \pi$ ausgedrückt wird, so ergiebt sich dasselbe auch

$$= \tfrac{2}{5}\ m.\ RR.$$

§. 446.

Zweitens wollen wir das Moment der Trägheit für einen homogenen geraden Cylinder rücksichtlich einer Axe suchen, die senkrecht auf der geometrischen Axe steht, und durch seinen Schwerpunkt oder die Mitte der letzteren Axe geht. Hierzu theilen wir den Cylinder durch Ebenen die mit seiner Basis parallel gehen, in lauter unendlich dünne Cylinder, deren Dicke dz ist, denken uns dann aus dem Mittelpunkte eines solchen Cylinders unendlich viel concentrische Kreise gezogen, deren gegenseitiger Abstand durch dr ausgedrückt ist, und ziehen endlich aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte unendlich viel Radien, wo jeder mit dem nächst folgenden den Winkel $d\varphi$ bildet, so wird das Element der Masse dieses Cylinders durch

$$dm = \rho.\ rdr\ d\varphi.\ dz$$

ausgedrückt, wo ρ die Dichtigkeit bedeutet. Der Abstand dieses Elements von der Drehungsaxe findet sich leicht $= \sqrt{zz + rr \sin\varphi^2}$, also das Moment der Trägheit

$$= \int \rho\ (zz + rr \sin\varphi^2)\ rdr\ d\varphi.\ dz.$$

Integrirt man zuerst von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, so kommt

$$\rho.\ rdr\ dz\ \pi\ (2zz + rr),$$

dann von $r = 0$ bis $r = R$, wo R den Halbmesser der Grundfläche des Cylinders bedeutet, so wird

$$\rho.\ \pi dz\ (RRzz + \tfrac{1}{4}\ R^4)$$

und endlich von $z = -\frac{1}{2}a$ bis $z = +\frac{1}{2}a$, wo a die

Länge des Cylinders angiebt, so erhält man sein Trägheitsmoment rücksichtlich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe

$$\rho\pi RRa \left(\frac{aa}{12} + \frac{RR}{4}\right).$$

Der vor der Parenthese stehende Factor ist bekanntlich die Masse des Cylinders, folglich lässt sich sein Trägheitsmoment auch so schreiben:

$$m' \left(\frac{aa}{12} + \frac{RR}{4}\right)$$

wenn m' die Masse des Cylinders bedeutet.

§. 447.

Wir wollen nun annehmen, ein Pendel sey aus einem cylindrischen Faden AB, und einer daran befestigten Kugel C (fig. 8.) zusammengesetzt, und es schwinge um eine Axe DE, die senkrecht auf AB durch A geht. Es sey nun

die Masse der Kugel $= m$
Halbmesser der Kugel $= r$
die Masse des Fadens $= m'$
Länge des Fadens $= a$
halbe Dicke des Fadens $= R$

so ist das Moment der Trägheit der Kugel gegen die Axe DE, da ihr Schwerpunkt im Mittelpunkte C liegt (§. 444. 445.)

$$= (a + r)^2 \, m + \tfrac{2}{5} m. \, rr$$

und das Moment der Trägheit des cylindrischen Fadens gegen dieselbe Axe, da sein Schwerpunkt in der Mitte F zwischen A und B sich befindet (§. 444. 446.)

$$= m' \left(\frac{aa}{3} + \frac{RR}{4}\right)$$

folglich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels, oder die Summe Σmaa (§. 443.)

$$= m \left(aa + 2ar + \tfrac{7}{5} rr\right) + m' \left(\frac{aa}{3} + \frac{RR}{4}\right).$$

Der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsaxe, multiplicirt in die Masse des ganzen Pendels, oder das Product $M. A$ (§. 443.) wird

$$m \,(a + r) + m'. \frac{a}{2}$$

also die Länge des mathematischen Pendels, das mit dem so zusammengesetzten in gleichen Zeiten schwingt

$$l = \frac{m(aa + 2ar + \frac{7}{5}rr) + m'\left(\frac{aa}{3} + \frac{RR}{4}\right)}{m(a+r) + m'\frac{a}{2}}$$

weil dieselbe nach §. 443. durch $\frac{\Sigma maa}{MA}$ ausgedrückt wird. Es ist einleuchtend, dass, da die Massen der Körper den Gewichten derselben proportional sind, statt hierin vorkommenden Massen m, m' auch ihre Gewichte p, p' gesetzt werden können. Vorigen Ausdruck kann man auch so schreiben:

$$l = a + r + \frac{\frac{2}{5}prr - p'\left(\frac{aa}{6} + \frac{ar}{2} - \frac{RR}{4}\right)}{p(a+r) + p'.\frac{a}{2}}$$

indem man statt der Massen die Gewichte nimmt.

§. 448.

Borda fand die Entfernung von A bis G, wo G der unterste Punkt der Kugel ist 203952,17 Theile seines Maassstabes, $r = 937$, $p = 9911$ Gran, $p' = 13{,}79$ Gran, und wegen der geringen Dicke des Fadens konnte man $R = 0$ setzen. Es ist daher

$$a = 203952{,}17 - 2.937 = 202078{,}17.$$

Die zu $a + r$ hinzuzufügende Grösse ergiebt sich $= -45{,}54$, also erhält man

$$l = 202969{,}62 \text{ Theile.}$$

Borda giebt 202965,82 an, indem er noch eine kleine Correction wegen eines Stücks einer Kugelschaale, das in B auf die Kugel gesetzt war, hinzufügt.

§. 449.

Wir haben jetzt noch die Correction der Länge des Pendels zu berücksichtigen, welche davon her-

rührt, dass die Luft einen Theil des Gewichts desselben trägt, wodurch die Schwere verringert wird, und daher die Schwingungen des Pendels langsamer sind, als es im leeren Raume der Fall ist. Gesetzt nun, die beobachtete Länge sey l, die relative Schwerkraft G, die Länge eines Pendels, das seine Schwingungen im leeren Raume in derselben Zeit vollendet l', und die daselbst wirkende Schwerkraft G', so hat man (§. 399.) die Zeit einer Schwingung

$$T = \sqrt{\frac{l}{G}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2 \sin u^2}},$$

und eben so für das andere Pendel im leeren Raume, welcher dieselben Ausweichungen α, und dieselbe Schwingungszeit T hat,

$$T = \sqrt{\frac{l'}{G'}} . \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2 . \sin u^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich $\frac{l}{G} = \frac{l'}{G'}$ oder $l' = l . \frac{G'}{G}$.

Nun seyen die Gewichte der Kugel und des Fadens in der Luft p, p', im leeren Raume P, P', so ist

$$G : G' = p + p' : P + P'$$

und sind die reciproken specifischen Gewichte der Materien, aus welchen die Kugel und der Faden bestehen ρ, ρ', das Verhältniss des Gewichts der Luft zu dem des Wassers $= \omega$, so hat man bekanntlich

$$P = \frac{p}{1 - \omega\rho} = p\,(1 + \omega\rho)$$

$$P' = \frac{p'}{1 - \omega\rho'} = p'(1 + \omega\rho')$$

indem die Grössen $\omega\rho$, $\omega\rho'$ so klein sind, dass man ihre höhern Potenzen weglassen kann. Dann erhält man

$$\frac{G'}{G} = \frac{P + P'}{p + p'} = 1 + \omega . \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'}.$$

Die Kugel bestand aus Platina, der Faden aus Eisen, man hat daher

$$\rho = \frac{1}{20,7}, \quad \rho' = \frac{1}{7,6}, \quad \omega = \frac{1}{820}$$

$p = 9911$ Gran, $p' = 13,79$ Gran

und hieraus ergiebt sich die Grösse

$$\omega \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'} = \frac{1}{16885}.$$

Da nun ferner $l' = l. \frac{G'}{G}$, also auch

$$l' = l + l\omega. \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'},$$

so erhält man die Correction von l, welche Grösse $= 202965{,}82$ ist (§. 448.)

$$l\omega. \frac{p\rho + p'\rho'}{p + p'} = 12{,}02$$

folglich $l' = 202977{,}84$.

§. 450.

Ein Pendel, dessen Länge 202977,84 Theile des bei der Messung gebrauchten Maassstabes enthält, macht, nach §. 438., in einem mittlern Sonnentage 43305,48 Schwingungen, und da bekanntlich die Pendellängen sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten, und die Schwingungszeiten selbst umgekehrt wie die Anzahl der Schwingungen in einer bestimmten Zeit sich verhalten, so wird man leicht die Länge L des Secundenpendels, welches in einem Tage 86400 Schwingungen macht, durch die Proportion

$$l' : L = 86400^2 : 43305{,}48^2$$

erhalten. Hierdurch findet sich

$$L = 50992{,}57$$

wodurch die Länge des Pendels bestimmt ist.

Wären die Beobachtungen in einer gewissen Höhe über der Meeresoberfläche gemacht, so könnte man die gefundene Pendellänge leicht auf diejenige reduciren, welche an der Meeresoberfläche selbst statt finden würde. Denn bezeichnet man die Schwere, welche in der Höhe des Beobachtungsortes wirken muss, durch Γ, die an der Meeresoberfläche durch G, und das Verhältniss der Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresoberfläche zum Erdhalbmesser durch λ, so hat man nach §. 390.

$$\Gamma = G - 2\lambda G;$$

bedeutet ferner L' die Länge des Pendels an der

Meeresoberfläche, und L die in der Höhe beobachtete, so wird

$$L' : L = G : \Gamma$$

und hieraus kommt, wenn man statt Γ seinen Werth setzt:

$$L' = \frac{L}{1-2\lambda} = L\,(1+2\lambda).$$

Nimmt man z. B. die Höhe des Beobachtungsortes über dem Meere zu 30 Toisen an, und bedenkt, dass der Halbmesser der Erde ungefähr = 3272000 Toisen beträgt, so hat man

$$\lambda = \frac{30}{3272000} = \frac{1}{109067}$$

folglich beträgt die zur beobachteten Pendellänge hinzuzufügende Correction nur + 0,47 Theile.

§. 451.

In so fern der Beobachtungsort sich nicht auf einer sehr über das allgemeine Niveau hervortretenden Stelle, z. B. dem Gipfel eines hohen Berges befindet, sondern man ganz unmerklich erst nach und nach vom Meere aus bis zur Höhe des Beobachtungsortes gelangt, lässt sich diese Correction für die Reduction der Länge des Pendels ohne weiteres anwenden; allein wenn man sich auf einem so isolirten Punkt, wie der Gipfel eines Berges ist, befindet, und daselbst die Länge des Pendels beobachtet, so würde man auf diese Art die Pendellänge zu gross finden, indem die Schwere, welche auf der Spitze des Berges, eigentlich nach dem §. 390. entwickelten und vorhin angewandten Gesetz, statt finden sollte, durch die Anziehung des Berges selbst vermehrt wird, folglich die Länge des Pendels, welches seine Schwingungen in einer bestimmten Zeit vollendet, grösser seyn muss, als wenn diese neue Anziehung nicht mit hinzugetreten wäre. Man könnte dann den Berg als ein Kugelsegment oder auch als einen Schnitt eines Paraboloïds annehmen, dessen Scheitel auf der Spitze des Berges liegt, und dessen Axe mit der Richtung der Schwere übereinstimmt. Wir wollen als ein zugehöriges Beispiel die letztere Annahme machen, und

sehen, wie gross dann die Anziehung des Berges sich ergiebt. Es sey daher (fig. 9.) ABC der Berg, seine Basis AC, BD die Höhe; durch B legen wir eine horizontale Linie EF parallel mit der Basis AC, und fällen von einem Punkte M des Berges das Perpendikel PM auf EF, so ist aus der Theorie der Parabel bekannt, dass allgemein

$$PB^2 = PM. \, Const.$$

wo die Constante den Parameter der Parabel bedeutet; dieser lässt sich leicht finden, sobald man die Höhe des Berges BD und den Halbmesser seiner Basis AD kennt; denn es muss ebenfalls die Gleichung

$$AD^2 = BD. \, Const.$$

statt finden, woraus sich $Const. = \frac{AD^2}{BD}$ ergiebt. Substituirt man diesen Werth der Constante in obige Gleichung, so kommt

$$PB^2 = \frac{AD^2}{BD}. \, PM$$

für die Gleichung der Oberfläche des Berges. Man setze nun $PB = r$, $MP = z$, $BD = h$, $AD = nh$, wo daher n anzeigt, wie oft die Höhe des Berges in dem Halbmesser seiner Basis enthalten ist, und wegen der geringen Neigung der Berge im Allgemeinen eine ziemlich bedeutende Zahl ausmacht, so hat man durch die Substitution dieser Werthe, zwischen z und r die Relation

$$rr = hnn. \, z$$

Theilt man den Berg in lauter unendlich dünne Scheiben, indem man denselben durch Ebenen schneidet, die der Basis parallel gehen, diese Scheiben wieder in ihre Elemente, nach der Methode die wir schon §. 446. bei dem geraden Cylinder angewendet haben, und nennt das Element der Masse dm, die Dichtigkeit des Berges, welche wir als gleichförmig ansehen, ρ, so kommt

$$dm = \rho. \, rdr. \, d\phi. \, dz.$$

Bezeichnen wir den Abstand dieses Elements von dem in B befindlichen, angezogenen Punkte durch R, und bedenken, dass die Anziehung der Masse direct und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt propor-

tional ist, so erhalten wir die Anziehung des Elements dm auf den Punkt B

$$\frac{fdm}{RR} = f\rho . \frac{rdr.\, d\varphi.\, dz}{RR}$$

wo f ein Coefficient ist, der für alle Materie einerlei Werth behält. Diese Totalanziehung müssen wir nun nach drei auf einander senkrechten Axen zerlegen, wozu wir die Linien BD, BE und eine dritte auf diesen beiden, also auf der Ebene des Papiers, senkrecht stehende wählen, und wir finden die einzelnen Seitenanziehungen dadurch, dass wir die Totalanziehung $\frac{fdm}{RR}$ mit den Cosinus der Winkel multipliciren, die der Radius R mit den Axen macht. Man bemerkt aber leicht, dass wegen der symmetrischen Gestalt des Bogens gegen die Axe BD, die Summen aller einzelnen Anziehungen nach den beiden andern Axen Null werden, so dass wir blos die Anziehung des Berges nach der ersten Axe BD zu berücksichtigen haben. Nun ist der Cosinus des Winkels, den der Radius R mit dieser Axe bildet $= \frac{z}{R}$, folglich wird die Anziehung des Elements dm nach dieser Axe $= \frac{fdm}{RR} . \frac{z}{R}$, oder

$$f\rho . \frac{rdr.\, zdz.\, d\varphi}{R^3}$$

Setzt man statt R seinen Werth durch r und z ausgedrückt

$$R = \sqrt{rr + zz}$$

so wird obiger Ausdruck

$$f\rho . \frac{rdr.\, zdz.\, d\varphi}{(rr + zz)^{\frac{3}{2}}}$$

welches dreimal integrirt werden muss, um die ganze Anziehung des Berges zu geben. Führt man die Integration zuerst nach φ aus, und bedenkt, dass das Integral zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen werden muss, so kommt

$$2\pi f\rho . \frac{rdr . zdz}{(rr + zz)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies von Neuem nach z integrirt, giebt

$$2\pi f\rho . rdr \left\{ C - \frac{1}{\sqrt{rr + zz}} \right\}.$$

Hierbei sind die Gränzen $z = 0$ und $z = \frac{rr}{hnn}$, welcher Werth sich aus der Gleichung der Oberfläche ergiebt, folglich wird das zwischen diesen Gränzen genommene Integral

$$2\pi f\rho\, rdr \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{rr + \frac{r^4}{h^2 n^4}}} \right\}$$

$$= 2\pi f\rho . \left\{ dr - \frac{hnn\, dr}{\sqrt{hhn^4 + rr}} \right\}.$$

Um den letzten Theil $\frac{dr . hnn}{\sqrt{hhn^4 + rr}}$ zu integriren, setze man $r = hnn . \operatorname{tang} \theta$, so wird $dr = hnn . \frac{d\theta}{\cos \theta^2}$, also

$$\int \frac{dr . hnn}{\sqrt{hhn^4 + rr}} = \int hnn . \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{hnn}{2} \log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} + C.$$

und da die Gleichung $r = hnn . \operatorname{tang} \theta$,

$$\sin \theta = \frac{r}{\sqrt{h^2 n^4 + rr}}$$

giebt, so kommt auch

$$\int \frac{dr . hnn}{\sqrt{hhn^4 + rr}} = \frac{hnn}{2} \log \frac{\sqrt{h^2 n^4 + rr} + r}{\sqrt{h^2 n^4 + rr} - r}$$

also die ganze Anziehung wird

$$2\pi f\rho \left\{ r - \frac{hnn}{2} \log \frac{\sqrt{h^2 n^4 + rr} + r}{\sqrt{h^2 n^4 + rr} - r} + C \right\}.$$

Für $r = 0$ muss dieses Integral verschwinden; es ist daher auch $C = 0$, und aus der Gleichung $rr = hnnz$ sieht man, dass, da der grösste Werth von $z = h$ ist, dasselbe bis zu $r = hn$ ausgedehnt werden muss. Hierdurch findet man die Anziehung

$$A = 2\pi f\rho\, hn. \left\{1 - \frac{n}{2} \log \frac{\sqrt{nn+1} + 1}{\sqrt{nn+1} - 1}\right\}.$$

Da die Zahl n gegen die Einheit ziemlich bedeutend ist, so kann man den logarithmischen Theil voriger Formel in eine Reihe verwandeln, die nach den Potenzen von $\frac{1}{n}$ fortschreitet. Man erhält dadurch nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{n}{2}. \log \frac{\sqrt{nn+1} + 1}{\sqrt{nn+1} - 1} = 1 - \tfrac{1}{6}. \frac{1}{nn}$$

und wenn man diesen Werth in vorige Gleichung setzt, so kommt

$$A = \tfrac{1}{3}\pi f\rho \frac{h}{n}.$$

Nun sey die mittlere Dichtigkeit der Erde ρ', ihr Halbmesser $= a$, so ist die Anziehung derselben, wenn wir sie als eine Kugel betrachten

$$G = \tfrac{4}{3}\pi f\rho'. a$$

wo G die Schwere ist, und durch die Verbindung dieser Gleichung mit der vorigen ergiebt sich

$$A = \tfrac{1}{2} G. \frac{\rho}{\rho'}. \frac{h}{2n}.$$

Setzen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde $\rho' = 4{,}7$, so ist

$$A = G. \frac{\rho}{18{,}8}. \frac{h}{an}.$$

Die Grösse $\frac{h}{a}$ ist dann das, was wir §. 420. durch λ bezeichnet haben, und wir erhalten daher die Schwere auf der Oberfläche des Berges $= G - 2\lambda G + A$

$$= G - 2\lambda G \left(1 - \frac{\rho}{37{,}6}. \frac{1}{n}\right).$$

Ist dann die auf der Spitze des Berges beobachtete Länge des Pendels $= L$, so wird die auf die Meeresoberfläche reducirte

$$= L + 2\lambda L \left(1 - \frac{\rho}{37,6} \cdot \frac{1}{n}\right).$$

§. 452.

Wenn man irgend ein physisches Pendel von beliebiger Gestalt um eine Axe schwingen lässt, und den Werth von $l = \frac{\Sigma maa}{MA}$ für diese Axe nach §. 443. sucht, hierauf eine neue Drehungsaxe die mit der vorigen parallel ist, an dem Pendel so anbringt, dass ihr Abstand von der erstern der Länge l gleich kommt, und zugleich eine durch beide Axen gehende Ebene durch den Schwerpunkt des Pendels geht, so wird das Pendel um diese zweite Axe seine Schwingungen in eben derselben Zeit vollenden als um erstere. Dies lässt sich leicht folgendermassen beweisen. Es sey das Moment der Trägheit rücksichtlich einer Axe, die durch den Schwerpunkt des Pendels geht, und zugleich der angenommenen Drehungsaxe parallel ist, P, der Abstand der Drehungsaxe vom Schwerpunkt $= a$, die Masse des Pendels $= M$, so hat man nach §. 443 und 444. die Länge des gleichgeltenden mathematischen Pendels

$$l = \frac{P + Maa}{Ma}$$

und hieraus das Trägheitsmoment gegen eine durch den Schwerpunkt gehende Axe

$$P = Ma\,(l - a).$$

Nun sey der Abstand einer neuen Axe vom Schwerpunkt $= b$, so wird die Länge des mathematischen Pendels, das mit diesem gleiche Schwingungszeiten hält, auf ähnliche Art durch $\frac{P + Mbb}{Mb}$, oder wenn man statt P seinen Werth $Ma\,(l - a)$ setzt, und dann Zähler und Nenner durch M dividirt, durch $\frac{a\,(l - a) + bb}{b}$ ausgedrückt. Soll nun diese Länge

der frühern gleich werden, so muss diese Grösse $= l$ seyn, d. h. man hat die Gleichung

$$a(l - a) + bb = lb$$

und diese giebt für b die Werthe $b = a$, $b = l - a$. Der erste Werth giebt uns die erste Drehungsaxe wieder; der zweite hingegen zeigt, dass die Summe der Abstände der beiden Drehungsaxen vom Schwerpunkt, also der Abstand beider Axen von einander selbst der Grösse l gleich seyn muss, wenn die Schwingungen des Pendels um beide Axen in gleichen Zeiten geschehen sollen.

Hat man also an einem Pendel in der beschriebenen Lage zwei Drehungsaxen angebracht, die so beschaffen sind, dass die Schwingungen um die eine oder die andere in gleicher Zeit geschehen, oder was dasselbe ist, in beiden Lagen das Pendel dieselbe Anzahl von Schwingungen in einer bestimmten Zeit vollendet, so kann man daraus schliessen, dass der Abstand der beiden Drehungsaxen von einander, die Länge des mathematischen Pendels giebt, welches seine Schwingungen in derselben Zeit vollendet. Diese Einrichtung des Pendels wurde zuerst von Kater angewendet, und er nennt dasselbe das unveränderliche Pendel. Es ist dasselbe für Beobachtungen, die man auf Reisen anstellen will, sehr zweckmässig, da, wenn man die Anzahl der Schwingungen an dem Beobachtungsorte angemerkt hat, keine andere Correction nöthig ist, als die, welche von der Temperatur des Ortes und der daher rührenden verschiedenen Ausdehnung der Materie des Pendels abhängt. Der grösste Vortheil den dasselbe gewährt, besteht darin, dass man die §. 447 und 448. angewandten Correctionen, um das physische Pendel auf das mathematische zu reduciren, gar nicht nöthig hat, und grade diese sind immer innerhalb gewisser Gränzen einer Ungewissheit unterworfen, die aus der nicht vollständigen Homogenität der Materie entsteht, da wir dieselbe in unsern Rechnungen doch voraussetzen müssen, indem uns die innere Beschaffenheit der Platinakugel, die den Hauptbestandtheil der vorigen Art von Pendeln ausmachte, völlig unbekannt bleiben muss. Nun kann man freilich den hierdurch entstehenden etwanigen Fehler dadurch zum Theil aufheben, dass man die

Kugel in verschiedenen Lagen an dem Faden aufhängt, und aus allen Beobachtungen das Mittel nimmt; allein es ist doch besser, wenn man auf irgend eine Art diese Correctionen umgehen kann.

§. 453.

Man kann ein solches unveränderliches Pendel auf verschiedene Weise einrichten; die einfachste würde folgende seyn. Man nehme ein Parallelepipedum von irgend einer Materie *ABCD* (fig. 10.) z. B. von Holz, und bringe in der Mitte der Grundflächen der Parallelepipedum zwei Metallspitzen *EF*, *GH* an, die dazu dienen, um die Coincidenzen mit dem Uhrpendel besser beobachten zu können. In *K* befinde sich eine Drehungsaxe, welche senkrecht auf der Fläche *ABCD* steht, und in *L* die andere, so dass $EL = GK$ ist. Wäre nun das Pendel völlig homogen, das Parallelepipedum ganz regelmässig, und genau $HG = EF$, so müssten die Schwingungen um die Axe *K* in derselben Zeit als um die Axe *L* geschehen. Da dieses nun aber wohl nie statt finden wird, und die Drehungsaxen ihrer Lage nach nicht verändert werden können, so bringe man am Pendel noch ein kleines verschiebbares Gewicht an, dessen Lage man so lange ändert, bis die Beobachtungen zeigen, dass die Schwingungen in gleichen Zeiten geschehen.

Um dieses durch ein Beispiel deutlicher zu machen, wollen wir der Kürze wegen annehmen, das Pendel bestehe blos aus einen so dünnen Parallelepipedum, dass man dasselbe als ein Parallelogramm betrachten kann (fig. 11.), dessen Breite *AB* durch b, und die Länge *AC* durch l bezeichnet werden soll. Rücksichtlich des Gesetzes der Dichtigkeit wollen wir die Voraussetzung machen, die Dichtigkeit sey in jeden unendlich schmalen Streifen *EFGH* der mit *AB* parallel geht, constant, und nur wenig von der mittlern Dichtigkeit verschieden, so dass, wenn wir die Dichtigkeit in dem Streifen, welcher zunächst an *AB* liegt, durch ρ bezeichnen, allgemein die Dichtigkeit in dem Streifen *EFGH* durch $\rho + \delta\varrho$ ausgedrückt wird, wo $\delta\varrho$ gegen ϱ sehr klein, und blos

[redacted]

eine Function des Abstandes AE des Streifens von AB seyn wird. Halbiren wir AB und CD in L und M, und ziehen LM, so wird auf dieser Linie der Schwerpunkt liegen müssen, wie ohne weitere Rechnung von selbst klar ist. Es sey $KN = x$, $LN = y$, so ist das Element der Masse

$$dM = (\rho + \delta\rho)\; dx dy$$

wo unserer Voraussetzung zufolge ρ constant und $\delta\rho$ eine Function von y allein seyn wird. Integrirt man diesen Ausdruck von $x = -\frac{1}{2}b$ bis $x = +\frac{1}{2}b$, und dann von $y = 0$ bis $y = l$, so erhält man

$$M = \rho b l + b \int \delta\rho . dy$$

Bezeichnet man den Abstand LQ des Schwerpunkts Q von der Seite AB durch y', so hat man zur Bestimmung von y' die Gleichung

$$My' = \int y . dM = \int y dy\; (\rho + \delta\rho)\; dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\rho b l^2 + b \int \delta\rho .\; y dy.$$

Das Moment der Trägheit des Elements K gegen eine Drehungsaxe, die durch den Punkt L geht, und senkrecht auf der Fläche $ABCD$ steht, wird durch $KL^2 . dM$ ausgedrückt, und da $KL^2 = KN^2 + LN^2 = xx + yy$, so hat man das Moment der Trägheit für das ganze Parallelogramm, indem man statt dM seinen Werth $(\rho + \delta\rho)\, dx dy$ setzt

$$= \int (\rho + \delta\rho)\; (xx + yy) .\; dx dy.$$

Wird das Integral von $x = -\frac{1}{2}b$ bis $x = +\frac{1}{2}b$, und von $y = 0$ bis $y = l$ ausgedehnt, so kommt das Moment der Trägheit gegen die Axe L

$$T = \tfrac{1}{3}\rho l b\, (ll + \tfrac{1}{4} bb) + b \int \delta\rho .\; (yy + \tfrac{1}{12} bb) . dy$$

Bezeichnet man das Moment der Trägheit gegen eine durch den Schwerpunkt Q gehende Axe, die mit der durch L gelegten parallel ist, durch T^0, so hat man nach §. 444.

$$T = T^0 + My'y'.$$

Geht nun die eigentliche Drehungsaxe des Pendels durch den Punkt R, und nennt man den Abstand LR, r, das Trägheitsmoment rücksichtlich der Axe R, T', so wird

$$T' = T^0 + (y' - r)^2 M$$

oder wenn man statt T^0 seinen Werth $T - My'y'$ setzt

$$T' = T - 2ry'M + r^2 M.$$

Die zweite Drehungsaxe befinde sich in S, so dass $SM = LR$ wird, dann hat man das Trägheitsmoment rücksichtlich dieser Axe

$$T'' = T^0 + M.\, QS^2$$

oder da $QS = LM - LM - LQ = l - r - y'$, so wird auch

$$T'' = T^0 + M\,(l - r - y')^2$$
$$= T + M\,(l-r)^2 - 2My'\,(l-r).$$

Nun werde in V die kleine verschiebbare Masse angebracht, so kommt, indem wir die veränderliche Länge VR durch p bezeichnen, das Moment der Trägheit des so zusammengesetzten Pendels gegen die Axe R, indem wir der Kürze wegen die Masse als einen materiellen Punkt betrachten

$$R = T' + mpp$$

und das Moment der Trägheit gegen die Axe S

$$S = T'' + m\,(l - 2r - p)^2.$$

Bezeichnet man die Längen der mathematischen Pendel, die diesen beiden Schwingungsaxen R und S entsprechen, resp. durch L, L', so kommt nach §. 443.

$$L = \frac{R}{M\,(y' - r) + mp},$$

$$L' = \frac{S}{M\,(l - y' - r) + m\,(l - 2r - p)}.$$

Nun setze man der Kürze wegen die vorigen Integrale von $y = 0$ bis $y = l$ genommen

$$\int \delta\rho.\;\; dy = \alpha\rho l$$
$$\int \delta\rho.\;\; y dy = \beta\rho l^2$$
$$\int \delta\rho.\;\; y^2 dy = \gamma\rho l^3$$

so erhält man aus den vorigen Ausdrücken von M, My', T, diese:

$$M = \rho l\, b\,(1 + \alpha)$$
$$My' = \tfrac{1}{2}\,\rho l^2 b\,(1 + 2\beta)$$
$$T = \tfrac{1}{3}\,\rho l^3 b\,(1 + 3\gamma)$$

indem wir der Einfachheit wegen annehmen, die Breite b des Parallelogramms sey gegen die Länge so klein, dass die Quadrate des Verhältnisses $\frac{b}{l}$ weggelassen werden können. Nimmt man noch

$$\frac{1 + 2\beta}{1 + \alpha} = 1 + \lambda, \qquad \frac{1 + 3\gamma}{1 + \alpha} = 1 + \lambda'$$

so erhält man

$$My' = \tfrac{1}{2}\,Mt\,(1+\lambda)$$
$$T = \tfrac{1}{3}\,Mll\,(1+\lambda')$$

wo λ und λ' sehr kleine Grössen sind, da wir angenommen haben, dass α, 6, γ solche seyn sollen. Nehmen wir noch der kürzern Rechnung wegen an, dass die Drehungsaxen durch die Punkte L und M gehen sollen, so wird $r = 0$,

$$T' = T = \tfrac{1}{3}\,Mll\,(1+\lambda')$$
$$T'' = \tfrac{1}{3}\,Mll\,(1+\lambda') - Mll\lambda$$

und hieraus ferner

$$L = \frac{\tfrac{1}{3}\,ll\,(1+\lambda') + \mu\mu p}{\tfrac{1}{2}\,l\,(1+\lambda) + \mu p}.$$
$$L' = \frac{\tfrac{1}{3}\,ll\,(1+\lambda') - ll\lambda + \mu\,(l-p)^2}{\tfrac{1}{2}\,l\,(1-\lambda) + \mu\,(l-p)}.$$

wo $\frac{m}{M} = \mu$ gesetzt ist. Soll nun die Masse m so angebracht werden, dass die Schwingungen um beide Axen in gleichen Zeiten geschehen, so muss $L = L'$ seyn. Nimmt man statt L und L' ihre Werthe und reducirt gehörig, indem man die Producte der Grössen λ, λ', μ vernachlässigt, so kommt

$$\mu\,(l - 2p) = l\lambda$$

aus welcher Gleichung sich p bestimmen lässt, und man sieht daher, dass es möglich sey, die Masse m an einen solchen Ort zu bringen, dass die Schwingungen um beide Axen in gleichen Zeiten geschehen.

Man kann übrigens aus dieser Gleichung leicht zeigen, dass die Masse m so angebracht werden muss, dass ihr statisches Moment rücksichtlich der Mitte des Pendels, dem statischen Moment des ganzen Pendels rücksichtlich der Mitte desselben gleich seyn muss. Denn es sey der Abstand der Masse von der Mitte $= a$, der Abstand des Schwerpunkts $= a'$, so hat man $a = \tfrac{1}{2}\,l - p$, $a' = y' - \tfrac{1}{2}\,l = \tfrac{1}{2}\,l\lambda$, weil $My' = \tfrac{1}{2}\,Ml\,(1+\lambda)$ ist, und vorige Gleichung

$$\mu\,(l - 2p) = l\lambda$$

wird daher auch $\mu a = a'$. Es ist aber $\mu = \frac{m}{M}$, folglich $ma = Ma'$, wodurch der Satz erwiesen ist.

Von der Bestimmung der geographischen Lage der Oerter auf der Erde.

§. 454.

Es ist schon früher §. 59. erwähnt worden, dass die Lage der Oerter auf der Erde durch die geographische Länge und Breite derselben bestimmt wird, allein ohne weiter die Methoden anzugeben, durch welche diese Bestimmungsstücke gefunden werden. In diesem Abschnitt wollen wir nun zeigen, wie durch astronomische Beobachtungen diese beiden Grössen, die gleichsam als die Coordinaten des Ortes angesehen werden können, sich ausmitteln lassen. Eigentlich haben wir, um die Lage des Ortes vollständig darzustellen, noch eine dritte Coordinate, nämlich die Höhe des Ortes über der Meeresoberfläche, zu betrachten, allein da diese durch Beobachtungen anderer Art, gewöhnlich durch die Beobachtung der Barometerhöhe gefunden wird, so berücksichtigen wir dieselbe hier nicht mit, sondern werden dieselbe erst dann aus einander setzen, wenn im physischen Theile von der Atmosphäre der Erde die Rede seyn wird.

§. 455.

Da bei allen Beobachtungen der Länge und Breite die Zeit bekannt seyn muss, so werden wir zuerst zeigen, auf welche Weise dieses Element sich finden lässt, wobei wir uns auf die §. 34 — 39. gegebenen Erklärungen der verschiedenen Rechnungsarten der Zeit beziehen. Die wahre Zeit ist diejenige, welche sich allein direct beobachten lässt, indem der wahre Sonnentag dann anfängt, wenn die Sonne durch den Meridian des Beobachtungsortes geht. Um diesen Zeitpunkt zu bestimmen, wendet man die Methode der correspondirenden Höhen an, die darin besteht, dass man die Zeiten an einer guten Uhr bemerkt, zu welchen die Sonne Vormittags und Nachmittags gleiche Höhen hat. Behielte nun die Sonne während dieser

Zeit immer gleichen Abstand vom Pol, oder änderte sich ihre Declination nicht, so würde das Mittel zwischen den beiden beobachteten Zeiten die Zeit der Uhr angeben, zu welcher der wahre Mittag statt findet, oder der wahre Tag seinen Anfang nimmt, indem bei einem unveränderlichen Abstande eines Himmelskörpers vom Pol gleiche Stundenwinkel auch gleichen Höhen über dem Horizont entsprechen. Die Declination der Sonne ist aber veränderlich, und das arithmetische Mittel zwischen den beiden Beobachtungszeiten würde den wahren Mittag entweder zu früh oder zu spät angeben, jenachdem die Sonne sich vom Nordpol entfernt oder sich ihm nähert. Man muss daher am berechneten Mittel noch eine kleine Correction anbringen, die sich auf folgende Art leicht finden lässt.

§. 456.

Es sey (fig. 1.) in S die Sonne, HZR der Meridian, HMR der Horizont, P der Pol, Z das Zenith, die Höhe der Sonne $= h$, ihre Declination $= D$, die Polhöhe $= p$, der Stundenwinkel $= t$, so hat man im Dreieck ZSP, $ZS = 90° - h$, $ZP = 90° - p$, $SP = 90° - D$, $ZPS = t$, und da bekanntlich

$$\cos ZS = \cos ZP . \cos SP + \sin ZP . \sin SP . \cos ZPS$$

so erhält man durch Substitution der angegebenen Werthe

$$\sin h = \sin p . \sin D + \cos p . \cos D . \cos t.$$

Des Nachmittags sey für dieselbe Höhe h, der Stundenwinkel $t + \delta t$, die Declination $D + \delta D$, so hat man ebenfalls, indem man statt t, $t + \delta t$, statt D, $D + \delta D$ in vorige Formel setzt

$$\sin h = \sin p . \sin(D + \delta D)$$
$$+ \cos p . \cos(D + \delta D) . \cos(t + \delta t).$$

Die Grössen δD, δt sind nun so klein, dass man statt ihrer Sinus die Bogen, statt ihrer Cosinus die Einheit setzen kann, und mit dieser Rücksicht erhält man, wenn man die erste Gleichung von der zweiten abzieht

$$0 = (\sin p . \cos D - \cos p . \sin D . \cos t)\, \delta D$$
$$- \cos p . \cos D . \sin t . \delta t$$

und hieraus ergiebt sich

$$\delta t = \frac{1}{\sin t} \cdot (\tan p - \tan D . \cos t) . \delta D.$$

Es muss also um diese Correction berechnen zu können, die Declination der Sonne, die Polhöhe des Beobachtungsortes, der Stundenwinkel, und die Aenderung der Declination der Sonne innerhalb der Zwischenzeit beider Beobachtungen bekannt seyn. Die drei ersten Grössen braucht man nur ungefähr zu kennen, indem man für den Stundenwinkel die halbe Zwischenzeit der beiden Beobachtungen nimmt.

§. 457.

So beobachtete z. B. v. Humboldt (Voyage de Humboldt et Bonpland, IV partie, I Vol.) am 26. Januar 1799 in Barcelona die doppelte Höhe des obern Sonnenrandes, um $11^h\ 32'\ 31''$ und $12^h\ 42'\ 7''$. Der Zeitunterschied beträgt $1^h\ 9'\ 36''$ oder in Bogen ausgedrückt, indem man mit 15 multiplicirt $17°\ 24'$, also

$$t = 8°\ 42';$$
$$D = -21°\ 4'\ 28'';$$
$$p = +41°\ 22'\ 38''.$$

Die Abnahme der Declination in einer Stunde beträgt an diesem Tage $37''85$, also in der Zwischenzeit von $1^h\ 9'\ 36''$ ist dieselbe $= 43''80 = \delta D$. Man hat daher

$$\begin{aligned} \tan p &= 9.94494 \\ C. \sin t &= 0.82027 \\ \log \delta D &= 1.64147 \\ \hline &\ 2.40668 = 255{,}08 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tan D &= 9.58586\,n \\ \cot t &= 0.81525 \\ \log \delta D &= 1.64147 \\ \hline &\ 2.04258\,n \\ &= -110{,}30. \end{aligned}$$

also $\delta t = 255{,}08 + 110{,}30 = 365''38$. Dividirt man dies durch 15, um statt der Bogensecunden, Zeitsecunden zu haben, so kommt $24''36$, und um so viel muss die nachmittägliche Beobachtungszeit vermindert werden. Sie wird daher

$$= 12^h\ 41'\ 42''64$$

folglich trat der Durchgang der Sonne durch den Meridian nach der Uhr um

$$\frac{11^h\ 32'\ 31'' + 12^h\ 41'\ 42''64}{2} = 12^h\ 7'\ 6''82$$

ein. Wäre der Gang der Uhr so beschaffen, dass dieselbe bedeutend mehr oder weniger als 24 Stunden zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen der Sonne zeigte, so müsste diese Verbesserung noch eine zweite Correction erleiden. Denn man sieht leicht, dass wenn dieselbe in einem Sonnentage $24 + a$ Stunden zeigte, die berechnete Correction (hier 24″36) noch im Verhältniss von $24 + a : 24$ vermehrt werden müsste, also statt des berechneten Werthes von δt, $\delta t . \frac{24 + a}{24}$ zu nehmen ist.

§. 458.

Man pflegt gewöhnlich zur Bestimmung der Zeit mehrere correspondirende Höhen zu nehmen, um die bei jeder Beobachtung zufälligen Fehler so viel als möglich aufzuheben. Es ist aber dann nicht nöthig für jedes paar correspondirender Höhen die Mittagsverbesserung zu berechnen, sondern es ist hinreichend, dass man aus der vormittägigen Reihe sowohl als aus der nachmittägigen, das arithmetische Mittel nimmt, und für diese Mittel blos die Correction berechnet. Folgende Beobachtungen welche v. Humboldt in Valencia am 6. Februar 1799 anstellte, werden dies deutlicher zeigen.

	Vormittag	Nachmittag
	9^h 32′ 34″	3^h 4′ 44″
	9. 34. 23.	3. 2. 55.
	9. 35. 40.	3. 1. 45.
	9. 36. 58.	3. 0. 21.
	9. 39. 28.	2. 57. 52.
	9. 41. 38.	2. 54. 45.
Mittel	9^h 36. 56″8	3^h 0. 23″7.

Die Zwischenzeit beträgt 5^h 23′ 26″9 also in Graden 80° 51′ 43″5, folglich

$$t = 40^\circ\ 25'\ 51''7$$
$$p = 39.\ 28.\ 25.$$
$$D = -15.\ 30.\ 54.$$

und für den sechsten Februar hat man die stündliche

Abnahme der Declination 46″14, folglich für die ganze Zwischenzeit von 5^h 23′ 26″9

$$\delta D = 248{,}72.$$

Es wird also

$tang\, p =$	9.91570	$tang\, D =$	9.44392 *n*
$C. sin\, t =$	0.18807	$cot\, t =$	0.06956
$log\, \delta D =$	2.39571	$log\, \delta D =$	2.39571
	2.49948 = 315,85		1.90919 *n*
			= − 81,13

folglich $\delta t = 315{,}85 + 81{,}13 = 396{,}98$, oder in Zeitsecunden $\delta t = 26{,}47$.

Da die Sonne sich dem Nordpol nähert, so muss diese Grösse von der nachmittägigen abgezogen werden, und es bleibt, wenn man statt 3 Uhr, 15 Uhr schreibt

Nachmittags	15^h 59′ 57″2
Vormittags	9. 36. 56″8.
Hieraus das Mittel	12^h 18′ 27″0.

§. 459.

Um zu zeigen dass diese abgekürzte Methode, den wahren Mittag aus mehreren correspondirenden Höhen der Sonne zu berechnen, von der strengen, wo jede Beobachtung einzeln corrigirt werden muss, nicht merklich abweicht, wollen wir für obige sechs Beobachtungen die Mittagsverbesserungen einzeln berechnen. Man hat

die Zwischenzeiten = 5^h 32′ 10″
5. 28. 32.
5. 26. 5.
5. 23. 23.
5. 18. 24.
5. 13. 7.

Hieraus ergeben sich die Werthe der Stundenwinkel

$t =$ 41° 31′ 15″
41. 4. 00.
40. 45. 37,5.
40. 25. 22,5.
39. 48. 00.
39. 8. 22,5.

Die entsprechenden Veränderungen der Declina- on der Sonne in den angegebenen Zwischenzeiten nd folgende:

$\delta D = 255{,}44$	$\log \delta D = 2.40729$
252,62	2.40247
250,75	2.39924
248,68	2.39564
244,88	2.38895
240,79	2.38164.

Man erhält dann

k = 317″36 + 80″18 = 397″54 = 26″50 in Zeit
316,70 + 80,58 = 397,28 = 26,49
316,30 + 80,84 = 397,14 = 26,48
315,85 + 81,14 = 396,99 = 26,47
315,07 + 81,69 = 396,76 = 26,45
314,18 + 82,23 = 396,41 = 26,43.

ieht man diese Grössen von den Zeiten der Nach- ittag angestellten Beobachtungen ab, so erhält man lgende Zeiten:

Vormittag	Nachmittag
9^h 32′ 34″	3^h 04′ 17″50
9. 34. 23.	3. 02. 28,51
9. 35. 40.	3. 01. 18,52
9. 36. 58.	2. 59. 54,53
9. 39. 28.	2. 57. 25,55
9. 41. 38.	2. 54. 18,57.

Man findet also aus jedem Paar correspondiren- r Sonnenhöhen die Zeit des wahren Mittags nach r Uhr

= 12^h 18′ 25″75
12. 18. 25,75
12. 18. 29,26
12. 18. 26,26
12. 18. 26,78
12. 18. 28,28

as Mittel hieraus giebt die Zeit
12^h 18′ 27″01.

§. 460.

Wir haben bei der Entwickelung der Formel . 456.)

$$\delta t = \frac{1}{\sin t} (\tang p - \tang D.\cos t).\ \delta D$$
$$= \left(\frac{\tang p}{\sin t} - \tang D.\cot t\right).\ \delta D$$

angenommen, dass die Grössen δt, δD so klein sind, dass die höhern Potenzen derselben vernachlässigt werden können, indem wir statt der Sinus dieser Bogen die Bogen selbst, und statt ihrer Cosinus die Einheit setzen. Es ist nun aber nothwendig zu untersuchen, wie gross der etwanige Fehler ist, den man bei diesen Voraussetzungen begehen kann. Man muss nun aber bemerken, dass bei der angewandten Berechnungsart die Declination der Sonne im Mittag gewählt wird, und statt des Stundenwinkels t, die Hälfte der Summe der beiden einzelnen Stundenwinkel t und $t + \delta t$ genommen ist, so dass obige Formel eigentlich so geschrieben werden muss

$$\delta t = \delta D.\left[\frac{\tang p}{\sin(t + \frac{1}{2}\delta t)} - tg(D + \tfrac{1}{2}\delta D)\cot(t + \tfrac{1}{2}\delta t)\right].$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$t + \tfrac{1}{2}\delta t = t', \qquad D + \tfrac{1}{2}\delta D = D'$$

so war unsere Rechnungsformel

$$\delta t = \delta D.\left(\frac{\tang p}{\sin t'} - \tang D'.\cot t'\right).$$

Die beiden Gleichungen für $\sin h$ (§. 456.) lassen sich dann folgendermassen darstellen:

$$\sin h = \sin p.\sin(D' - \tfrac{1}{2}\delta D) + \cos p.\cos(D' - \tfrac{1}{2}\delta D').\cos(t' - \tfrac{1}{2}\delta t)$$
$$\sin h = \sin p.\sin(D' + \tfrac{1}{2}\delta D) + \cos p.\cos(D' + \tfrac{1}{2}\delta D).\cos(t' + \tfrac{1}{2}\delta t).$$

Nun hat man bekanntlich, wenn man die dritten Potenzen der Grössen δD, δt mit berücksichtigt

$$\sin(D' - \tfrac{1}{2}\delta D) = \sin D' - \tfrac{1}{2}\cos D'.\delta D - \tfrac{1}{8}\sin D'.\delta D^2 + \tfrac{1}{48}\cos D'\,\delta D^3$$
$$\cos(D' - \tfrac{1}{2}\delta D) = \cos D' + \tfrac{1}{2}\sin D'.\delta D - \tfrac{1}{8}\cos D'.\delta D^2 - \tfrac{1}{48}\sin D'.\delta D^3$$
$$\cos(t' - \tfrac{1}{2}\delta t) = \cos t' + \tfrac{1}{2}\sin t'.\delta t - \tfrac{1}{8}\cos t'.\delta t^2 - \tfrac{1}{48}\sin t'.\delta t^3.$$

Hierdurch wird der erste Ausdruck von $\sin h$

$$\sin h = \sin p.\sin D' - \tfrac{1}{2}\sin p.\cos D'.\delta D - \tfrac{1}{8}\sin p.\sin D'.\delta D^2 + \tfrac{1}{48}\cos D'\sin p.\delta D^3$$

$$+ \cos p. \cos D' \cos t' + \tfrac{1}{2} \cos p. \sin D' \cos t'. \delta D$$
$$- \tfrac{1}{8} \cos p. \cos D' \cos t'. \delta D^2$$
$$- \tfrac{1}{48} \cos p. \sin D' \cos t'. \delta D^3$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cos p. \cos D' \sin t'. \delta t$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cos p. \sin t'. \sin D'. \delta D. \delta t$$
$$- \tfrac{1}{16} \cos p. \cos D'. \sin t'. \delta t. \delta D^2$$
$$- \tfrac{1}{8} \cos p. \cos D' \cos t' \delta t^2$$
$$- \tfrac{1}{16} \cos p. \sin D' \cos t'. \delta t^2. \delta D$$
$$- \tfrac{1}{48} \cos p. \cos D'. \sin t' \delta t^3.$$

Den zweiten Ausdruck von $\sin h$ findet man aus diesem sogleich, wenn man nur statt $+\delta t$ und $+\delta D$, $-\delta t$ und $-\delta D$ setzt, weswegen wir denselben nicht hinschreiben wollen. Zieht man dann den ersten Ausdruck vom zweiten ab, so bleibt

$$0 = \delta D (\sin p. \cos D' - \cos p \sin D' \cos t')$$
$$- \delta t. \cos p. \cos D' \sin t'$$
$$+ \tfrac{1}{8} \cos p. \cos D'. \sin t'. \delta t. \delta D^2$$
$$+ \tfrac{1}{8} \cos p. \sin D'. \cos t'. \delta t^2. \delta D$$
$$- \tfrac{1}{24} (\sin p. \cos D' - \cos p. \sin D'. \cos t') \delta D^3$$
$$+ \tfrac{1}{24} \cos p. \cos D'. \sin t'. \delta t^3$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\tang p}{\sin t'} - \tang D'. \cot t' = A$$

nimmt, so lässt sich dies auch so ausdrücken:

$$0 = A. \delta D - \delta t + \tfrac{1}{8} \delta t. \delta D^2$$
$$+ \tfrac{1}{8} \tang D'. \cot t'. \delta t^2. \delta D - \tfrac{1}{24} A. \delta D^3 + \tfrac{1}{24} \delta t^3.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$\delta t = A. \delta D + \frac{A}{24} \delta D^3 (2 + 3A \tang D'. \cot t' + AA)$$

wo man sieht, dass der Unterschied dem Cubus der Veränderung der Declination proportional, also ganz unmerklich ist, indem das erste Glied $A. \delta D$ des Werthes von δt dasjenige ist, nach welchem wir gerechnet haben.

Nehmen wir das §. 458. gewählte Beispiel wieder vor, so hat man daselbst

$$t = 40° \; 25' \; 51''7$$
$$p = 39. \; 28. \; 25{,}0$$
$$D = -15. \; 30. \; 54{,}0$$
$$\delta D = 248''72$$
$$A. \delta D = 396''98$$
$$\log A = 0.20306.$$

und man findet hieraus den Werth von

$$\frac{2 + 3A.\ tang\ D'.\ cot\ t' + AA}{24} = 0{,}1244.$$

Diese Grösse muss noch mit $A.\delta D^3 = A.\ \delta D.(\delta D)^2$ d. h. mit

$$396''98.\left(\frac{248''72}{206265}\right)^2$$

multiplicirt werden, wo 206265 die Anzahl der Secunden eines Bogens bedeutet, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist. Führt man die Multiplication wirklich aus, so erhält man die Correction des Werthes von δt, in Bogensecunden $= 0''0000718$, welche Grösse gar nicht berücksichtigt werden kann.

§. 461.

Man begreift leicht, dass die Messung der correspondirenden Höhen der Sonne oder der Sterne dann dem geringsten Fehler ausgesetzt ist, wenn man dieselben in der Gegend ihrer Parallelkreise nimmt, wo sich die Höhe am schnellsten in gleichen Zeiten ändert. Um diesen Ort auszumitteln, nehme man die Gleichung

$$\sin h = \sin p.\ \sin D + \cos p.\ \cos D.\ \cos t.$$

und differentiire dieselbe in Hinsicht auf die beiden veränderlichen Grössen h und t, so kommt

$$\cos h.\ dH = -\cos p.\ \cos D.\ \sin t.\ dt$$

und hieraus die Geschwindigkeit der Höhenänderung

$$\frac{dh}{dt} = -\cos p.\cos D.\ \frac{\sin t}{\cos h}.$$

Bezeichnet man nun den parallactischen Winkel ZSP im sphärischen Dreieck SZP (fig. 1.) durch E, so hat man

$$\sin t : \cos h = \sin E : \cos p$$

weil $ZPS = t$, $ZS = 90° - h$, $PS = 90° - p$ ist. Man erhält hierdurch

$$\sin E = \cos p.\ \frac{\sin t}{\cos h}$$

und wenn man diesen Werth im obigen Ausdruck der Höhenänderung substituirt, so wird

$$\frac{dh}{dt} = -\cos D.\ \sin E.$$

Ferner erhält man aus demselben Dreieck

$$\sin E : \cos p = \sin SZP : \cos D$$

also kann man statt des Productes $\sin E. \cos D$ auch $\cos p. \sin SZP$ setzen, so dass

$$\frac{dh}{dt} = -\cos p. \sin SZP$$

wird. Da nun der Winkel p constant, und der Winkel SZP das Azimuth ist, so sieht man hieraus, dass die Höhenänderung am schnellsten an der Stelle statt findet, wo der Sinus des Azimuths am grössten ist. Für solche Himmelskörper, bei deren Durchgange durch den Meridian, das Zenith zwischen dem Culminationspunkte und dem Pol liegt, kann das Azimuth alle Werthe erhalten; folglich wird dann die Höhenänderung am stärksten, wenn das Azimuth $\pm 90^\circ$ beträgt, d. h. wenn dieselben durch den ersten Verticalkreis gehen. Man hat dann im Dreieck SZP (fig. 1.), weil SZP ein rechter Winkel wird

$$\cos SP = \cos ZS. \cos ZS$$

d. h. $\sin \delta = \sin h. \sin p.$

und hieraus ergiebt sich die Höhe

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\sin p}.$$

Ist die Declination des Sterns südlich, so wird $\sin h$ negativ, also geht der Stern unter dem Horizont durch den ersten Verticalkreis, wo er nicht beobachtet werden kann. Sein grösstes Azimuth, so lange er sichtbar ist, findet bei dem Aufgange oder Untergange desselben statt; allein an dieser Stelle der Himmelskugel nimmt man keine correspondirenden Höhen, weil der Stand des Sterns wegen der Unsicherheit und Veränderlichkeit der Strahlenbrechung in der Nähe des Horizonts zu ungewiss ist.

Ist die Declination des Sterns grösser als die Polhöhe, oder $\delta > p$, so wird der Quotient $\frac{\sin \delta}{\sin p}$, welcher die Höhe des Sterns zur Zeit der vortheilhaftesten Beobachtung angiebt, grösser als die Einheit, folglich $\sin h > 1$, also h unmöglich. Dies muss natürlich statt finden, da bei Sternen, deren Parallelkreis den Meridian zwischen dem Zenith und dem Pol durchschneidet, der Durchgang durch den ersten

Verticalkreis nicht vorhanden ist, also der grösste Werth des Azimuths nicht 90° seyn kann. In diesem Fall kann aber der parallactische Winkel E alle Werthe von 0° bis 180° annehmen, also wird vermittelst der Gleichung

$$\frac{dh}{dt} = - \cos D.\ \sin E.$$

der Werth von $\frac{dh}{dt}$ am grössten, sobald $\sin E$ seinen grössten Werth $= 1$ erreicht hat, da $\cos D$ eine constante Grösse ist. Die Gleichung

$$\sin E = \cos p.\ \frac{\sin t}{\cos h}$$

zeigt, dass dann $\cos h = \cos p.\ \sin t$ wird, und man hat aus dem Dreieck ZSP, welches bei S einen rechten Winkel hat

$$\cos ZP = \cos ZS.\ \cos SP$$

d. h. $\qquad \sin p = \sin h.\ \sin \delta$

also in diesem Falle wird die Höhe zur Zeit der vortheilhaftesten Beobachtung durch den Ausdruck

$$\sin h = \frac{\sin p}{\sin \delta}$$

gefunden werden.

§. 462.

Man kann nun durch vorige Betrachtungen leicht ausmitteln, welchen Fehler in der Zeitbestimmung ein bei den Höhen begangener Fehler mit sich bringe. Wir haben gefunden dass bei derjenigen Lage der Himmelskörper, wo die Beobachtungen am vortheilhaftesten geschehen können, die Gleichung

$$\frac{dh}{dt} = - \cos p$$

statt finden muss, wo dh als ein Fehler der Höhe, und dt als ein daraus entspringender Fehler des Stundenwinkels angesehen werden kann. Hieraus ergiebt sich

$$dt = - \frac{dh}{\cos p}.$$

Dieser Fehler ist also bei allen Sternen, deren Declination kleiner als die Polhöhe ist, bei gleichen

Beobachtungsfehlern derselbe, weil die Declination des Sterns nicht mit in Betracht kommt, und man sieht zugleich, da *cos p* immer kleiner als die Einheit ist, dass $dt > dh$ wird, d. h. der in Zeit ausgedrückte Fehler bei der Höhenmessung ist immer kleiner als der daraus hervorgehende Fehler in der Zeitbestimmung, selbst in dem Falle, wo die Lage des Sterns der Beobachtung am günstigsten ist. So bringt z. B. in Göttingen, wo $p = 51° 31' 48''$, ein Fehler von $10'' = \delta h$, einen Fehler von 1''072 in der Zeit hervor.

§. 463.

Es kann sich ereignen, dass wenn man um den Gang der Uhr zu bestimmen, zwei Tage hinter einander correspondirende Sonnenhöhen nehmen will, den zweiten Tag wegen des bedeckten Himmels nur Vormittags die Höhen genommen werden können. Hat man nun dabei dieselben Höhen als den Tag vorher gewählt, so kann man sie mit den nachmittägigen verbinden, und den Stand der Uhr für die dazwischen liegende Mitternacht bestimmen. Die hierzu nothwendige Correction lässt sich nun nach der gewöhnlichen Formel

$$\delta t = \delta D. \left(\frac{tang\, p}{sin\, t} - tang\, D.\ cot\, t\right)$$

bestimmen, allein man muss wohl auf die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen des Winkels t achten, und bedenken, dass im Normalfall, aus welchem dieser Ausdruck abgeleitet ist, der Stundenwinkel t vom südlichen Theile des Meridians aus nach Westen gezählt wird, und so bis zu 360° fortgerechnet werden muss. Nähert sich dann während der Beobachtungszeit die Sonne dem Nordpol, so muss der gefundene Werth von δt von der Zeit der zuletzt genommenen correspondirenden Höhe abgezogen werden um diese Zeit auf diejenige zu reduciren, welche ohne eine Veränderung der Declination der Sonne statt gefunden haben würde. Folglich wird diese Correction, wenn man die Mittagsverbesserung sucht, an der nachmittägigen, wenn man die Mitternachts-

verbesserung sucht, an der vormittägigen angebracht werden müssen.

§. 464.

Als ein hierher gehöriges Beispiel wählen wir folgende, von Bohnenberger in Altburg, bei Calw in Würtemberg am 27. März 1792 angestellte Beobachtungen:

Nachmittag	Vormittag
$2^h\ 47'\ 18''0$	$21^h\ 02'\ 46''5$
2. 46. 04,0	21. 04. 00,5
2. 44. 48,0	21. 05. 17,0
2. 43. 31,0	21. 06. 34,7.

Die zweite Reihe von Beobachtungen, welche nach der astronomischen Art die Zeit zu rechnen am 27. März um 21 Uhr angestellt wurde, würde nach bürgerlicher Rechnungsart auf den 28. März um 9 Uhr Vormittags fallen, da die Astronomen den Tag von Mittag an rechnen. Nimmt man aus beiden Reihen die Mittel, so erhält man

Nachmittags $2^h\ 45'\ 25''25$
Vormittags 21. 4. 39,67

also wenn man die halbe Summe dieser beiden Zeiten nimmt, so kommt der genäherte Eintritt der Mitternacht um $11^h\ 55'\ 2''46$.

Zieht man hiervon zwölf Stunden ab, so findet sich die genäherte Zeit des vorhergehenden Mittags

$$= -0^h\ 04'\ 57''54$$

also ergiebt sich der genäherte Stundenwinkel

$$\text{Vormittags} = 21^h\ 09'\ 37''21$$
$$= 317^\circ\ 24.\ 18,15 = t.$$

Ferner hat man die Declination der Sonne um Mitternacht, und die Polhöhe des Beobachtungsortes

$$D = +\ 3^\circ\ 10'$$
$$p = +\ 48^\circ\ 43'\ 26''.$$

Die stündliche Annäherung zum Pol beträgt $58''54$, also hat sich in der Zwischenzeit beider Beobachtungen von $18^h\ 19'\ 14''$ die Declination der Sonne um $1072''49$ geändert, folglich hat man

$$\delta D = +\ 1072''49$$

Aus diesen Datis ergiebt sich die Rechnung folgendermassen:

$tang\, p$	$= 0.05661$	$tang\, D$	$= 8.74292$
$C.\ sin\, t$	$= 0.16954\, n$	$cot\, t$	$= 0.03650\, n$
$log\, \delta D$	$= 3.03039$	$log\, \delta D$	$= 3.03039$
	$3.25654\, n$		$1.80981\, n$
	$-\ 1805{,}29$		$-\ 64{,}54$

folglich wird $\delta t = -\ 1805{,}29 + 64{,}54 = -\ 1740{,}75$, oder in Zeit ausgedrückt

$$\delta t = -\ 1'\ 56''05.$$

Zieht man dies von der Vormittags angestellten Beobachtung ab (wo man also wegen des negativen Zeichens von δt arithmetisch addiren muss), so erhält man die corrigirte Zeit der Beobachtung

$$= 21^h\ 6'\ 35''72.$$

Man hat also um die Zeit der wahren Mitternacht nach der Uhr zu finden

Nachmittags $=$	2^h	$45'$	$25''25$
Vormittags $=$	$21.$	$6.$	$35{,}72$
halbe Summe $=$	11^h	$56'$	$0''48$

welches die gesuchte Zeit ist.

§. 465.

Die bei den erwähnten Rechnungen nothwendige Declination der Sonne und südliche Veränderung derselben, findet man aus den astronomischen Ephemeriden. Sollte die Polhöhe nicht bekannt seyn, so kann man dieselbe näherungsweise aus einer der correspondirenden Höhen vermittelst der Formel

$$sin\, h = sin\, p.\ sin\, D + cos\, p.\ cos\, D.\ cos\, t$$

berechnen. Setzt man nämlich

$$cos\, t.\ cot\, D = tang\, \lambda;$$

so erhält man auch

$$sin\, h = sin\, D\ (sin\, p + cos\, p.\ tang\, \lambda)$$

$$= sin\, D.\ \frac{sin(p + \lambda)}{cos\, \lambda}$$

folglich hieraus

$$sin(p + \lambda) = \frac{sin\, h.\ cos\, \lambda}{sin\, D},$$

Aus dieser Formel ergiebt sich zuerst $p + \lambda$, und da der Winkel λ bekannt ist, so hat man auch die Polhöhe p.

Wir wollen als Beispiel zwei correspondirende Höhen nehmen, die Bohnenberger in Altburg am 27. März 1792 beobachtete; er fand nämlich

Vormittags $9^h\ 10'\ 50''0$
Nachmittags $2.\ 42.\ 15{,}0$

die doppelte Höhe des obern Sonnenrandes $= 65°\ 0'$, also die einfache Höhe $= 32°\ 30'$. Zieht man hiervon den Halbmesser der Sonne ab, der $16'$ beträgt, so kommt die Höhe des Mittelpunkts

$$h = 32°\ 14'\ 0''.$$

Die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen beträgt $2^h\ 45'\ 42''5$, also in Graden ausgedrückt

$$t = 41°\ 25'\ 37''5.$$

Die Declination der Sonne ist des Mittags $+ 2°\ 58'\ 18''$, ihre südliche Zunahme $58''50$, folglich muss man von der mittäglichen Declination noch die Veränderung für $2^h\ 45'\ 42''5$ abziehen; diese beträgt $2'\ 41''$, also war die Declination der Sonne zur Zeit der ersten Beobachtung

$$D = 2°\ 55'\ 37''.$$

Man hat dann aus der Formel

$$\cos t . \cot D = \tan \lambda$$

$$\begin{aligned}
\cos t &= 9.87494 \\
\cot D &= 1.29133 \\
\hline
& 1.16627 = \tan \lambda \\
\lambda &= 86°\ 5'\ 56'' \\
\sin h &= 9.72703 \\
\cos \lambda &= 8.83273 \\
C. \sin D &= 1.29190 \\
\hline
& 9.85166 = \sin(p + \lambda) \\
p + \lambda &= 134°\ 42'\ 40'' \\
\lambda &= 86.\ \ 5.\ 56. \\
\hline
p &= 48°\ 36'\ 44''.
\end{aligned}$$

Dieser Werth weicht nun sieben Minuten von den früher angenommenen genauen

$$p = 48°\ 43'\ 26''$$

ab, so dass er ohne merklichen Fehler bei der Berechnung der Mittagscorrection angewendet werden kann.

§. 466.

Durch die Beobachtung der correspondirenden Sonnenhöhen erhält man, wie schon gesagt ist, die Zeit des wahren Mittags, und wenn die an zwei auf einander folgenden Tagen durch correspondirende Sonnenhöhen gefundenen Zeiten nach der Uhr genau 24 Stunden von einander entfernt sind, so würde die Uhr nach wahrer Zeit gehen; allein da die wahre Zeit kein gleichförmiges Maass ist, so muss man die beobachteten wahren Zeiten, vermöge der Zeitgleichung (§. 39.) die man in den Ephemeriden angegeben findet, auf mittlere Zeit reduciren, und so den Gang der Uhr gegen die mittlere Zeit bestimmen. Wir können uns hierbei nicht auf eine weitere theoretische Untersuchung über die Berechnung der Zeitgleichung einlassen, da dieser Gegenstand der Astronomie völlig angehört, und in jedem Lehrbuche dieser Wissenschaft weitläufig aus einander gesetzt ist. Wir wollen daher blos durch ein Beispiel zeigen, wie sich durch eine Reihe von Beobachtungen der Gang der Uhr bestimmen lässt. Vermittelst der correspondirenden Sonnenhöhen fand v. Humboldt in Caraccas folgende Zeiten des wahren Mittags nach seiner Uhr

1799.	December	1	......	3h 21′ 34″8
	—	8	......	3. 24. 47,0
	—	31	......	3. 30. 3,9
1800.	Januar	12	......	3. 32. 15,8
	—	21	......	3. 33. 7,1
	Februar	1	......	3. 32. 27,8
	—	3	......	3. 32. 8,6.

Der Werth der Zeitgleichung betrug an diesen Tagen

1799.	December	1	......	+ 10′ 28″8
	—	8	......	+ 7. 33,5
	—	31	......	— 3. 38,7
1800.	Januar	12	......	— 8. 51,2
	—	21	......	— 11. 49,1
	Februar	1	......	— 14. 3,3
	—	3	......	— 14. 16,7.

Addirt man diese Zeitgleichung, mit Rücksicht auf das Vorzeichen, zu den angegebenen Zeiten des wah-

ren Mittags, so erhält man die mittlere Zeit nach der Uhr

1799. December	1	. . . .	$3^h\ 34'\ 3''6$
—	8	. . . .	3. 32. 20,5
—	31	. . . .	3. 26. 25,2
1800. Januar	12	. . . .	3. 23. 24,6
—	21	. . . .	3. 21. 18,0
Februar	1	. . . .	3. 18. 24,5
—	3	. . . .	3. 17. 51,9.

Man sieht hieraus, dass die Uhr gegen mittlere Zeit etwas zu langsam ging. Um ihre tägliche Verzögerung zu erhalten, ziehe man immer zwei auf einander folgende Angaben von einander ab, und dividire den Unterschied durch die Anzahl der zwischen den Beobachtungen verflossenen Tagen, so erhält man die Verzögerung

vom 1. December	bis 8. December	. . . .	— $14''73$
— 8. —	— 31. —	. . . .	— 15,44
— 31. —	— 12. Januar	. . . .	— 15,05
— 12. Januar	— 21. —	. . . .	— 14,07
— 21. —	— 1. Februar	. . . .	— 15,77
— 1. Februar	— 3. —	. . . .	— 16,30.

Die Verzögerung ist daher ziemlich gleichförmig gewesen, und wir können ohne merklichen Fehler annehmen, dass dieselbe der Zeit proportional ist, so dass, wenn M die Zeit des Mittags an irgend einem Tage angiebt, der Mittag x nach t Tagen durch

$$x = M - at$$

ausgedrückt wird. Um die Grössen M und a so genau als möglich zu finden, kann man sich der Methode der kleinsten Quadrate bedienen, indem man die Bestimmung so macht, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Zeiten des Mittags ein Minimum wird. Nimmt man den Mittag des 31. Decembers 1799 als den Anfang der Zählung der Tage an, so sind die vorher fallenden Werthe von t negativ, und man hat folgende Bedingungsgleichungen

$$3^h\ 34'\ 3''6 = M + 30a$$
$$3.\ 32.\ 20,5 = M + 23a$$
$$3.\ 26.\ 25,2 = M + 0a$$
$$3.\ 23.\ 24,6 = M - 12a$$

$$3^h\,21'\,18''0 = M - 21\,a$$
$$3.\ 18.\ 24,5 = M - 32\,a$$
$$3.\ 17.\ 51,9 = M - 34\,a.$$

Um die Rechnung etwas einfacher zu machen, setze man

$$M = 3.\ 26.\ 25,2 + m$$
$$a = 15'' + \alpha$$

so erhält man folgendes System von Bedingungsgleichungen, indem man alles in Zeitsecunden ausdrückt

$$+\ 8''4 = m + 30\,\alpha$$
$$+\ 10,3 = m + 23\,\alpha$$
$$0 = m + 0\,\alpha$$
$$-\ 0,6 = m - 12\,\alpha$$
$$+\ 7,8 = m - 21\,\alpha$$
$$-\ 0,7 = m - 32\,\alpha$$
$$-\ 3,3 = m - 34\,\alpha.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man die Fundamentalgleichung für m

$$+\ 21''9 = 7m - 46\,\alpha.$$

Multiplicirt man jede der Gleichungen durch den Coefficienten von α, so erhält man folgende Gleichungen

$$+\ 252''0 = +\ 30\,m + 900\,\alpha$$
$$+\ 236,9 = +\ 23\,m + 529\,\alpha$$
$$0 = +\ 0\,m + 0\,\alpha$$
$$+\ 7,2 = -\ 12\,m + 144\,\alpha$$
$$-\ 163,8 = -\ 21\,m + 441\,\alpha$$
$$+\ 22,4 = -\ 32\,m + 1024\,\alpha$$
$$+\ 112,2 = -\ 34\,m + 1156\,\alpha$$

und die Summe dieser Gleichungen giebt die Fundamentalgleichung für α

$$+\ 456''9 = -\ 46\,m + 4194\,\alpha.$$

Lösst man diese beiden Fundamentalgleichungen auf, so erhält man

$$m = +\ 4''1425$$
$$\alpha = +\ 0''1543$$
$$M = 3^h\,26'\,29''3425$$
$$a = +\ 15''1543$$

folglich wird die Gleichung für den Mittag

$$x = 3^h\,26'\,29''3425 - 15''1543\,t$$

und man findet die Fehler der einzelnen Bestimmungen des Mittags

1799. December	1	. . . .	+ 0″37
—	8	. . . .	— 2″62
—	31	. . . .	+ 4″14
1800. Januar	12	. . . .	+ 2″89
—	21	. . . .	— 6″89
Februar	1	. . . .	— 0″09
—	3	. . . .	+ 2″20.

Die Summe der Quadrate dieser Fehler ergiebt sich
$= 84''81$.

Dividirt man dies durch die Anzahl der Bedingungsgleichungen weniger der Anzahl der unbekannten Grössen, und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den mittlern Fehler einer Zeitbestimmung

$$= \sqrt{\frac{84''81}{7-2}} = 4''1185.$$

Hätte die tägliche Verzögerung oder Beschleunigung der Uhr regelmässiger zu- oder abgenommen, so könnte man zu obiger Formel von x noch ein dem Quadrate der Zeit proportionales Glied hinzufügen, und $x = M - at + btt$ annehmen, wo dann die Rechnung auf ähnliche Art geführt wird als vorher.

§. 467.

Will man den Gang der Uhr durch Beobachtungen von Fixsternen ausmitteln, so kann man auf folgende Weise verfahren. Man nehme correspondirende Höhen des Sterns, und bestimme aus denselben die Zeit der Culmination desselben, indem man aus den bemerkten Zeiten an der Uhr, zu welchen der Stern gleiche Höhe erreichte, das Mittel nimmt. Geht nun die Uhr nach Sternzeit, so giebt der Unterschied dieses Mittels von der in Zeit verwandelten graden Aufsteigung des Sterns an, wie weit sich der Gang der Uhr von der eigentlichen Sternzeit entfernt. Wenn man aber die Uhr nach mittlerer Zeit gehen lässt, wie dies gewöhnlich bei den Chronometern statt findet, die man auf Reisen bei sich hat, so muss man, da die Beobachtung nach mittlerer Zeit, oder wenigstens nach einer nur sehr wenig davon abweichenden

Zeitart geschieht, die Culmination des Sterns auch in mittlerer Zeit kennen. Es sey hierzu die grade Aufsteigung der Sonne im wahren Mittag $= a$, die des Sterns $= \alpha$, so culminirt die Sonne nach dem Stern nach einem Zeitraume, der dem Unterschiede der graden Aufsteigung, durch 15 dividirt, gleich ist (indem wir α grösser als a annehmen), folglich würde die Culmination des Sterns um $\frac{\alpha - a}{15}$ statt finden. Allein dieser Ausdruck ist Sternzeit, man muss daher, um mittlere Zeit zu erhalten, hiervon die Voreilung der Fixsterne gegen mittlere Zeit, die in 24 Stunden 3′ 55″91 beträgt, abziehen, und der Stern culminirt um

$$\frac{\alpha - a}{15} - \frac{\alpha - a}{15} \cdot \frac{3' \, 55''91}{24}$$

nach der Sonne. Addirt man diese Grösse zur mittlern Zeit im wahren Mittage, wo die Culmination der Sonne statt findet, so erhält man die mittlere Zeit der Culmination des Sterns. Die grade Aufsteigung der Sonne und die mittlere Zeit im wahren Mittage, findet man aus den astronomischen Ephemeriden. Die grade Aufsteigung des Sterns ist aber gewöhnlich nur für einen bestimmten Zeitpunkt angegeben, und muss wegen der Präcession, Aberration und Nutation verbessert werden. Wir müssen uns hier damit begnügen, dass wir die Formeln für diese Correction angeben, ohne weiter die Entstehung und Ursachen derselben aus einander zu setzen. Man bezeichne die grade Aufsteigung des Sterns wie vorher durch α, seine Declination durch δ, die Länge der Sonne durch $\odot$, die Länge des aufsteigenden Mondsknoten durch Ω, so hat man

$$\text{Präcession} = 45''958 + 19''948 \, tang\, \delta . \, sin\, \alpha .$$

$$\text{Nutation} = -16''534 \, sin\, \Omega - 8''401 \, tang\, \delta . \, cos(\alpha - \Omega) - 1''229 \, tang\, \delta . \, cos(\alpha - \Omega)$$

$$\text{Aberration} = -19''417 \, \frac{cos(\alpha - \odot)}{cos\, \delta} + 0''836 \, \frac{cos(\alpha + \odot)}{cos\, \delta} .$$

Die durch diese Formeln sich ergebenden Grössen müssen zu den mittlern Ort der Sterne hinzugefügt, oder vom beobachteten abgezogen werden, je-

nachdem man den beobachteten oder mittlern Ort haben will.

§. 468.

Wir wollen diese Formeln auf ein Beispiel anwenden, indem wir die grade Aufsteigung des Sirius für den 20. Januar 1799 aufsuchen. Für den 1. Jan. 1802 hat man

$$\alpha = 99^\circ\ 6'\ 19''85$$
$$\delta = -16^\circ\ 27'\ 13''$$

und hierdurch erhält man die Präcession in der graden Aufsteigung

$$\begin{aligned} tang\,\delta &= 9.47031\,n \\ sin\,\alpha &= 9.99449 \\ log\,19''948 &= \underline{1.29990} \\ & \quad 0.76470\,n \\ & -\ 5''817 \\ & +\ \underline{45''958} \\ & +\ 40''141. \end{aligned}$$

Die jährliche Zunahme beträgt daher 40″141, dies giebt für 3 Jahr weniger 20 Tage rückwärts gerechnet 1′ 58″19, also die mittlere grade Aufsteigung am 20. Januar 1799

$$\alpha = 99^\circ\ 4'\ 22''04.$$

Um die beiden andern Correctionen zu berechnen, hat man für den 20. Januar 1799

$$☊ = 51^\circ\ 30', \qquad ☉ = 300^\circ\ 30',$$
$$\alpha - ☊ = 47^\circ\ 34', \quad \alpha + ☊ = 150^\circ\ 34',$$
$$\alpha - ☉ = 158^\circ\ 34', \quad \alpha + ☉ = 39^\circ\ 34'.$$

$$\begin{aligned} log\,16{,}534 &= 1.21838 & log\,8{,}401 &= 0.92433 \\ sin\,☊ &= \underline{9.89354} & tang\,\delta &= 9.47031\,n \\ & \quad 1.11192 & cos(\alpha - ☊) &= \underline{9.82913} \\ & \quad 12{,}940 & & \quad 0.22377\,n \\ & & & -\ 1{,}674. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\,1{,}229 &= 0.08955 \\ tang\,\delta &= 9.47031\,n \\ cos(\alpha + ☊) &= \underline{9.93998\,n} \\ & \quad 9.49984 \\ & +\ 0{,}316. \end{aligned}$$

folglich die Nutation $= - 12''940 + 1''674 - 0''316$
$= - 11''582$.

$\log 19{,}417$	$= 1.28818$	$\log 0{,}836$	$= 9.92221$
$\cos(\alpha - \odot)$	$= 9.96888\,n$	$\cos(\alpha + \odot)$	$= 9.88699$
$C.\cos\delta$	$= 0.01815$	$C.\cos\delta$	$= 0.01815$
	$1.27521\,n$		9.82735
	$- 18{,}846$		$+ 0{,}672$

also die Aberration $= + 18''846 + 0''672 = + 19''518$, und hieraus ergiebt sich die grade Aufsteigung des Sirius am 20. Januar 1799

$= 99^\circ\ 4'\ 22''04 - 11''58 + 19''52$
$= 99^\circ\ 4'\ 29''96$.

§. 469.

Nun beobachtete v. Humboldt in Montserrat folgende correspondirende Höhen des Sirius

vor d. Culm.	nach d. Culm.	Culmination
$9^h\ 51'\ 46''$	$11^h\ 9'\ 39''$	$10^h\ 30'\ 42''\ 0$
9. 53. 26.	11. 8. 0.	43, 0
9. 55. 7.	11. 6. 8.	37, 5
9. 57. 51.	11. 3. 22.	36, 5
	Mittel	$10^h\ 30'\ 39''75$.

Da die Uhr nach mittlerer Zeit ging, so müssen wir die Culmination des Sirius nach mittlerer Zeit berechnen. Man hat aus dem astronomischen Jahrbuche für 1799 (§. 467.) die grade Aufsteigung der Sonne am 20. Januar für Berlin

$a = 302^\circ\ 42'\ 50''$
stündliche Zunahme $= 2'\ 38''4$
mittlere Zeit im Mittag $= 0^h\ 11.\ 33''1$
Zunahme in 24 Stunden $= 16''7$.

Der Beobachtungsort Montserrat liegt $46'\ 55''$ in Zeit westlich von Berlin, also culminirt die Sonne daselbst um so viel später, und aus den angegebenen Veränderungen findet man für Montserrat

$a = 302^\circ\ 44'\ 54''1$.
Mittlere Zeit im Mittag $= 0^h\ 11'\ 33''6$.

Da nun in vorigem Paragraph $a = 99^\circ\ 4'\ 29''96$ gefunden ist, so hat man

$$\alpha - a = 156^\circ\ 19'\ 35''86$$

$$\frac{\alpha - a}{15} = 10^h\ 25'\ 18''39$$

$$\text{Voreilung} = -\quad 1'\ 42''39$$

$$10^h\ 23'\ 36''00.$$

Hierzu die mittlere Zeit im wahren Mittag addirt, giebt die Culmination des Sirius nach mittlerer Zeit $= 10^h\ 35'\ 9''6$.

Die Uhr zeigte $10^h\ 30'\ 34''75$, folglich blieb sie $4'\ 29''9$ hinter der mittlern Zeit zurück.

§. 470.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der geographischen Breite des Beobachtungsortes über. Bezeichnet man die Höhe der Sonne oder eines Sternes im Meridian durch H, seine Declination durch δ, die Polhöhe des Ortes durch p, so sieht man leicht, dass diese Grössen durch die Gleichung

$$90 - p = H - \delta$$

mit einander verbunden sind; ist die Declination des Sterns südlich, so ändert sich das Vorzeichen von δ, da bekanntlich die südlichen Declinationen als negativ betrachtet werden müssen. Hieraus erhält man sogleich

$$p = 90 + \delta - H$$

so dass also durch eine einzige Beobachtung des Himmelskörpers im Meridian die Polhöhe gefunden ist, da man die hierzu nothwendige Declination für die Sonne aus den Ephemeriden, und für die Fixsterne aus den Sterncatalogen entnehmen darf. Die mittlere Declination die man in den Catalogen findet, muss natürlich eben so wohl wie §. 467. die grade Aufsteigung durch die Präcession, Nutation und Aberration verbessert werden, und wir setzen die dazu gehörigen Formeln sogleich hierher, indem wir die §. 467. gewählten Bezeichnungen beibehalten

$$\text{Präcession} = 19''948\ \cos\alpha$$

$$\text{Nutation} = 8''401\ \sin(\alpha - \Omega) + 1''229\ \sin(\alpha + \Omega)$$

$$\text{Aberration} = 18''580\ \sin\delta.\ \cos\odot.\ \sin\alpha$$

$$-\ 20''253\ \sin\delta.\ \sin\odot.\ \cos\alpha$$

$$-\ 8''060\ \cos\delta.\ \cos\odot.$$

§. 471.

Wir wollen diese Formeln gleich zur Bestimmung der Declination des Sirius am 20. Januar 1799 anwenden, da wir dieselbe nachher bei einer Breitenbestimmung, welche wir als Beispiel wählen wollen, gebrauchen werden. Die mittlere Declination dieses Sterns am 1. Januar 1802 ist folgende:

$$\delta = -16^\circ\ 27'\ 13''4$$

und vermittelst dieses Werthes, nebst den für α, $\odot$, Ω, angegebenen Werthen ergiebt sich nach vorigen Formeln für die Präcession

$$\begin{aligned} \log 19''948 &= 1.29990 \\ \cos\alpha &= \underline{9.19935\,n} \\ & \ \underline{0.49925\,n} \\ & \ -3''157. \end{aligned}$$

Diese jährliche Abnahme der Declination giebt für 3 Jahre weniger 20 Tage rückwärts gerechnet $+ 9''301$, und hierdurch die mittlere Declination des Sirius am 20. Januar 1799

$$\delta = -16^\circ\ 27'\ 4''099.$$

Für die Nutation findet sich

$$\begin{aligned} \log 8{,}401 &= 0.92433 & \log 1{,}229 &= 0.08955 \\ \sin(\alpha - \Omega) &= \underline{9.86809} & \sin(\alpha - \Omega) &= \underline{9.69144} \\ & \ \underline{0.79242} & & \ \underline{9.78099} \\ & \ +6''200 & & \ +0''604. \end{aligned}$$

$$\text{Nutation} = +6''804.$$

Für die Aberration erhält man

$$\begin{aligned} \log 18''580 &= 1.26905 & \log 20{,}253 &= 1.30649 \\ \sin\delta &= 9.45215\,n & \sin\delta &= 9.45215\,n \\ \cos\odot &= 9.70547 & \sin\odot &= 9.93532\,n \\ \sin\alpha &= \underline{9.99453} & \cos\alpha &= \underline{9.19935\,n} \\ & \ \underline{0.42120\,n} & & \ \underline{9.89331\,n} \\ & \ -2''638 & & \ -0''682. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 8''060 &= 0.90634 \\ \cos\delta &= 9.98184 \\ \cos\odot &= \underline{9.70547} \\ & \ \underline{0.59365} \\ & \ +3''923. \end{aligned}$$

Aberration $= - 2''638 + 0''782 - 3''923$
$= - 5''779$
folglich die Declination
$\delta = - 16^\circ\ 27'\ 4''099 + 6''804 - 5''779$
$= - 16^\circ\ 27'\ 03''1.$

§. 472.

Man begreift aber leicht, dass wenn man kein Instrument zu seiner Disposition hat, welches sich sowohl genau im Meridian befindet, als auch die Winkel genau misst, die Methode §. 470. ungenaue Resultate geben wird, wenn man dieselbe Beobachtung nicht zu wiederholten Malen anstellen, und aus den einzelnen Resultaten das Mittel nehmen kann. An einem und denselben Tage kann man denselben Stern nur einmal im Meridian selbst beobachten, so dass diese Beobachtungen einige Tage Verweilen an jedem Orte erforderten, um dessen geographische Breite mit hinreichender Genauigkeit zu erhalten. Dies lässt sich aber bei wissenschaftlichen Reisen oft nicht gut thun, und würde auf dem offenen Meere völlig unmöglich seyn. Man pflegt daher die Höhe eines und desselben Sterns mehrere Male ausserhalb des Meridians zu gewissen Zeitpunkten zu beobachten, die man an der Uhr bemerkt, und sie vermittelst des Stundenwinkels auf den Meridian zu reduciren. Man wählt die Beobachtungszeiten so nahe als möglich bei der Culminationszeit des Sterns, damit die Fehler bei dem Stundenwinkel nicht so stark auf die Höhe einwirken. Bezeichnet man wie gewöhnlich die Höhe durch h, die Declination durch δ, die Polhöhe durch p, den Stundenwinkel durch t, so ist, nach der oft gebrauchten Formel

$$\sin h = \sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta . \cos t$$

und wenn man die bei der Culmination statt findende Höhe durch H benennt, so wird, weil dann ihr Stundenwinkel $t = 0$ ist,

$$\sin H = \sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta .$$

Aus diesen beiden Formeln folgt

$$\sin H - \sin h = \cos p . \cos \delta \,(1 - \cos t)$$

oder auch

$$\sin\frac{H-h}{2} \cdot \cos\frac{H+h}{2} = \cos p \cdot \cos \delta \cdot \sin \tfrac{1}{2} t^2.$$

und wenn der Unterschied der Höhen sehr klein ist, so dass man die Bogen statt der Sinus setzen kann, so wird

$$\delta H = \frac{\cos p \cdot \cos \delta}{2 \cos h} \cdot t^2$$

indem man den Unterschied der Höhen $H - h = \delta H$, und statt $\frac{H+h}{2}$, h nimmt. Dass die Polhöhe, welche erst gesucht wird, selbst schon in der Formel vorkommt, thut nichts, indem man zur ersten Annäherung die der Culmination am nächsten liegenden Höhe als eine im Meridian selbst beobachtete betrachtet, und aus derselben nach §. 470. die Polhöhe ableitet.

§. 473.

Ehe man aber die beobachteten Höhen auf diese Art behandeln kann, muss an denselben noch eine Verbesserung angebracht werden, da die vom Stern herkommenden Strahlen in der Atmosphäre eine Brechung erleiden, welche die beobachtete Höhe grösser macht als die wahre. Diese unter dem Namen der astronomischen Strahlenbrechung bekannte Correction, findet man in den meisten astronomischen Jahrbüchern, der Connoissance de temps, dem Nautical Almanac, und vielen Lehrbüchern der Astronomie in Tafeln gebracht, vermöge deren sich dieselbe für jede individuelle Höhe, den dabei statt findenden Barometerstand und Temperatur, sehr leicht berechnen lässt. Eine sehr einfache Formel, die sich ohne merklichen Fehler von 90 bis 20 Grad Höhe anwenden lässt, ist folgende: man bezeichne die beobachtete Höhe durch h, die Temperatur in Graden des Centesimalthermometers durch t, den constanten Coefficienten 0,00375 durch c, das Verhältniss des Barometerstandes zu dem mittlern von 0,76 Meter, oder 28,075 par. Zoll, oder 29,921 engl. Zoll, durch $1 + \Delta p$, so ist

$$\text{Refraction} = \frac{60''643}{\tan h} \cdot \frac{1 + \Delta p}{1 + ct} - \frac{0''068}{\sin h^3}.$$

Den Logarithmen von $1 + \Delta p$ findet man nach den gebräuchlichsten Maassen durch die Ausdrücke

log metres — 9.88081
log engl. Zoll — 1.47598
log par. Zoll — 1.44832.

Der Logarithme der Constante 60″634 ist = 1.78272.

§. 474.

Um die geographische Breite oder Polhöhe von Montserrat zu bestimmen, beobachtete von Humboldt am 20. Januar 1799 den Sirius nahe bei seiner Culmination, und fand folgende Höhen

Höhe	Zeit der Uhr
31° 58′ 52″	10ʰ 30′ 17″
31. 58. 42.	10. 33. 46.
31. 57. 32.	10. 37. 49.

Die Temperatur ist zu 11° Cent. Therm. angegeben, und für den Barometerstand wollen wir den mittlern annehmen, so dass also $1 + \Delta p = 1$, $1 + ct$ = 1,04125 wird. Man erhält dann für die einzelnen Höhen

Refraction = 1′ 33″00
— = 1. 33,01
— = 1. 33,07

Zieht man diese von den beobachteten Höhen ab, so erhält man die wahren. Die Stundenwinkel, welche der Sirius zu den Beobachtungszeiten hatte, ergeben sich leicht aus seiner Culminationszeit, die nach der Uhrzeit (§. 469.) um 10ʰ 30′ 39″75 statt fand; man braucht nämlich nur die Zeitunterschiede 22″75; 3′ 6″25; 7′ 9″25 nur mit 15 zu multipliciren, nachdem man die Voreilung der Fixsterne in dieser Zeit hinzugefügt hat, da die Uhr nach mittlerer Zeit geht. Ist der Gang der Uhr nach Sternzeit, so ist diese Correction nicht nöthig. Im Allgemeinen kann man dieselbe immer ohne merklichen Fehler wegen ihrer Geringfügigkeit, da die Zeiten so klein sind, vernachlässigen, und wir bringen dieselbe blos der Vollständigkeit wegen mit an. Sie beträgt für die drei Zeiten 0″06, 0″52, 1″19. Man hat dann

wahre Höhen	Stundenwinkel
31° 57′ 19″00	0° 5′ 42″15
31. 57. 8,99	0. 46. 41,55
31. 55. 58,93	1. 47. 36,60.

Die Declination des Sterns beträgt nach §. 471.

$$\delta = -16° \; 26' \; 57''6$$

so die genäherte Polhöhe $p = 90 + \delta - H$ (§. 470.), dem man $H = 31° \; 57' \; 19''$ nimmt, welche die der ılmination am nächsten liegende Höhe ist (§. 472.)

$$p = 41° \; 35' \; 43''.$$

Hierdurch erhält man die drei Correctionen

$$\delta H = 0''24; \quad 16''08; \quad 1' \; 25''38$$

glich die Höhen bei der Culmination

31° 57′ 19″00	+	0″24	=	31° 57′ 19″24
31. 57. 8,99	+	16,08	=	31. 57. 25,07
31. 55. 58,93	+	1′ 25,38	=	31. 57. 24,31
		Mittel	=	31° 58′ 22″37

so die Polhöhe $p = 41° \; 35' \; 39''5$. Es würde der ühe nicht werth seyn, die Rechnung mit dieser uen Polhöhe zu wiederholen, da sie so wenig von r angenommenen abweicht.

§. 475.

Diese Rechnung, welche für eine grosse Anzahl n Beobachtungen etwas beschwerlich wird, lässt :h leicht folgendermassen abkürzen, wenn alle Hö- n sehr nahe bei der Culmination genommen sind, ie die Näherungsformel für δH (§. 472.) verlangt. nd nämlich die beobachteten Höhen h, h', h'' ...., e zugehörigen Refractionen ρ, ρ', ρ'' ...., die Cor- ctionen wegen des Stundenwinkels δh, $\delta h'$, $\delta h''$ ...., ıd ist die Anzahl aller Beobachtungen $= n$, so sieht an, dass das Endresultat durch

$$\frac{(h - \rho + \delta h) + (h' - \rho' + \delta h') + (h'' - \rho'' + \delta h'') + \ldots}{n}$$

ısgedrückt wird. Dies lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{h + h' + h'' + \ldots}{n} - \frac{\rho + \rho' + \rho'' + \ldots}{n}$$
$$+ \frac{\delta h + \delta h' + \delta h'' + \ldots}{n}.$$

Man setze nun den Quotienten $\frac{h+h'+h''+\ldots}{n}$ $= h^{\circ}$, und die dieser mittlern Höhe zugehörige Strahlenbrechung $= \rho$, so kann man wegen des geringen Unterschiedes der einzelnen Höhen annehmen, es sey

$$\rho + \rho' + \rho'' + \ldots\ldots = n\rho^{\circ}.$$

Auf gleiche Weise lässt sich auch der Factor der Correction δH, nämlich $\frac{\cos p.\ \cos\delta}{2\cos h}$ als unveränderlich betrachten, und nennt man die einzelnen Stundenwinkel t, t', $t''\ldots$, so wird

$$\delta h + \delta h' + \delta h'' = \frac{\cos p.\ \cos\delta}{2\cos h}(tt + t't' + t''t'' + \ldots)$$

$$= \frac{\cos p.\ \cos\delta}{2\cos h}.\ \Sigma t^2$$

folglich lässt sich das Endresultat auf einmal so ausdrücken:

$$h^{\circ} - \rho^{\circ} + \frac{\cos p.\ \cos\delta}{\cos h}.\ \frac{\Sigma t^2}{2n}$$

wo man für h das von der Strahlenbrechung befreiete Mittel nimmt.

Statt der Quadrate von t nimmt man die Quadrate der Sinus von t und multiplicirt dieselben um Secunden zu erhalten, mit der bekannten Zahl 206265″. Wendet man dies auf voriges Beispiel an, so hat man

$$\begin{array}{rl}
h & = 31^{\circ}\ 58'\ 52''\\
h' & = 31.\ 58.\ 42.\\
h'' & = 31.\ 57.\ 32.\\
\hline
h^{\circ} & = 31^{\circ}\ 58'\ 22''00\\
\rho^{\circ} & = \phantom{31^{\circ}}\ 1'\ 35{,}03\\
\hline
 & \ 31^{\circ}\ 56'\ 48''97
\end{array}$$

$$\frac{\Sigma t^2}{2n} = \frac{240''67}{6} = 40''11.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 40''11 & = 1.60325\\
\cos p & = 9.87382\\
\cos\delta & = 9.98185\\
C.\ \cos h & = 0.07132\\
\hline
 & \ 1.53024 = 33''90.
\end{array}$$

Addirt man dies zu dem vorigen Werthe von $h^{o} - \rho^{o}$, so kommt das Endresultat

$$31^{o}\ 57'\ 22''87,$$

ganz genau als vorher.

§. 476.

Wählt man statt eines Fixsterns die Sonne oder einen andern Himmelskörper, der eine merkliche Bewegung besitzt, so kommen ausser der Correction wegen des Stundenwinkels und der Strahlenbrechung noch andere kleine Verbesserungen hinzu. Ein jeder Himmelskörper, bei welchem eine Bewegung merklich ist, zeigt sich durch Fernröhre wenigstens immer als eine Scheibe von merklicher Ausdehnung, und man pflegt daher die Höhe des obern oder untern Randes der Scheibe zu nehmen; da aber alle Berechnungen der Lage der Himmelskörper für ihren Mittelpunkt gelten, so sieht man, dass erstens von der beobachteten Höhe der Halbmesser der Scheibe abgezogen oder zu derselben hinzuaddirt werden muss, um die Höhe des Mittelpunkts zu haben, jenachdem der obere oder der untere Rand als fester Punkt diente. Genau genommen muss die Refraction schon vorher von der Höhe abgezogen worden seyn, weil die Strahlenbrechung den verticalen Durchmesser verkürzt, und die Tafeln oder Ephemeriden den zur Correction nothwendigen Halbmesser des Himmelskörpers so geben, wie er ohne Refraction sich zeigen würde, allein da in solchen Höhen über dem Horizont, die man bei diesen Beobachtungen anwendet, diese Verkürzung sehr geringfügig ist, so kann man jede dieser beiden Correctionen zuerst vornehmen. Ferner muss man berücksichtigen, dass Himmelskörper dieser Art keine so grosse Entfernung von der Erde besitzen, dass der Abstand des Beobachters von der Drehungsaxe der Erde als unendlich klein gegen dieselbe angesehen werden kann. Hierdurch erscheint die Höhe immer kleiner als sie dann seyn würde, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befände, und der Unterschied beider Höhen wird die Höhenparallaxe genannt. Da wir späterhin bei der Bestimmung der geographischen Längen ausführlicher von den Parallaxen und ihrer Berechnungs-

art handeln werden, so mag es hier hinreichen, blos die Formel anzugeben, nach welcher diese Höhenparallaxe berechnet wird. Bezeichnet man nämlich die Höhenparallaxe, die sich in den Ephemeriden findet, durch π, die Höhe durch h, so ist die Grösse, welche zu der beobachteten Höhe hinzugefügt werden muss $= \pi . \cos h$. Bei der Sonne, die gewöhnlich zu Breitenbestimmungen dieser Art angewendet wird, ist der Werth von π in ihrer mittlern Entfernung nach Enke's Bestimmungen $= 8''58$, und bei jeder andern Entfernung die sich zur mittlern wie $r : 1$ verhält, wird sein Werth $= \frac{8''58}{r}$. Nachdem man durch diese Correctionen, der Refraction des Halbmessers, der Höhenparallaxe, die wahre Höhe erhalten hat, geht man zu der Verbesserung über, die aus dem Stundenwinkel und der veränderlichen Declination entsteht. Um die hierzu nothwendige Formel abzuleiten, nehmen wir an, dass die Sonne sich dem Nordpol nähere, und setzen ihre Declination bei der Beobachtung vor der Culmination $= \delta - d\delta$, zur Zeit der Culmination δ, so haben wir mit Beibehaltung der §. 472. gebrauchten Charactere

$$\sin h = \sin p . \sin(\delta - d\delta) + \cos p . \cos(\delta - d\delta) \cos t$$
$$\sin H = \sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta .$$

Da die Grösse $d\delta$ sehr klein ist, so haben wir mit Vernachlässigung der Potenzen dieser Grösse

$$\sin h = \sin p . \sin \delta - \sin p . \cos \delta . d\delta$$
$$+ \cos p . \cos \delta . \cos t + \cos p . \sin \delta . \cos t . d\delta$$

und hieraus durch Subtraction

$$\sin H - \sin h = \cos p . \cos \delta \, (1 - \cos t) + \sin p . \cos \delta . d\delta$$
$$- \cos p . \sin \delta . \cos t . d\delta .$$

Nun ist aber

$$\sin H - \sin h = 2 \sin \frac{H - h}{2} . \cos \frac{H + h}{2}$$
$$= \delta H . \cos h$$
$$1 - \cos t = 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = \tfrac{1}{2} t^2$$

und in dem mit $d\delta$ multiplicirten Gliede kann man ohne Weiteres $\cos t = 1$ setzen, wodurch beide Glieder sich auf $\sin(p - \delta) . d\delta$ reduciren. Es wird daher

$$\delta H = \frac{\cos p . \cos \delta}{\cos h} . t^2 + \frac{\sin(p - \delta)}{\cos h} . d\delta$$

Im Meridian hat man nach §. 470. $H = 90^\circ - (p - \delta)$, also auch $\cos H = \sin(p - \delta)$, und da h von H der Voraussetzung zufolge nur wenig verschieden ist, so kann man den Factor $\frac{\sin(p - \delta)}{\cos h} = 1$ setzen, und es wird

$$\delta H = \frac{\cos p . \cos \delta}{\cos h} . t^2 + d\delta.$$

Entfernt sich die Sonne während der Zeit der Beobachtungen vom Pol, so muss man $d\delta$ abziehen, statt zu addiren. Das erste Glied dieser Formel ist völlig dasselbe, welches bei den Beobachtungen der Fixsterne angewendet wurde.

§. 477.

Wir wollen zuerst die Rechnung an einem Beispiel genau durchführen, und dann zeigen, wie man auf ähnliche Art als §. 475. Abkürzungen anbringen kann. Zur Breitenbestimmung von Barcelona beobachtete v. Humboldt folgende Höhen des obern Sonnenrandes am 15. Januar 1799 *)

Höhe	Zeit
27° 47′ 56″0	11ʰ 53′ 47″
27. 48. 56,0	11. 55. 38.
27. 49. 53,5	11. 58. 00.
27. 50. 33,5	0. 04. 30.
27. 49. 53,5	0. 11. 16.
27. 48. 56,0	0. 12. 48.
27. 47. 56,0	0. 14. 54.

Die Temperatur ist zu + 10° des Centesimalthermometers angegeben, und den Barometerstand setzen wir dem mittlern gleich. Wir erhalten hierdurch nach §. 473. die Refractionen

1′ 50″54; 1′ 50″46; 1′ 50″39; 1′ 50″84
1. 50,39; 1. 50,46; 1. 50,54.

Der Halbmesser der Sonne beträgt am 15. Januar 1799, 16′ 18″63, und zieht man diesen sowohl als

*) Durch einen Druckfehler steht daselbst der 26. Januar (Recueil d'Observ. etc.)

die Refractionen von den beobachteten Höhen ab, so bleiben folgende Höhen

27° 29′ 46″73,
27. 30. 46,81,
27. 31. 44,48,
27. 32. 24,53,
27. 31. 44,48,
27. 30. 46,81,
27. 29. 46,73,

die nur noch von der Parallaxe zu befreien sind. Die Grösse π wird für diese Zeit = 8″72, und π *cos h* für alle Beobachtungen = 7″73, welches zu den letzten Höhen addirt werden muss. Die Stundenwinkel ergeben sich leicht aus der Culmination der Sonne, die nach der Uhr aus correspondirenden Höhen geschlossen, um 0^h 4′ 12″ statt fand. Die Reduction der Zeit auf Bogen geschieht hierbei blos durch die Multiplication durch 15, da die nach mittlere Zeit gehende Uhr zu wenig von der wahren Sonnenzeit abweicht. Man erhält dann

wahre Höhe	Stundenwinkel
27° 29′ 54″46	+ 2° 36′ 15″
27. 30. 54,54	2. 8. 30.
27. 31. 52,21	1. 33. 00.
27. 32. 32,25	− 0. 04. 30.
27. 30. 52,21	1. 46. 00.
27. 30. 54,54	2. 09. 00.
27. 29. 54,46	2. 40. 30.

Die Declination der Sonne ergiebt sich aus dem astronom. Jahrbuche 1799 für Berlin am 15. Januar

= − 21° 4′ 50″

und die stündliche Näherung gegen den Nordpol = 27″96. Da nun Barcelona 57′ in Zeit westlicher liegt als Berlin, so wird man die Proportion

60′ : 57′ = 27″96 : 26″56

bilden, und diese 26″56 zu der obigen Declination addiren, um diejenige Declination zu erhalten, die der Culmination der Sonne in Barcelona entspricht. Sie wird δ = − 21° 4′ 23″44.

Nimmt man die beobachtete Höhe von 27° 32′ 32″ die der Culmination am nächsten liegt, als im

Meridian beobachtet an, so erhält man dadurch die genäherte Polhöhe

$$p = 41° 23' 5''$$

Die Correctionen wegen der Stundenwinkel und Veränderung der Declination sind

$\frac{\cos p.\ \cos \delta}{2 \cos h} . t^2$	$d\delta$
+ 2' 48''04	+ 4''87
+ 1. 53,70	+ 3,96
+ 1. 02,16	+ 2,89
+ 0. 00,14	— 0,14
+ 1. 17,39	— 3,30
+ 1. 54,58	— 4,01
+ 2. 57,30	— 5,02

folglich sind die wahren Höhen bei der Culmination der Sonne:

27° 29' 54''46	+ 2' 52''91	=	27° 32' 47''37
27. 30. 54,54	+ 1. 57,66	=	52,20
27. 31. 52,21	+ 1. 05,05	=	57,26
27. 32. 32,25	+ 0. 00,00	=	32,25
27. 31. 52,21	+ 1. 14,09	=	66,30
27. 30. 54,54	+ 1. 50,57	=	45,51
27. 29. 54,46	+ 2. 52,28	=	46,74
	Mittel		27° 32' 49''66
	δ	=	— 21. 4. 23,44
			48. 37. 13,10
			90. 00. 00,00
	p	=	41. 22. 46,90.

§. 478.

Wenn man nicht die Mittagshöhen aus den einzelnen Beobachtungen wissen will, sondern sich mit dem Endresultat begnügt, so kann man die Rechnung folgendermassen sehr abkürzen. Man nehme das Mittel aus allen Beobachtungen $= h°$, befreie dieses von der Strahlenbrechung $\varrho°$, ziehe den Halbmesser der Sonne ab und addire die Höhenparallaxe, so erhält man eine Höhe h, aus der man die Polhöhe näherungsweise hat, indem man sie als die mittägliche Höhe der Sonne betrachtet. Dann addire man die Correction wegen des Stundenwinkels

$$\frac{\cos p.\ \cos \delta}{\cos h} \cdot \frac{\Sigma.\ t^2}{2n}$$

so hat man nur noch die Correction wegen der Veränderung der Declination $d\delta$ anzubringen. Diese Grösse ist dem Stundenwinkel proportional; nennt man daher die Aenderung der Declination innerhalb vier Zeitminuten oder eines Grades, f, so hat man die einzelnen Werthe von $d\delta$, $\frac{f\,t}{1^\circ}$, $\frac{f\,t'}{1^\circ}$, $\frac{f\,t''}{1^\circ}$ u. s. w. und wenn n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet, so hat man zu der vorigen Höhe noch die Grösse

$$\frac{f\,t + f\,t' + f\,t'' + \ldots}{n.\ 1^\circ} = f.\frac{\Sigma t}{n.\ 1^\circ}$$

zu addiren, wo die Stundenwinkel vor der Culmination als positiv, nach derselben als negativ zu betrachten sind. Die Summe giebt das Mittel aus allen einzelnen Mittagshöhen. Aus vorigem Beispiel hat man

man h°	=	27° 49′ 09″21
ρ°	= −	1. 50,45
Halbmesser	= −	16. 18,63
Parallaxe	= +	7,73
		27° 31′ 7,86 = h.

Hieraus folgt die genäherte Polhöhe

$$p = 41^\circ\ 24'\ 29''$$

$$\frac{\cos p.\ \cos \delta}{\cos h} \cdot \frac{\Sigma\, t^2}{2n} = \frac{1426{,}26}{14} = 101''88.$$

Ferner hat man

$$f = +\ 1''86,\quad \Sigma t = -\ 22'\ 15''$$

$$f.\frac{\Sigma t}{n.\ 1^\circ} = -\ 0''10$$

also die mittlere mittägliche Höhe der Sonne

$= 27^\circ\ 31'\ 7''86 + 1'\ 41''88 - 0''10$

$= 27.\ 32.\ 49''64$

welcher nur um zwei Hunderttheile einer Secunde von dem vorigen Resultate abweicht.

§. 479.

Eine sehr einfache Methode die Breite zu bestimmen, die **Douwes** vorgeschlagen hat, und welche

auch nach ihm benannt ist, besteht darin, dass man die Höhe eines Himmelskörpers zweimal beobachtet, einmal sehr nahe bei seiner Culmination, das anderemal entfernt von derselben, und zugleich den Zeitunterschied beider Beobachtungen bemerkt. Um die hierzu nöthigen Formeln zu erhalten, sey h die von der Culmination entfernte Höhe, h' die zunächst am Meridian beobachtete, $T+t$, und t die zugehörigen Stundenwinkel, so dass also T die zwischen beiden Beobachtungen verflossene in Bogen verwandelte Zeit ist, p die Polhöhe, δ, $\delta + d\delta$ die Declinationen (wir nehmen dieselben als verschieden an, damit die Formeln sich zugleich auch für die Beobachtungen der Sonne anwenden lassen, da man für die Fixsterne nur $d\delta = 0$ zu setzen braucht), so hat man nach den bekannten Formeln die beiden Gleichungen

$$\sin h' = \sin p.\ \sin(\delta + d\delta) + \cos p.\ \cos(\delta + d\delta) \cos t.$$
$$\sin h = \sin p.\ \sin\delta + \cos p.\ \cos\delta.\ \cos(T+t).$$

Nun ist die Polhöhe beinahe gleich $90 - h' + \delta + d\delta$, da die Höhe h' der im Meridian sehr nahe kommt, und da der Winkel t nur klein ist, so kann man

$$p = 90 - h' + \delta + d\delta - x,$$
$$\cos t = 1 - \frac{tt}{2},$$

setzen, wo x ein so kleiner Winkel ist, dass die höhern Potenzen vernachlässigt werden können. Hierdurch wird die erste Gleichung

$$\begin{aligned}\sin h' &= \cos(h' - \delta - d\delta + x).\ \sin(\delta + d\delta) \\ &\quad + \sin(h' - \delta - d\delta + x).\ \cos(\delta + d\delta) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \sin(h' - \delta - d\delta + x) \cos(\delta + d\delta).\ t^2 \\ &= \sin(h' + x) - \tfrac{1}{2} \sin(h' - \delta).\ \cos\delta.\ t^2\end{aligned}$$

oder auch wenn man $\sin(h' + x)$ entwickelt

$$x = \frac{\sin(h' - \delta).\ \cos\delta}{\cos h'}.\ \frac{t^2}{2}$$

Die Gleichung welche $\sin h$ ausdrückt, giebt, indem man $\cos(T+t)$ entwickelt:

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin p.\ \sin\delta + \cos p.\ \cos\delta.\ \cos T \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \cos p.\ \cos\delta.\ \cos T.\ t^2 \\ &\quad - \cos p.\ \cos\delta.\ \sin T.\ t \\ &= \cos(p - \delta) - 2 \cos p.\ \cos\delta.\ \sin \tfrac{1}{2} T^2 \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \cos p.\ \cos\delta.\ \cos T.\ t^2 \\ &\quad - \cos p.\ \cos\delta.\ \sin T.\ t.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man leicht

$$t = \frac{\cos(p - \delta) - \sin h}{\cos p.\ \cos\delta.\ \sin T} - \tang \tfrac{1}{2} T - \tfrac{1}{2} \cot T.\ t^2.$$

oder wenn man statt p seinen Werth setzt, so wird

$$\cos(p - \delta) = \sin(h' + x - d\delta)$$

$$\cos(p - \delta) - \sin h = 2 \sin \frac{h' - h + x - d\delta}{2}.\ \cos \frac{h' + h + x - d\delta}{2}$$

folglich

$$t = 2. \frac{\sin \frac{h' - h + x - d\delta}{2}.\ \cos \frac{h' + h + x - d\delta}{2}}{\sin(h' - \delta + x - d\delta).\ \cos\delta.\ \sin T} - \tang \tfrac{1}{2} T - \tfrac{1}{2}.\ \cot T.\ t^2.$$

§. 480.

Um nun die Rechnung am vortheilhaftesten einzuleiten, vernachlässige man zuerst im ersten Gliede den kleinern Winkel x, da dieser dem Quadrat von t proportional ist, und setze

$$2. \frac{\sin \frac{h' - h - d\delta}{2},\ \cos \frac{h' + h - d\delta}{2}}{\sin(h' - \delta - d\delta).\ \cos\delta.\ \sin T} = \tang \tfrac{1}{2} N$$

so wird nächstens

$$t = \tang \tfrac{1}{2} N - \tang \tfrac{1}{2} T = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(N - T)}{\cos \tfrac{1}{2} N.\ \cos \tfrac{1}{2} T}$$

und hierdurch

$$x = \frac{\sin(h' - \delta).\ \cos\delta}{\cos h'}.\ \frac{t^2}{2}.$$

Man wird auf diese Weise in den meisten Fällen die Polhöhe

$$p = 90 - h' + \delta + d\delta - x$$

genau genug erhalten. Wollte man aber eine grössere Genauigkeit haben, so braucht man nur die Rechnung zu wiederholen, indem man den gefundenen Werth von x mit berücksichtigt, wobei man aber dann nicht vergessen darf bei der neuen Berechnung von t das weggelassene Glied $\tfrac{1}{2} \cot T.\ t^2$ mit

hinzuzuziehen. Es ist fast überflüssig zu bemerken, dass die beobachteten Höhen erst von der Strahlenbrechung und Parallaxe befreit werden müssen.

§. 481.

Als Beispiel nehmen wir zwei Beobachtungen die v. Humboldt in Montserrat am 20. Januar 1799 angestellt hat.

Zeit d. Uhr	doppelte Höhe d. Sirius
$9^h\ 51'\ 46''$	$62°\ 35'\ 19''$
10. 30. 17.	63. 57. 44.

Die Strahlenbrechungen sind $1'\ 35''15$ und $1'\ 33''00$, also

$$h = 31°\ 16'\ 4''35$$
$$h' = 31.\ 57.\ 19{,}00.$$

Die Zwischenzeit ist $= 0^h\ 38'\ 31''$, die aber wegen der Voreilung der Fixsterne um $6''5$ vermehrt werden muss; es wird daher der Winkel

$$T = 9°\ 39'\ 22''5.$$

Die Declination des Sirius ist (§. 471.)

$$\delta = -16°\ 26'\ 57''6$$

und die Veränderung $d\delta = 0$. Es wird also

$$\frac{h'-h}{2} = 0°\ 20'\ 37''32$$
$$\frac{h'+h}{2} = 31.\ 36.\ 41{,}67$$
$$h'-\delta = 48.\ 24.\ 16{,}60$$

$$\log 2 = 0.3010300$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(h'-h) = 7.7780590$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(h'+h) = 9.9302467$$
$$C.\ \sin(h'-\delta) = 0.1261847$$
$$C.\ \cos \delta = 0.0181487$$
$$C.\ \sin T = 0.7753720$$
$$8.9290411 = \tang \tfrac{1}{2} N$$

$$\tfrac{1}{2} N = 4°\ 51'\ 15''33$$
$$\tfrac{1}{2} T = 4.\ 49.\ 41{,}25$$
$$\tfrac{1}{2}(N-T) = 0.\ 1.\ 34{,}08$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(N-T) = 6.65906$$
$$C.\ \cos \tfrac{1}{2} N = 0.00146$$

$$
\begin{aligned}
C.\cos\tfrac{1}{2}T &= 0.00155 \\
& \overline{6.66207} = t. \\
\log t^{\frac{1}{2}} &= 3.32414 \\
\sin(h'-\delta) &= 9.87382 \\
\cos\delta &= 9.98185 \\
C.\cos h' &= 0.07137 \\
\log\tfrac{1}{2} &= 9.69897 \\
\log 206265'' &= 5.31445 \\
& \overline{8.26460} = x = 0''02
\end{aligned}
$$

folglich die Polhöhe $p = 90 - h' + \delta - x$

$= 41^\circ\ 35'\ 43''38.$

Es würde bei diesem Beispiel der Mühe nicht werth seyn die Rechnung zu wiederholen, da die Grösse x einen so geringen Werth erhalten hat.

§. 482.

Wir wollen noch ein zweites Beispiel wählen, wobei zwei Beobachtungen von Sonnenhöhen gewählt sind, die v. Humboldt in Valencia am 6. Februar 1799 nahm

Zeit d. Uhr	Höhe d. Sonne
$9^h\ 32'\ 34''$	$23^\circ\ 3'\ 42''5$
12. 22. 10.	35. 17. 57,5.

Die Verbesserungen sind

Strahlenbrechung	$= -\ 2'\ 15''11;$	$-\ 1'\ 20''13.$
Halbmesser	$= -\ 16.\ 15,72;$	$-\ 16.\ 15,71.$
Parallaxe	$= +\ 00.\ 8,00;$	$+\ 00.\ 7,09.$

und hierdurch ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
h &= 22^\circ\ 45'\ 19''67 \\
h' &= 35.\ 00.\ 28,75.
\end{aligned}
$$

Die Declination der Sonne in Berlin am 6. Febr. ist $= -15^\circ\ 31'\ 36''$, und die stündliche Annäherung derselben gegen den Nordpol $= 46''46$. Nimmt man nun Valencia in Zeit 53′ 1″ westlich von Berlin, so ergiebt sich die Declination der Sonne bei der Culmination derselben in Valencia, die man zur Zeit der Beobachtung der grössern Höhe, die nahe am Meridian gemacht ist, annehmen kann

$$
\begin{aligned}
\delta + d\delta &= -\ 15^\circ\ 30'\ 54''70 \\
\delta &= -\ 15.\ 33.\ 06,89
\end{aligned}
$$

·o die letztere Declination für die Zeit der ersten eobachtung gilt. Verwandelt man die Zwischenzeit er Beobachtungen $2^h\ 49'\ 36''$ in Bogen, so kommt, a der Gang der Uhr mit der Bewegung der Sonne bereinstimmt,

$$T = 42^\circ\ 24'\ 30''.$$

Fernen hat man noch

$$\frac{h' - h - d\delta}{2} = 6^\circ\ 6'\ 58''44$$

$$\frac{h' + h - d\delta}{2} = 28.\ 25.\ 48,11$$

$$h' - \delta - d\delta = 50.\ 31.\ 23,45$$

nd hieraus erhält man nach den Formeln (§. 480.)

$$\tfrac{1}{2} N = 20^\circ\ 24'\ 29''80$$

$$\tfrac{1}{2} T = 21.\ 12.\ 15,00$$

$$\tfrac{1}{2}(N - T) = -\ 0.\ 47.\ 45,20$$

$$t = -\ 3276''2 = -\ 54'\ 36''2.$$

Dieser negative Werth des Stundenwinkels zeigt n, dass die zweite Beobachtung nahe am Meridian chon nach der Culmination der Sonne gemacht ist. educirt man sie auf Zeit, so erhält man $3'\ 38''4$, relches von der Zeit der zweiten Beobachtung abgeogen, die Culmination der Sonne um

$$12^h\ 18'\ 31''6$$

iebt. Dies weicht von der genauern, aus mehreren Beobachtungen correspondirender Sonnenhöhen gechlossenen $12^h\ 18'\ 27''$, nur wenig ab.

Endlich findet sich noch der Werth von $x = 23''64$, o dass die Polhöhe

$$p = 39^\circ\ 28'\ 13''91$$

efunden wird. Will man die Rechnung noch einmal nit Einführung des Werthes von x wiederholen, so nuss man zuerst zu den Werthen von δ und $\delta + d\delta$, $''90$ hinzufügen, weil die Beobachtung nahe am Meridian erst $3'\ 38''$ nach der Culmination gemacht ist, und die vorigen Declinationen für die Culminationseit der Sonne gelten. Man hat dann

$$\delta + d\delta = -\ 15^\circ\ 30'\ 51''80$$

$$\delta = -\ 15.\ 33.\ 4,00$$

$$\frac{h' - h + x - d\delta}{2} = 6.\ 7.\ 10,26$$

$$\frac{h'+h+x-d\delta}{2} = 28^\circ\ 52'\ 59''93$$
$$h'-\delta+x-d\delta = 50.\ 31.\ 44{,}19$$
und hieraus ergiebt sich
$$\tfrac{1}{2}N = \quad 20^\circ\ 24'\ 57''45$$
$$\tfrac{1}{2}T = \quad 21.\ 12.\ 15{,}00$$
$$\tfrac{1}{2}(N-T) = - \quad 47.\ 17{,}55$$
$$t = -\ 3275''7$$
$$x = +\ 23{,}64$$
$$p = \quad 39^\circ\ 28'\ 15''81.$$

Man sieht dass der Werth von x sich gar nicht geändert hat, und dass man den neuen Werth der Polhöhe dadurch erhalten haben würde, dass man zu den vorigen die Declinationsänderung 2″90 addirte, die während der Zeit statt fand, welche zwischen der Culmination der Sonne und der dem Meridian am nächsten liegenden Beobachtung verfloss.

§. 483.

Man kann ebenfalls aus drei beobachteten Höhen eines und desselben Sterns und den Zwischenzeiten die Polhöhe ableiten; denn es seyen die drei Höhen h, h', h'', die Stundenwinkel $t+T'$, $t+T$, t, so hat man die drei Gleichungen
$$\sin h = \sin\delta.\ \sin p. + \cos\delta.\ \cos p.\ \cos(t+T')$$
$$\sin h' = \sin\delta.\ \sin p. + \cos\delta.\ \cos p.\ \cos(t+T)$$
$$\sin h'' = \sin\delta.\ \sin p. + \cos\delta.\ \cos p.\ \cos t.$$

Hieraus erhält man leicht
$$\frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} = \frac{\cos t - \cos(t+T')}{\cos t - \cos(t+T)}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner des hintern Theils der Gleichung durch $\cos t$, so kommt
$$\frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} = \frac{1-\cos T' + tg\,t.\ \sin T'}{1-\cos T + tg\,t.\ \sin T}.$$

Bemerkt man nun, dass
$$\frac{\sin T'}{1-\cos T'} = tang\,\tfrac{1}{2}T', \qquad \frac{\sin T}{1-\cos T} = tang\,\tfrac{1}{2}T.$$
so kann man die Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} \cdot \frac{1 - \cos T}{1 - \cos T'} = \frac{1 + tang\, t.\ tang \tfrac{1}{2} T'}{1 + tang\, t.\ tang \tfrac{1}{2} T}.$$

Der vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil lässt sich auch so ausdrücken:

$$\frac{\sin \frac{h'' - h}{2} \cdot \cos \frac{h'' + h}{2}}{\sin \frac{h'' - h'}{2} \cdot \cos \frac{h'' + h'}{2}} \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2} T^2}{\sin \tfrac{1}{2} T'^2}$$

und unter dieser Form kann er leicht durch Logarithmen berechnet werden, und wir setzen ihn $= tang(45 + \lambda)$, so dass also λ ein bekannter Winkel wird. Nun ist aber

$$tang(45 + \lambda) = \frac{1 + tang\,\lambda}{1 - tang\,\lambda}$$

also auch

$$\frac{1 + tang\,\lambda}{1 - tang\,\lambda} = \frac{1 + tang\, t.\ tang \tfrac{1}{2} T'}{1 + tang\, t.\ tang \tfrac{1}{2} T}$$

und hieraus ergiebt sich leicht

$$tang\, t = \frac{2 tang\,\lambda}{(tg \tfrac{1}{2} T' - tg \tfrac{1}{2} T) - tg\lambda\,(tg \tfrac{1}{2} T' + tg \tfrac{1}{2} T)}$$

$$\frac{\frac{2 tang\,\lambda.\ \cos \tfrac{1}{2} T'.\ \cos \tfrac{1}{2} T}{\sin \tfrac{1}{2}(T' - T)}}{1 - tang\,\lambda \frac{\sin \tfrac{1}{2}(T' + T)}{\sin \tfrac{1}{2}(T' - T)}}.$$

Man setze nun noch

$$tang\,\lambda \frac{\sin \tfrac{1}{2}(T' + T)}{\sin \tfrac{1}{2}(T - T)} = tang\,\theta$$

so kommt

$$tang\, t = \frac{2 \cos \tfrac{1}{2} T'.\ \cos \tfrac{1}{2} T}{\sin \tfrac{1}{2}(T' + T)} \cdot \frac{tang\,\theta}{1 - tang\,\theta}$$

$$= \frac{2.\ \cos \tfrac{1}{2} T'.\ \cos \tfrac{1}{2} T.\ \sin \theta.\ \sin 45}{\sin \tfrac{1}{2}(T' + T).\ \sin(45 - \theta)}$$

und man kann aus irgend einer der drei Fundamentalgleichungen mit der bekannten Declination δ des Sterns, die Polhöhe p berechnen. Dies geschieht wie

schon früher erwähnt ist am besten dadurch, dass man $\cot\delta.\cos(t+T') = \tang N$ setzt, wodurch dann die Gleichung

$$\sin h = \sin p.\sin\delta + \cos p.\cos\delta.\cos(T'+t)$$

in diese übergeht

$$\sin h = \sin\delta\,(\sin p + \cos p.\tang N)$$
$$= \frac{\sin\delta}{\cos N}\sin(p+N)$$

und hieraus erhält man

$$\sin(p+N) = \frac{\sin h.\cos N}{\sin\delta}$$

welches $p+N$ giebt, und da N bekannt ist, so findet sich auch daraus die Polhöhe p.

§. 484.

Sind alle drei Höhen sehr nahe am Meridian genommen, so kann man die Rechnung folgendermassen abkürzen. Nach §. 477. wenn t in Zeitminuten ausgedrückt ist, f die Veränderung der Declination in einer Minute und a die Zunahme der Höhe in einer Minute ausdrückt, ist die mittägliche Höhe

$$H = h'' + at^2 + ft$$
$$H = h' + a(t+T)^2 + f(t+T)$$
$$H = h + a(t+T')^2 + f(t+T').$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$0 = h'' - h' - aT(2t+T) - fT$$
$$0 = h'' - h - aT'(2t+T') - fT'$$

folglich auch

$$a(2t+T) + f = \frac{h''-h'}{T}$$
$$a(2t+T') + f = \frac{h''-h}{T'}.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweiten, und dividirt dann durch $T'-T$, so kommt

$$a = \frac{\dfrac{h''-h}{T'} - \dfrac{h''-h'}{T}}{T'-T}.$$

Da f bekannt ist, so hat man dann

$$2t = \frac{h'' - h}{aT'} - \frac{f}{a} - T'$$

also auch t, und man kann H nach den drei ersten Gleichungen berechnen.

§. 485.

Nehmen wir z. B. aus §. 477. drei Beobachtungen der Sonne

wahre Höhe	Zeit
$h = 27^\circ\ 29'\ 54''46$,	$11^h\ 53'\ 47''$
$h' = 27.\ 30.\ 54{,}54$,	$11.\ 55.\ 38.$
$h'' = 27.\ 31.\ 52{,}21$,	$11.\ 58.\ 00.$

so haben wir

$$h'' - h = 1'\ 57''75 = 1'9625$$
$$h'' - h' = 0.\ 57{,}67 = 0{,}9612$$
$$T = 2.\ 22'' = 2{,}3667$$
$$T' = 4.\ 13'' = 4{,}2167$$
$$f = +\ 0''466 = +\ 0{,}007766$$
$$T' - T = 1'8500.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$a = 0{,}03205$$
$$t = +\ 5'463$$

und man erhält

$$H = 27^\circ\ 32'\ 49''04.$$

§. 486.

Die bisher angegebenen Methoden die geographische Breite eines Ortes zu finden, setzen immer die Declination des beobachteten Gestirns als bekannt voraus, und man kann immer mit Recht diese Annahme machen, da durch die Bemühungen der Astronomen die Declinationen so genau bestimmt sind, dass die noch etwa bei denselben vorkommenden Fehler jedenfalls viel geringer sind, als diejenigen Fehler, welche ein Beobachter bei der Messung der Höhen durch solche Instrumente, die man mit Leichtigkeit von einem Orte zum andern bringt, begehen kann. An festen Beobachtungsplätzen, auf Sternwarten, muss man freilich die Polhöhe unabhängig von der Declination des Sterns finden können, weil die an solchen

Oertern angestellten Beobachtungen dazu dienen sollen, die Lage der Himmelskörper genau zu bestimmen, und man sich daher in einem logischen Kreise befinden würde, wenn man die Polhöhe von den Declinationen abhängig machte. Da die zu diesem Zweck angestellten Beobachtungen grosse und genaue Instrumente erfordern, und die verschiedenen dabei zu beobachtenden Vorsichtsmaassregeln und Beobachtungsmethoden in die eigentliche practische Astronomie gehören, so erwähnen wir nur ganz kurz, dass die beste Art die Polhöhe zu finden, darin besteht, dass man die grösste und kleinste Höhe eines Circumpolarsterns (eines solchen, dessen ganzer Parallelkreis über dem Horizont liegt) beobachtet, und nachdem an denselben die gehörigen Verbesserungen wegen der Strahlenbrechung, Aberration, Nutation und Präcession angebracht sind, aus den beiden Höhen das arithmetische Mittel nimmt. Man muss freilich hierbei wohl beachten, dass der Stern bei seinem unteren Durchgange durch den Meridian dem Horizont nicht zu nahe kommt, weil sonst die Unsicherheit der Strahlenbrechung in diesen Gegenden verhindert, dass man die wegen derselben an der beobachteten Höhe anzubringende Correction nicht genau genug findet, und hierdurch nothwendig in der Bestimmung der Polhöhe einen Fehler begehen wird. Diese Methode wird daher an solchen Beobachtungsörtern die in den tropischen Ländern liegen ungenau, und im Aequator völlig unbrauchbar, da daselbst kein Stern zweimal über dem Horizont culminiren kann, allein da giebt die Sonne Mittel an die Hand die Polhöhe und zugleich die Schiefe der Ecliptik zu bestimmen. Man beobachtet nämlich zur Zeit der Solstitien die grösste und kleinste Mittagshöhe der Sonne, so giebt die halbe Summe beider Höhen, die Höhe des Aequators, also die Polhöhe gleich 90° weniger der Aequatorshöhe; die halbe Differenz derselben giebt die Schiefe der Ecliptik. Wir verlassen jetzt die geographische Breite und gehen zur Bestimmung der geographischen Länge über.

§. 487.

Die Bestimmung der geographischen Länge eines Ortes ist viel mehr Schwierigkeiten unterworfen, als die der Breite desselben, und man hat erst in neuern Zeiten die Mittel aufgefunden, diese Coordinate der Lage eines Ortes genauer zu bestimmen. Die einfachste, bequemste und zugleich wohl auch die genaueste Art der Längenbestimmung bilden die Chronometer, tragbare Uhren oder Seeuhren genannt (Gardetems, Timekeeper) dar, deren Gang so gleichförmig ist, dass man sich lange Zeit hindurch auf die Angabe der Uhr verlassen kann, ehe es etwa nöthig wird, der grössern Sicherheit wegen dieselbe wieder mit dem Himmel zu vergleichen. Man kann bemerken, dass man diese Uhren gewöhnlich so genau als möglich nach mittlerer Zeit gehen lässt, und nicht nach Sternzeit, wie meistentheils bei den feststehenden Pendeluhren geschieht. Die Längenbestimmung durch Uhren geschieht folgendermassen: man untersuche zuerst den Gang der Uhr genau eine Zeitlang hindurch an einem und demselben Orte, so dass man sich im Stande befindet, mit hinreichender Sicherheit den Stand der Uhr an diesem Orte bei irgend einer an einem andern Orte zu beobachtenden Himmelserscheinung z. B. der Culmination der Sonne, vorher zu bestimmen. Diese berechnete Zeit sey T. Beobachtet man nun, dass an einem andern Orte die Culmination der Sonne zur Zeit t nach der Uhr eintrifft, so ist der Meridianunterschied oder die Länge desselben in Zeit ausgedrückt $= T - t$, und die Länge wird östlich, wenn $T - t$ positiv, westlich, wenn $T - t$ negativ ist.

§. 488.

Um ein Beispiel dieser Art von Längenbestimmung zu haben, wollen wir uns folgender Angaben bedienen. In Madrid beobachtete v. Humboldt die Zeit des mittlern Mittags nach seinem Chronometer am 8. May 1799

$$= 11^h\ 58'\ 1''6$$

und derselbe blieb täglich 4″4 zurück, wenn er in

Ruhe war oder auf der See sich befand. Bis zur Ankunft in la Corogne am 21. May musste man für die tägliche Verzögerung 5″4 rechnen. Am 16. July kam v. Humboldt in Cumana an, und man erhält daher für die Uhrzeit des Mittags in Madrid für den

16. July		$11^h\ 58'\ 1''6$
13.(— 5″4)	= —	1. 10,2
56.(— 4,4)	= —	4. 6,4
		$11^h\ 52'\ 45''0.$

In Cumana selbst zeigte sich, dass der Chronometer täglich 7″ zurückblieb. Dies giebt bis zum 28. July 5 Uhr Nachmittags der Zeit in Madrid, wo v. Humboldt das erstemal in Cumana Sonnenhöhen nahm

$$T = 11^h\ 52'\ 45''0 - 12\tfrac{1}{5}.\ 7''$$
$$= 11.\ 51.\ 19{,}6.$$

Die Beobachtung selbst gab den mittlern Mittag nach der Uhr $t = 3^h\ 53'\ 14''3$

also die Meridiandifferenz zwischen Cumana und Madrid (indem man noch zu t 12 Stunden addirt)

$$T - t = 11^h\ 51'\ 19''6 - 15^h\ 53'\ 14''3$$
$$= -\ 4.\ 1.\ 54{,}7$$

also westliche Länge von Cumana, wenn Madrid als erster Meridian genommen wird

$$= 60^\circ\ 28'\ 40''5$$

indem man obige Zeit durch die Multiplication mit 15 auf Bogen reducirt.

§. 489.

Vermittelst der Sonnenbeobachtungen fand sich der Gang des Chronometer in Cumana:

Juli	28.	5^h Nachm.	$3^h\ 53'\ 14''3$
August	6.	7. Vorm.	3. 52. 20,5
—	7.	0.	3. 52. 4,7
—	24.	7.	3. 50. 16,0
—	25.	7.	3. 50. 8,0
—	26.	6.	3. 49. 53,0.

Um hieraus die Länge von Cumana so genau als möglich abzuleiten, wollen wir annehmen, am 28. July 0^h sey das Voreilen der Uhr

$$= 3^h\ 53'\ 15'' + a$$

und die tägliche Verzögerung $7'' + b$ gewesen, so erhält man das Voreilen der Uhr zu jeder Zeit t nach dem 28. July 0^h, durch die Gleichung

$$3^h\ 53'\ 15'' - 7''t + a - bt$$

und man erhält zur Bestimmung der beiden unbekannten Grössen a und b folgende sechs Gleichungen

$$+ 0''8 = a - b.\ 0''2;$$
$$+ 7,8 = a - b.\ 8,8;$$
$$- 0,3 = a - b.\ 10,0;$$
$$+ 8,6 = a - b.\ 26,8;$$
$$+ 7,6 = a - b.\ 27,8;$$
$$+ 0,9 = a - b.\ 28,9;$$

die man nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen muss. Man erhält dann auf die schon oft angewendete Art

$$+ 25''4 = 6a - b.\ 102,5$$
$$- 533,6 = - 102,5a + b.\ 2503,6$$

und hieraus ergiebt sich

$$a = + 1''95, \quad b = - 0''134.$$

Man darf also die tägliche Verzögerung in Cumana nur zu $7'' - 0''134 = 6''866$ annehmen, und man hat aus den Beobachtungen vom 28. July 5^h Nachmittags die Zeit des mittlern Mittags nach der Uhr $= 3^h\ 53'\ 15'' + 1''95 - 0{,}2\ (6''87)$
$= 3.\ 53.\ 15''58.$

Die Zeit in Madrid würde seyn (§. 488.)

$$11^h\ 52'\ 45''0 - 12\tfrac{1}{5}\ (6''866)$$
$$= 11.\ 51.\ 21''24.$$

folglich der Zeitunterschied zwischen Cumana und Madrid $= 4^h\ 1'\ 45''34.$

§. 490.

Die Mondfinsternisse sind schon sehr früh zur Bestimmung des Längenunterschiedes angewendet worden, da dieselben ohne weitere Rechnung die Meridiandifferenz zweier Orte geben, an welchen sie beobachtet sind. Da nämlich der Mond durch den Schatten der Erde, in welchen er zuweilen ganz oder zum Theil tritt, wenn er zur Zeit des vollen Lichts sich nahe an der Ecliptik befindet, wirklich sein Licht verliert, so wird der Anfang sowohl als das Ende der Finsterniss, so wie auch jede einzelne Phase

derselben, an allen Oertern der Erde in demselben physischen Augenblick beobachtet; da aber diese Oerter jenachdem sie unter verschiedenen Meridianen liegen, auch verschiedene Zeiten zählen, so giebt der Unterschied zwischen den verschiedenen beobachteten Zeiten, in welchen irgend eine bestimmte Phase der Finsterniss statt fand, auch den Unterschied der Länge beider Oerter in Zeit an. Um die Beobachtungen zu vervielfältigen, pflegt man auch noch die Eintritte und Austritte der hauptsächlichsten Mondsflecken zu bemerken, und aus allen Unterschieden dann das Mittel zu nehmen. So wurden z. B. bei der Mondfinsterniss am 22. October 1790 in Gotha und Paris von v. Zach und Mechain folgende Beobachtungen nach wahrer Zeit gemacht:

	Paris	Gotha
Anfang vermuthet	11^h 6′ 33″ ;	11^h 41′ 19″
— gewiss	7. 33 ;	41. 44.
Grimaldi 1r Rand	9. 28 ;	44. 3.
Aristarch	23. 36 ;	57. 37.
Copernicus 1r Rand	29. 58 ;	12. 3. 21.
— 2r Rand	32. 13 ;	6. 3.
Tycho	30. 33 ;	4. 5.
totale Verfinster.	12. 14. 25 ;	48. 4.
Anfang d. Austritts	13. 55. 23 ;	14. 28. 36.
Grimaldi ganz	58. 46 ;	32. 17.
Kepler halb	14. 8. 23 ;	42. 7.
Copernicus 1r Rand	16. 23 ;	49. 9.
— 2r Rand	18. 48 ;	52. 23.
Plato halb	20. 10,5 ;	53. 46.
Tycho 2r Rand	24. 3 ;	57. 34.
Mare serenit. 1r R.	32. 3 ;	15. 4. 47.
— — 2r R.	43. 18 ;	17. 1.

Hieraus ergeben sich folgende Zeitunterschiede

Eintritte	Austritte
34′ 46″	33′ 13″
34. 11.	33. 31.
34. 35.	33. 44.
34. 01.	32. 46.
33. 23.	33. 35.
33. 50.	33. 35,5.
33. 32.	33. 31

	Eintritte		Austritte
	33′ 39″		32′ 44″
Mittel	33. 59,6		33. 43.
	33. 22,5	Mittel	33. 22,5
	33. 41,0.		

Da die Uhr in Gotha mehr Zeit zeigte als in Paris, so ging die Sonne in Gotha früher durch den Meridian, folglich liegt dieser Ort östlich von Paris. Verwandelt man die Zeit in Bogen, so erhält man den Meridianunterschied zwischen Gotha und Paris

$$= 8^\circ\ 25'\ 15''$$

und da die Länge von Paris zu 20° angenommen wird, so ergiebt sich daraus die östliche Länge von Gotha $= 28^\circ\ 25'\ 15''$.

§. 491.

Man sieht aus diesem Beispiel wie höchst einfach die Rechnung ausfällt, wenn man von zwei Oertern correspondirende Beobachtungen der Finsterniss hat, und die Länge des einen schon bekannt ist. Findet dies aber nicht statt, so muss man die Finsterniss für einen bestimmten Ort aus den Sonnentafeln und Mondstafeln berechnen *), und diese berechneten Erscheinungen als beobachtet ansehen, worauf dann die fernere Bestimmung des Meridianunterschiedes auf die im vorigen Paragraph angegebene Weise ausgeführt wird. Wir wollen daher in den folgenden Paragraphen kurz zeigen, wie eine Mondfinsterniss sich berechnen lässt.

§. 492.

Es sey (fig. 12.) in S der Mittelpunkt der Sonne, T der der Erde, und die um dieselben mit den Halbmessern SA, TB beschriebenen Kreise stellen die Durchschnitte der Sonne und Erde vor; man verbinde die Mittelpunkte S und T durch die Linie ST,

*) Man hat Sonnentafeln von Delambre, v. Zach und Carlini; Mondstafeln von Bürg, Burkhardt und Damoiseau.

ziehe die Berührungslinie AB an beide Kreise, und verlängere diese beiden Linien bis sie sich hinter der Erde in C schneiden. Lässt man dann das Dreieck ASC sich um die Linie SC als Axe drehen, so entsteht ein Kegel, dessen hinter der Erde liegender Theil BCD den Raum angiebt, in welchen die Sonne keine Strahlen werfen kann; man nennt ihn daher den Schattenkegel oder blos Schatten der Erde, und jeder in denselben tretende Körper, der ausserhalb desselben von der Sonne erleuchtet wurde, wird sein Licht verlieren und dunkel erscheinen. Da nun der Erdschatten sich weit über die Entfernung des Mondes von der Erde hinaus erstreckt, so ist es möglich, dass dieser Trabant in den Schatten tritt und sein Licht verliert. Es sey NL ein kleiner Theil der Mondsbahn innerhalb des Schattens, so wird NL der Halbmesser des Schattens in der Gegend, wo die Mondsbahn den Schatten durchschneidet, vorstellen, und wir wollen aufsuchen, unter welchem Winkel der Halbmesser des Schattens, vom Mittelpunkte der Erde ausgesehen, erscheint, d. h. wie gross der scheinbare Halbmesser sey. Man hat (fig. 12.)

$$\frac{SA - TB}{ST} = \sin SCB$$

$$TC = \frac{TB}{\sin SCB};\ LC = TC - TL$$

$$\begin{aligned} NL &= LC.\ \text{tang}\ SCB \\ &= TC.\ \text{tang}\ SCB - TL.\ \text{tang}\ SCB \\ &= \frac{TB}{\cos SCB} - TL.\ \text{tang}\ SCB \end{aligned}$$

$$\text{tang}\ NTL = \frac{NL}{TL} = \frac{TB}{TL}.\ \frac{1}{\cos SCB} - \text{tang}\ SCB.$$

wo NTL der verlangte scheinbare Halbmesser des Kreises des Erdschattens in der Gegend ist, wo der Mond den Schattenkegel durchschneidet. Nun ist aber $\frac{SA}{ST}$ gleich dem Sinus des scheinbaren Halbmessers der Sonne aus der Erde gesehen, $\frac{TB}{ST}$ gleich dem Sinus des scheinbaren Halbmessers der Erde aus

der Sonne gesehen, oder gleich dem Sinus der Horizontalparallaxe der Sonne; setzt man daher

scheinbaren Halbmesser der ⊙ = R,

Horizontalparallaxe der ⊙ = P,

so hat man statt der obern Gleichung

$$\frac{SA}{ST} = \frac{TB}{ST} = \sin SCB, \text{ diese:}$$

$$\sin R - \sin P = \sin SCB$$

oder da die Grössen R, P sehr klein sind, so kann man statt der Sinus die Bogen selbst setzen, und es kommt:

$$R - P = SCB$$

Ferner ist $\frac{TB}{TL}$ oder $\frac{TB}{TN}$, da TL und TN nur sehr wenig von einander verschieden sind, gleich dem Sinus des scheinbaren Halbmessers der Erde aus dem Monde gesehen (weil in N oder L der Mond sich befinden soll) d. h. gleich dem Sinus der Horizontalparallaxe des Mondes. Setzt man also

die Horizontalparallaxe des Mondes = ϖ,

den scheinbaren Halbmesser des Schattens = ρ,

so giebt die vorhin gefundene Gleichung

$$\tang NTL = \frac{TB}{TL} \cdot \frac{1}{\cos SCB} - \tang SCB$$

diese andere:

$$\rho = \varpi + P - R$$

indem man statt der Tangenten die Winkel, und statt des Cosinus die Einheit setzt; folglich ist der Halbmesser des Schattens gleich der Summe der Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes, weniger dem Halbmesser der Sonne.

§. 493.

Dieses aus der Theorie abgeleitete Resultat stimmt aber nicht genau mit den Beobachtungen überein, indem diese zeigen, dass der Halbmesser des Schattens immer etwas grösser wird als die Rechnung denselben giebt. Dies rührt wahrscheinlich von der die Erde umgebenden Atmosphäre her, deren dichterer Theil das Licht sehr verschluckt. Mayer giebt da-

her die Regel an, man solle den vorher gefundenen Werth von ρ noch um den sechzigsten Theil der Summe der Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne vermehren, so dass also

$$\rho = \frac{61}{60}(P + \varpi) - R$$

wird, welches ziemlich mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Ausserdem haben wir angenommen, dass der Durchschnitt der Erde ein Kreis sey; dies setzt eine kugelförmige Gestalt der Erde voraus, die sie freilich nicht besitzt, allein die Abweichung ihrer Form von der Kugelgestalt ist so gering, dass die Ungenauigkeit der Beobachtungen der Mondfinsternisse diesen Fehler bei Weitem übertrifft. Es ist nämlich sehr schwierig den Anfang oder das Ende, oder überhaupt eine Phase der Mondfinsternisse zu beobachten, da der Erdschatten nicht scharf eintritt, sondern ganz verwaschen erscheint. Dies erklärt sich aus der Natur der Sache sehr leicht. Denn zieht man eine Berührungslinie EF (fig. 12.) die die kreisförmigen Durchschnitte der Sonne und des Mondes auf entgegengesetzten Seiten berührt, und verlängert sie willkührlich nach G, so entsteht durch die Umdrehung der Figur GFC um die Axe TC ein Raum, in welchen das Licht der Sonne nur zum Theil einfallen kann, so dass ein von FG nach FC zu gehender Körper sein Licht allmählig verliert. Hierin mag wohl auch grösstentheils mit der Grund davon liegen, dass der Halbmesser des Schattens grösser erscheint, indem nahe an der Gränze BC des Halbschattens GFC und des Vollschattens BCT, das Licht so schwach wird, dass es von der Dunkelkeit nicht zu unterscheiden ist, und man daher den Eintritt des Mondes in den Vollschatten früher zu sehen glaubt, als er eigentlich statt findet. Man kann bemerken, dass der Halbmesser des Halbschattens in der Gegend der Mondsbahn durch $\varpi + P + r$ ausgedrückt wird, so dass also der Unterschied beider Halbmesser dem scheinbaren Durchmesser der Sonne gleich ist.

§. 494.

Man berechne nun aus den Tafeln des Sonnenlaufs und des Mondlaufs die Oerter der Sonne und des Mondes für eine Zeit T, die der Opposition des Mondes (wo die Längen der Sonne und des Mondes um 180° verschieden sind) sehr nahe liegt, so wie auch die stündlichen Bewegungen beider Himmelskörper, ihre Parallaxen und Halbmesser. Wir setzen nun

Länge der Sonne + 180° = $\odot$,
Länge des Mondes = $☾$,
Breite des Mondes = β,
stündliche Bewegung der Sonne = $d\odot$,
stündl. Bew. d. Mondes in Länge = $d☾$,
— — — — — Breite = $d\beta$,
Horizontalparallaxe des Mondes = ϖ,
— — der Sonne = P,
scheinbarer Halbmesser des Mondes = r,
— — der Sonne = R.

Es sey (fig. 13.) EK die Ecliptik, L der Ort des Mondes zur Zeit T, und die Länge werde von E nach K zu gezählt, so ist EB die Länge des Mondes, LB die Breite desselben; C sey der dem Mittelpunkt der Sonne gegenüberliegende Punkt des Himmels, welcher derjenige ist, in welchem die Axe des Schattenkegels verlängert die Himmelskugel trifft, so hat man EC = der Länge der Sonne $+ 180° = \odot$. Zur Zeit $T + t$, wo t in Stunden ausgedrückt ist, sey der Ort der Spitze des Schattenkegels in C', der des Mondes in L', so hat man, da der Schatten mit derselben Geschwindigkeit als die Sonne forschreitet

$$EC' = \odot + t.\ d\odot$$
$$EB' = ☾ + t.\ d☾$$
$$B'L' = \beta + t.\ d\beta.$$

Die Grösse β ist positiv bei einer nördlichen, negativ bei einer südlichen Breite; $d\beta$ ist positiv, wenn sich der Mond dem Nordpol der Ecliptik nähert, negativ, wenn er sich von selbigem entfernt. Um C' sey ein Kreis mit dem Halbmesser $\rho = \frac{61}{60}(P + \varpi) - R$ beschrieben, so stellt derselbe die Grösse des Schattens in der Gegend der Mondsbahn vor; eben so be-

schreibe man um L' einen Kreis mit dem scheinbaren Halbmesser des Mondes $= r$. Der Abstand der Mittelpunkte des Mondes und des Schattens L', C' ergiebt sich leicht aus dem rechtwinklichten Dreieck $C'B'L'$; es wird nämlich

$$L'C'^2 = L'B'^2 + B'C'^2;$$

also wenn man den Abstand der Mittelpunkte allgemein durch A bezeichnet

$$AA = [\odot - ☾ - t\,(d☾ - d\odot)]^2 + (\beta + t.\ d\beta)^2.$$

Eigentlich sollte man das Dreieck $L'B'C'$ als ein sphärisches behandeln, und $L'C'$ durch die Formel

$$\cos L'C' = \cos L'B'.\ \cos B'C'$$

suchen, allein wegen der Kleinheit dieser Bogen darf man dasselbe als ein ebenes Dreieck betrachten, wie sich auch aus der sphärischen Formel ergiebt, wenn man statt der Cosinus ihre Entwickelungen setzt, und alle Potenzen, die das Quadrat übersteigen, vernachlässigt. Man setze nun

$$\odot - ☾ = \lambda, \qquad d☾ - d\odot = d\lambda.$$

wo $d\lambda$ immer positiv wird da die Bewegung des Mondes in der Länge bedeutend grösser als die der Sonne ist. Man nennt die durch $d\lambda$ bezeichnete Grösse auch die relative stündliche Bewegung des Mondes, da sie seine Geschwindigkeit ausdrückt, wenn man den Schatten als ruhend betrachtet. Durch diese Bezeichnungen wird also

$$AA = (\lambda - t.\ d\lambda)^2 + (\beta + t.\ d\beta)^2.$$

Die Verfinsterung ist am grössten, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte am kleinsten ist; dies giebt bekanntlich die Bedingung $\frac{dA}{dt} = 0$, oder

$$(\lambda - t.\ d\lambda)\ d\lambda = (\beta + t.\ d\beta)\ d\beta;$$

bezeichnen wir den hieraus sich ergebenden Werth von t durch t', so ist

$$t' = \frac{\lambda d\lambda - \beta d\beta}{d\lambda^2 + d\beta^2}.$$

Man setze, um diesen Ausdruck für die Rechnung geschickter zu machen

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \operatorname{tang} i; \qquad \frac{\beta}{\lambda} = \operatorname{tang} \mu$$

so erhält man

$$t' = \frac{\lambda}{d\lambda} \cdot \frac{1 - tang\, i.\ tang\, \mu}{1 + tang\, i^2}$$
$$= \frac{\lambda}{d\lambda} \cdot \frac{cos(i + \mu).\ cos\, i}{cos\, \mu}.$$

Entwickelt man die Formel
$$AA = (\lambda - t d\lambda)^2 + (\beta + t d\beta)^2$$
so erhält man
$$AA = \lambda\lambda + \beta\beta + t^2 (d\lambda^2 + d\beta^2)$$
$$- 2t (\lambda d\lambda - \beta d\beta)$$
oder wenn man durch $d\lambda^2 + d\beta^2$ dividirt
$$\frac{AA}{d\lambda^2 + d\beta^2} - \frac{\lambda\lambda + \beta\beta}{d\lambda^2 + d\beta^2} = t^2 - 2t. \frac{\lambda d\lambda - \beta d\beta}{d\lambda^2 + d\beta^2}$$
$$= t^2 - 2tt'.$$

Bezeichnet man den zur Zeit t' statt findenden kleinsten Abstand durch A', so wird ebenfalls
$$\frac{A'A'}{d\lambda^2 + d\beta^2} - \frac{\lambda\lambda + \beta\beta}{d\lambda^2 + d\beta^2} = t'^2 - 2t'^2$$
folglich, wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht
$$\frac{AA - A'A'}{d\lambda^2 + d\beta^2} = t^2 - 2tt' + t'^2$$
oder wenn man statt $d\lambda^2 + d\beta^2$, $\left(\frac{d\lambda}{cos\, i}\right)^2$ schreibt, und dann auf beiden Seiten die Wurzel auszieht, so kommt
$$t = t' \pm \frac{cos\, i}{d\lambda}. \sqrt{(A - A')(A + A')},$$
aus welcher Formel man für jeden gegebenen Abstand A sehr leicht die zugehörige Zeit t findet, sobald man t' und A' berechnet hat. Um den kleinsten Abstand A' auf die einfachste Art darzustellen, setze man in der Gleichung
$$A'A' - \lambda\lambda - \beta\beta = - t'^2 (d\lambda^2 + d\beta^2)$$
statt β, $d\beta$, t' ihre Werthe durch i, μ, λ, $d\lambda$ ausgedrückt, so wird
$$\lambda\lambda + \beta\beta = \frac{\lambda\lambda}{cos\, \mu^2}$$
$$t'^2 (d\lambda^2 + d\beta^2) = \lambda\lambda. \frac{cos(i + \mu)^2}{cos\, \mu^2}$$

und hierdurch $A' = \pm \frac{\lambda . \sin(i + \mu)}{\cos \mu}$.

Der Anfang der Finsterniss so wie das Ende derselben, finden dann statt, wenn der Abstand der Mittelpunkte der Summe der Halbmesser des Schattens und des Mondes gleich wird, also wenn

$$A = \varrho + r$$

folglich hat man

Zeit des Anfangs der Finsterniss

$$= t' - \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\rho + r + A')(\varrho + r - A')}.$$

Zeit des Endes der Finsterniss

$$= t' + \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\varrho + r + A')(\varrho + r - A')}.$$

Für den Anfang und das Ende der totalen Finsterniss, wo der Mond völlig in den Erdschatten eingetreten ist, ist der Abstand der beiden Mittelpunkte der Differenz der Halbmesser des Schattens und des Monds gleich, also $A = \rho - r$, und daher wird

Zeit des Anfangs der totalen Finsterniss

$$= t' - \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\rho - r + A')(\rho - r - A')}$$

Zeit des Endes der totalen Finsterniss

$$= t' + \frac{\cos i}{d\lambda} . \sqrt{(\rho - r + A')(\varrho - r - A')}.$$

Rücksichtlich der Winkel i und μ kann man bemerken, dass i entweder positiv oder negativ, aber immer kleiner als 90° genommen werden muss, jenachdem $d\delta$ positiv oder negativ wird. Für den Winkel μ gelten folgende Regeln:

$+ \delta$,	$+ \lambda$,	$\mu =$ 0° bis 90°
$+ \delta$,	$- \lambda$,	$\mu =$ 90° bis 180°
$- \delta$,	$- \lambda$,	$\mu =$ 180° bis 270°
$- \delta$,	$+ \lambda$,	$\mu =$ 270° bis 360°

wodurch alle Fälle erschöpft sind.

Tritt der Mond nicht ganz in den Schatten, so ist die Finsterniss partiell; die Zeit der grössten Verfinsterung wird durch $T + t'$ angegeben, und die Grösse des verfinsterten Theils durch $A' + \rho - r$. Gewöhnlich findet man die Verfinsterung in Zollen ausgedrückt, wobei der Durchmesser der ganzen

Mondsscheibe in zwölf Zoll getheilt wird, und man erhält leicht die Angabe der Zolle

$$= \frac{6\,(A' + r - \varrho)}{r}.$$

§. 495.

Wir wollen als Rechnungsbeispiel die Mondfinsterniss nehmen, welche am 13. September 1829 des Morgens einfällt. Nimmt man hierbei für Paris

T = 1829. September 12. $18^h\ 0'\ 0''$,

so finden sich folgende Elemente der Finsterniss

☉	=	350° 7′ 46″3		
☾	=	349. 44. 27,9		
β	= +	0. 48. 38,0	= +	2918″
d☉	= +	2. 26,2		
d☾	= +	37. 57,4		
d☾ − d☉ = $d\lambda$	=	35. 31,2	=	2131″2
$d\beta$	= −	3. 19,0	= −	199″
λ = ☉ − ☾	= +	23. 18,4	= +	1398″4
ϖ	=	61. 24″		
r	=	16. 44		
R'	=	15. 56		
P	=	0. 08″6.		

Vermittelst der Formeln

$$\varrho = \frac{61}{60}\,(P + \varpi) - R$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = tang\, i, \qquad \frac{\beta}{\lambda} = tang\, \mu,$$

ergiebt sich nun

$$\varrho = 46'\ 38''1$$
$$i = -\ 5^\circ\ 20.\ 4''$$
$$\mu = +\ 64.\ 23.\ 40.$$
$$i + \mu = +\ 59.\ 3.\ 36.$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen

$$t' = \frac{\lambda}{d\lambda}.\ \frac{cos(i + \mu).\ cos\, i}{cos\, \mu}$$

$$A' = \frac{\lambda.\ sin(i + \mu)}{cos\, \mu}$$

$$A' = 2775''3 = 46'\ 15''3$$
$$t' = +\ 2798'' = +\ 46.\ 38''$$

folglich die Zeit des kleinsten Abstandes der beiden Mittelpunkte

$= T + t' = 1829.$ Septbr. 12. $18^h\ 46'\ 38''$.

Die Grösse des verfinsterten Theils wird $= A' + r - \rho = 17'\ 7'' = 6{,}1$ Zoll. Für den Anfang und das Ende der Finsterniss hat man

$$A = 63'\ 22'' = 3802''$$

und die Formel $\pm \frac{\cos i}{d\lambda} \sqrt{(A - A')\ (A + A')}$ giebt $\pm 4370'' = \pm 72'\ 50''$, so dass man folgende Zeiten erhält

Anfang der Finsterniss

$$= T + t' - 72'\ 50'' = 17^h\ 33'\ 38$$

Ende der Finsterniss

$$= T + t' + 72'\ 50'' = 19^h\ 59'\ 28$$

Die Finsterniss findet also in Paris am 13. Sept. des Morgens von halb sechs Uhr bis um acht Uhr statt; sie ist aber grösstentheils nicht sichtbar, da der Mond bald nach dem Anfange der Verfinsterung untergeht.

§. 496.

Anstatt den Eintritt und Austritt der Mondsflecken zu beobachten, deren Zeitpunkte sich nur durch sehr langweilige Rechnungen bestimmen lassen würden, wenn man den Meridianunterschied zweier Oerter vermittelst derselben finden wollte, und keine correspondirenden Beobachtungen wie §. 490. gemacht worden wären, pflegt man die Sehne PQ des verfinsterten Theils zu messen, und die beobachteten Zeitpunkte mit denjenigen zu vergleichen, die man für dieselbe Grösse der Sehne an einem bestimmten Orte von bekannter Länge durch Rechnung gefunden hat. Man setze $PQ = 2s$, so wird

$$\sin QL'N = \frac{s}{LQ'} = \frac{s}{r}$$

$$\sin QC'N = \frac{s}{QC'} = \frac{s}{\rho}$$

$$L'C'^2 = L'Q^2 + C'Q^2 \pm 2 . L'Q . C'Q . \cos L'QC$$

oder auch, wenn man die frühern Bezeichnungen einführt:

$$AA = rr + \rho\rho \pm 2r\rho \cos L'QC'.$$

Nun ist aber

$$\cos L'QC = \cos(QL'N - QC'N)$$
$$= \cos QL'N. \cos QC'N + \sin QL'N. \sin QC'N$$
$$= \frac{\sqrt{rr - ss}.\ \sqrt{\rho\rho - ss} + ss}{r.\ \rho}$$

folglich wenn man diesen Werth in vorige Gleichung einführt

$$AA = (\rho\rho - ss) + (rr - ss) \pm 2\sqrt{(\rho\rho - ss)(rr - ss)}$$

und wenn man die Wurzel auszieht

$$A = \sqrt{\rho\rho - ss} \pm \sqrt{rr - ss}.$$

Man muss das obere Zeichen nehmen, so lange beim Eintritt die Sehnen zunehmen und beim Austritt abnehmen; das untere Zeichen im entgegengesetzten Falle.

Hat man durch diese Formel den Abstand der Mittelpunkte A für diese Länge der Sehne gefunden, so giebt die Gleichung (§. 494.)

$$t = t' \pm \frac{\cos i}{d\lambda}.\ \sqrt{(A - A')(A + A')}$$

die zugehörige Zeit t. Das obere Zeichen gilt für den Austritt, das untere für den Eintritt des Mondes in den Schatten.

Es ist jedoch zu bemerken, dass der beobachtete Werth von s nicht direct angewendet werden darf, sondern dass man ihn erst auf denjenigen Werth reduciren muss, welchen die halbe Sehne dann haben würde, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befände. Es sey zu diesem Ende T der Mittelpunkt der Erde (fig. 14.), in L der Mond, in O der Beobachter, so verhalten sich die Längen der Sehnen von T und von O aus gesehen, umgekehrt wie die Entfernungen LT, LO. Bezeichnet man daher die Länge der Sehne, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen, durch $2s$, so hat man

$$2s' : 2s = \frac{1}{LT} : \frac{1}{LO}$$

$$s' = s.\frac{LO}{LT}.$$

Nun sey die Höhe des Mondes über dem Horizont $= h$, so wird $LOT = 90° + h$, also

$$LT^2 = LO^2 + OT^2 + 2 LO. OT. \sin h$$

oder wenn man durch LT dividirt, und bemerkt, dass $\frac{OT}{LT}$ die Horizontalparallaxe des Mondes $= \varpi$ ist,

$$1 = \frac{LO^2}{LT^2} + \varpi^2 + 2\varpi \frac{LO}{LT} \sin h$$

und hieraus folgt

$$\frac{LO}{LT} = - \varpi \sin h + \sqrt{(1 - \varpi^2 \cos h^2)}$$

oder wenn man die Potenzen von ϖ vernachlässigt

$$\frac{LO}{LT} = 1 - \varpi \sin h$$

$$s' = s(1 - \varpi \sin h).$$

Da ϖ immer kleiner als $\frac{1}{50}$ ist, so sieht man, dass die corrigirte Sehne immer nur äusserst wenig von der beobachteten verschieden seyn wird.

Sobald der Schatten dem Mittelpunkte des Mondes sehr nahe ist, ändert sich die Länge der Sehne sehr langsam, und dann ist es vortheilhafter den erleuchteten Theil des Mondes zu messen. Bezeichnet man diesen durch e, so erhält man

$$e = A + r - \rho;$$

$$A = \rho + e - r \ldots$$

und nach der obigen Formel

$$t = t' \pm \frac{\cos i}{d\lambda}. \sqrt{(A - A')(A + A')}$$

lässt sich dann die diesem Werthe von A zugehörige Zeit t leicht berechnen.

§. 497.

Bald nach der Erfindung der Fernröhre zeigte sich in den Verfinsternngen der Jupiterstrabanten ein neues Mittel die geographische Länge leicht auf ähnliche Weise wie durch Mondfinsternisse zu bestimmen. Galilaei, Marius und Harriot entdeckten nämlich gegen das Ende des Jahres 1609 und den

Anfang des Jahres 1610, dass der Planet Jupiter vier Trabanten mit sich um die Sonne führe, die sehr häufigen Verfinsterungen unterworfen waren, indem sie in den hinter dem Planeten befindlichen Schatten eintreten. Wegen der in dieser Rücksicht vortheilhaftesten Lage der Bahnen der Trabanten, deren Ebenen mit der Ebene der Bahn des Haupttrabanten fast zusammenfallen, und wegen der kurzen Umlaufszeit derselben treten diese Jupiterstrabantenverfinsterungen viel öfter ein als die Mondfinsternisse, deren in jedem Jahre nie mehr als zwei, und zuweilen gar keine sichtbar sind. Man kann annehmen, dass aller zwei Tage beim ersten Trabanten (der dem Jupiter am nächsten liegt) entweder ein Eintritt (Immersion) oder ein Austritt desselben (Ennersion) aus dem Schatten statt findet. Schon sehr früh hatte man daher versucht Tafeln für die Bewegung derselben herzustellen, um die gemachten Beobachtungen der Finsternisse zur Auffindung der Länge benutzen zu können, allein erst durch die Bemühungen von Delambre, der eine sehr grosse Menge Beobachtungen dieser Trabanten anwendete, und die von Laplace entwickelte Theorie der Ungleichheiten der Bewegung benutzte, sind wir in den Stand gesetzt, diese Erscheinungen mit Vortheil bei der Bestimmung der Länge anwenden zu können, indem höchst selten die nach diesen Tafeln berechneten Verfinsterungen von den besten Beobachtungen um funfzehn Secunden abweichen, und diese Genauigkeit hat die frühern Tafeln von Wargentin und Bailly ausser Gebrauch gebracht.

Es ist nur zu bedauern, dass diese Methode der Längenbestimmung, obgleich sie für Landreisen sehr vortheilhaft ist, sich auf der See selbst gar nicht anwenden lässt, indem durch die immerwährende Bewegung des Schiffes es dem Beobachter unmöglich wird, den Trabanten im Gesichtsfelde des Fernrohrs zu erhalten, um so mehr, da zu Beobachtungen dieser Art stark vergrössernde Fernröhre, die daher zugleich eine verhältnissmässig grössere Länge besitzen, angewendet werden müssen. Man hat zwar zur Bequemlichkeit der Beobachter freihängende Sitze (chaises marines) vorgeschlagen (man hat deren von

Besson 1650, Irwin 1760, Fyot 1771), allein die Erfahrung hat gezeigt, dass ihre Anwendung von keinen Nutzen ist. Maskelyne, der auf seiner Reise nach Barbadoes einen Irwin'schen Sitz hatte, meint sogar, dass ihm die Beobachtungen ohne eine solche Vorrichtung besser gelungen wären, als mit Anwendung derselben.

Stellt man die Beobachtungen der Finsternisse auf dem festen Lande an, so ist man ebenfalls von einem zufälligen Umstande, nämlich der Stärke des Fernrohrs abhängig, indem zwei Beobachter mit ungleichen Fernröhren versehen, die Zeit des Eintritts oder des Austritts immer verschieden angeben werden, da derjenige, welcher mit dem stärkern Fernrohr beobachtet, den Trabanten später verschwinden und auch eher wieder hervortreten sieht.

Hell in Wien, welcher diese Methode die Länge zu bestimmen allen übrigen vorzog, gab folgende Regeln an, die man bei der Beobachtung der Finsternisse befolgen sollte. 1) Beobachte man blos die Verfinsterungen des ersten und zweiten Trabanten, da diese die schnellste Bewegung haben, also die Zeit des Verschwindens und des Hervortretens aus dem Schatten in engere Gränzen eingeschlossen ist. 2) Gebrauche man immer dasselbe Fernrohr. 3) Man nehme zur Längenbestimmung so viel Eintritte als Austritte. 4) Wähle man die Beobachtungen nicht zu nahe bei der Opposition des Jupiters, oder zur Zeit der Dämmerung, oder wenn Jupiter sich nahe am Horizont befindet. 5) Wende man eine grosse Menge correspondirender Beobachtungen an. Die sechste Regel, dass man die Zeit genau bestimmen müsse, versteht sich von selbst.

§. 498.

Um die Meridianunterschiede von Oertern zu bestimmen die keine zu grosse Entfernung von einander haben, wendet man Pulversignale an. Man zündet nämlich auf einem zwischen beiden Oertern liegenden erhabenen Standpunkt in gewissen vorher bestimmten Zeiträumen eine hinreichende Quantität Pulver an, wovon der augenblickliche Blitz an den beiden Oer-

tern gesehen werden kann, deren Längenunterschied bestimmt werden soll, während die an diesen Oertern befindlichen Beobachter die Erscheinung des Blitzes an einer genau nach Sternzeit gehenden Uhr bemerken. Der Unterschied der Beobachtungszeiten giebt die Meridiandifferenz an. Dieses Mittel den Unterschied der Länge zu bestimmen, wird gewöhnlich bei Messungen von Längengraden angewendet. So wurden z. B. zwischen Saint Preuil und Marennes folgende Zeitunterschiede im October 1823 vermittelst der Signale beobachtet, (Connoissance de tems 1829), wo die neben den Zeitunterschieden stehenden Zahlen die Unterschiede vom Mittel sind:

3′ 48″52	+ 0″49	3′ 49″22	— 0″21
48,75	+ 0,24	49,36	— 0,35
48,97	+ 0,04	49,03	— 0,02
49,10	— 0,09	49,32	— 0,31
48,78	+ 0,23	49,14	— 0,13
48,76	+ 0,25	49,37	— 0,36
48,75	+ 0,26	49,07	— 0,06
49,10	— 0,09	48,77	+ 0,24
48,87	+ 0,14	49,12	— 0,11
48,71	+ 0,30	49,12	— 0,11
48,83	+ 0,18	49,40	— 0,39
48,60	+ 0,41	49,13	— 0,12
49,23	— 0,22	49,47	— 0,46
48,95	+ 0,06	49,47	— 0,46
49,18	— 0,17	48,77	+ 0,24
48,98	+ 0,03	48,60	+ 0,41
49,18	— 0,17	49,13	— 0,12
48,97	+ 0,04	49,07	— 0,06
48,96	+ 0,05	48,67	+ 0,34
48,81	— 0,20	48,69	+ 0,32
49,05	— 0,04	49,43	— 0,42
49,40	— 0,39	48,42	+ 0,59
49,11	— 0,10	49,22	— 0,21

Mittel 3′ 49″012.

Die Summe der Quadrate der Fehler giebt 3″332, folglich wenn man diese Summe durch 46 — 1 dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht, so erhält man den mittlern Fehler einer Beobachtung

$= 0''272$, und den mittlern bei dem Endresultat zu befürchtenden Fehler $= 0''0401$.

§. 499.

Die bisher betrachteten Mittel die geographische Länge zu bestimmen, nämlich die Mondfinsternisse, Jupiterstrabantenverfinsterungen und Signale durch Pulverentzündungen, sind von der Beschaffenheit, dass die Erscheinungen, die sich bei ihnen darbieten, und deren Zeiten zur Auffindung der Länge dienen, für alle Beobachtungsörter in demselben Augenblick gesehen werden, und daher ohne weitere Reductionen gebraucht werden können. Anders verhält es sich aber bei Beobachtungen von Sonnenfinsternissen, Bedeckungen der Sterne vom Monde, und Vorübergängen der untern Planeten, Mercur und Venus vor der Sonnenscheibe. Hierbei würde man einen grossen Fehler begehen, wenn man aus dem Unterschiede der Zeiten, zu welchen eine und dieselbe Erscheinung sich an verschiedenen Oertern der Erde zeigt, direct auf den Unterschied der geographischen Länge der Beobachtungsörter schliessen wollte, sondern es ist zu ihrer Vergleichung nothwendig, alle diese Beobachtungen auf einen bestimmten Ort der Erde zu reduciren, so dass man die Zeiten der verschiedenen Erscheinungen so erhält, als ob alle Beobachter sich in diesem Punkte beisammen befunden hätten, und jeder nach seiner eigenen Zeit, die dem Beobachtungsort auf der Oberfläche der Erde entspricht, die Erscheinungen bemerkt hätte. Zu diesem gemeinschaftlichen Punkt erwählt man immer den Mittelpunkt der Erde, für welchen Punkt alle aus den Tafeln für die Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten berechneten Oerter gelten. Man nennt diese die wahren Oerter der Himmelskörper, zum Unterschiede von denen auf der Erdoberfläche beobachteten, welche die scheinbaren heissen; die Differenzen zwischen den wahren und scheinbaren Oertern sind die Parallaxen. Wir wollen zuerst zeigen, wie sich die scheinbaren oder beobachteten Oerter des Himmelskörpers auf wahre reduciren lassen.

§. 500.

Man denke sich durch den Mittelpunkt der Erde, den wir als ruhend betrachten, drei sich rechtwinklicht durchschneidende Axen gelegt, von denen die erste die Axe der x nach den Nullpunkt des Widders oder den Frühlingsaequinoctialpunkt, die zweite der y nach den Nullpunkt des Krebses oder den Sommersolstitialpunkt, und die dritte nach dem Nordpol der Ecliptik (da die ersten in der Ebene der Ecliptik liegen) gezogen ist. Wir zählen zugleich die positiven Coordinaten irgend eines Punktes nach den angegebenen Richtungen, die negativen in den entgegensetzten. Nun seyen die drei Coordinaten eines Himmelskörpers zu irgend einer Zeit T, X, Y, Z,

die wahre Länge des Himmelskörpers $= L$,
— — Breite — — $= B$,
der Abstand desselben vom Mittelpunkte der Erde

$$= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R,$$

so hat man leicht die drei Gleichungen

$$X = R.\cos L.\cos B,$$
$$Y = R.\sin L.\cos B,$$
$$Z = R.\sin B.$$

Eben so seyen zu derselben Zeit die drei Coordinaten des Beobachtungsortes auf der Oberfläche der Erde x, y, z; zieht man dann vom Mittelpunkte der Erde durch den Beobachtungsort eine Linie bis an die Himmelskugel, so wird diese in einem Punkte getroffen werden, dessen Lage durch seine Länge und Breite ebenfalls bestimmt wird. Die Länge sey $= l$, die Breite $= b$, und der Abstand des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde

$$= \sqrt{xx + yy + zz} = r$$

und man erhält wie vorhin

$$x = r.\cos l.\cos b,$$
$$y = r.\sin l.\cos b,$$
$$z = r.\sin b.$$

Denkt man sich ferner durch den Beobachtungsort drei Axen gelegt, welche den früher erwähnten parallel laufen, und nennt die drei Coordinaten des Himmelskörpers gegen diesen Anfangspunkt X', Y', Z'

die scheinbare Länge des Himmelskörpers $= L'$,

die scheinbare Breite des Himmelskörpers $= B'$, und seinen Abstand vom Beobachtungsorte

$$\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = R'$$

so kommt

$$X' = R'. \cos L'. \cos B'$$
$$Y' = R'. \sin L'. \cos B'$$
$$Z' = R'. \sin B'.$$

Man sieht aber leicht, dass man zwischen diesen neuen Coordinaten folgende drei Gleichungen hat:

$$X = X' + x$$
$$Y = Y' + y$$
$$Z = Z' + z$$

und wenn man statt derselben ihre Werthe setzt:

1) $R. \cos L. \cos B = R'. \cos L'. \cos B' + r. \cos l. \cos b.$
2) $R. \sin L. \cos B = R'. \sin L'. \cos B' + r. \sin l. \cos b.$
3) $R. \sin B = R'. \sin B'. + r. \sin b.$

Man quadrire die drei Gleichungen und addire sie dann, so wird

$$RR = R'^2 + rr + 2rR' \cos \mu$$
$$\cos \mu = \cos B'. \cos b. \cos(L' - l) + \sin B'. \sin b.$$

Nimmt man nun

$$R' = R\ (1 - \rho)$$
$$r = R \sin \varpi,$$

so reducirt sich diese Gleichung auf

$$0 = \rho\rho - 2\rho + \sin \varpi^2 + 2 \cos \mu. \sin \varpi\ (1 - \rho)$$

und hieraus ergiebt sich

$$\rho = 1 + \cos \mu. \sin \varpi - \sqrt{1 - \sin \mu^2 \sin \varpi^2}.$$

Der Winkel ϖ ist die Horizontalparallaxe des Himmelskörpers, und da diese immer klein ist, so darf man alle Potenzen von $\sin \varpi$, die die zweite übertreffen, vernachlässigen, und es wird daher

4) $\rho = \cos \mu \sin \varpi + \frac{1}{2} \sin \mu^2 \sin \varpi^2.$

Für alle Himmelskörper, den Mond ausgenommen, kann man auch noch das Quadrat von $\sin \varpi$ weglassen, ohne einen merklichen Fehler zu begehen.

Dividirt man die Gleichung (1) durch die Gleichung (2), so erhält man

$$\tang L = \frac{R'. \sin L' \cos B' + r. \sin l. \cos b}{R'. \cos L' \cos B' + r. \cos l. \cos b}$$

oder wenn man für R', r ihre Werthe setzt

$$\tang L = \frac{(1-\rho) \sin L' \cos B' + \sin \varpi. \sin l. \cos b}{(1-\rho) \cos L' \cos B' + \sin \varpi. \cos l. \cos b}$$

$$tg L - tg L' = \frac{\sin \varpi. \cos b (\sin l - \cos l. \tang L')}{(1-\rho) \cos L' \cos B' + \sin \varpi. \cos l. \cos b}$$

und hieraus, da

$$\tang L - \tang L' = \frac{\sin(L-L')}{\cos L \cos L'}$$

$$\sin(L-L') = \frac{\cos L \sin \varpi. \cos b. \sin(l-L')}{(1-\rho) \cos L' \cos B' + \sin \varpi. \cos l. \cos b}.$$

Setzt man noch

$$5) \quad \frac{\rho. \cos L' \cos B' - \sin \varpi. \cos l. \cos b}{\cos L' \cos B'} = q,$$

so kommt mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von q

$$6) \quad \sin(L-L') = \frac{\cos L. \sin \varpi. \cos b \sin(l-L')(1+q)}{\cos L' \cos B'}.$$

Dass hierbei die unbekannte wahre Länge L in der Formel bei $\cos L$ vorkommt, thut nichts zur Sache, indem man meistentheils ohne Fehler statt L, L' nehmen kann, und sollte dies etwa bei dem Monde eine kleine Unrichtigkeit hervorbringen, so wiederholt man die Rechnung, indem man den zuerst gefundenen Werth von $L-L'$ zu L' addirt, und so L erhält. Die Gleichung (3) giebt, wenn man mit R dividirt

$$\sin B - \sin B' = \sin \varpi \sin b - \rho. \sin B'$$

oder auch

$$7) \quad \sin\left(\frac{B-B'}{2}\right) = \frac{\sin \varpi. \sin b - \rho. \sin B'}{2 \cos \frac{1}{2}(B+B')}.$$

Auch hier gilt rücksichtlich des unbekannten Werthes von B dieselbe Bemerkung als vorhin.

Wollte man die wahren Oerter auf die scheinbaren reduciren, so braucht man nur L und B mit L' und B' zu vertauschen, und $\sin \varpi$ negativ zu nehmen.

Man sieht übrigens leicht ein, dass dieselben Formeln sich auch zur Berechnung der Parallaxe in grader Aufsteigung und in Declination gebrauchen lassen, wenn man nur statt der Länge und Breite die grade Aufsteigung und Declination nimmt.

§. 501.

Wir haben also zur Berechnung der Parallaxen die Formeln:

Wahrer Ort aus dem scheinbaren.

$$\cos\mu = \cos B' \cos b . \cos(L'-l) + \sin B' \sin b$$
$$\rho = \cos\mu . \sin\varpi + \tfrac{1}{2}\sin\mu^2 . \sin\varpi^2$$
$$q = \frac{\rho . \cos L' \cos B' - \sin\varpi . \cos l . \cos b}{\cos L' \cos B'}$$
$$\sin(L-L') = \frac{\cos L . \sin\varpi . \cos b \sin(l-L')(1+q)}{\cos L.' \cos B'}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(B-B') = \frac{\sin\varpi . \sin b - \rho . \sin B'}{2\cos\tfrac{1}{2}(B+B')}.$$

Scheinbarer Ort aus dem wahren.

$$\cos\mu = \cos B . \cos b . \cos(L-l) + \sin B . \sin b$$
$$\rho' = \cos\mu . \sin\varpi - \tfrac{1}{2}\sin\mu^2 . \sin\varpi^2$$
$$q' = \frac{\rho' \cos L . \cos B - \sin\varpi \cos l . \cos b}{\cos L . \cos B}$$
$$\sin(L-L') = \frac{\cos L' . \sin\varpi . \cos b \sin(l-L)(1-q')}{\cos L \cos B}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(B-B') = \frac{\sin\varpi \sin b - \rho' \sin B}{2\cos\tfrac{1}{2}(B+B')}.$$

§. 502.

Wir müssen nun sehen, wie sich die Länge l und Breite b des Beobachtungsortes auf die Himmelskugel projicirt finden lässt. Es ist leicht einzusehen, dass die Projection sich im Meridian des Beobachtungsortes befindet und das wahre Zenith ist, folglich ist ihre grade Aufsteigung der in Bogen verwandelten Sternzeit gleich, welche zur Zeit T am Beobachtungsorte gezählt wird. Die Declination des Punktes wird durch die geocentrische Breite des Beobachtungsortes ausgedrückt werden. Bezeichnet man daher die in Bogen ausgedrückte Sternzeit durch α, die geocentrische Breite durch δ, so hat man, wenn ε die Schiefe der Ecliptik bedeutet, und man die Hülfswinkel u, v, so annimmt, dass

$$tang\, u = \frac{tang\, \delta}{sin\, \alpha},$$
$$cos\, v = cos\, \alpha .\, cos\, \delta$$
wird, folgende Gleichungen zur Bestimmung von b und l:
$$sin\, b = sin\, v.\ sin(u - \varepsilon)$$
$$tang\, l = tang\, v.\ cos(u - \varepsilon).$$
Diese Formeln lassen sich leicht folgendermassen ableiten: Es sey AQ (fig. 14.) die Ecliptik, AC der Aequator, S der Punkt auf der Himmelskugel, so ist AD seine grade Aufsteigung, SD die Declination, AB die Länge, SB die Breite desselben. Zieht man dann noch den Bogen eines grössten Kreises AS, so ist $u = \angle SAD$, $v = AS$, und die Gleichungen für b und l ergeben sich aus dem Dreieck ASB, da CAQ der Schiefe der Ecliptik gleich ist.

§. 503.

Die geocentrische Breite eines Ortes ist bekanntlich von der geographischen verschieden, und aus den Untersuchungen die hierüber §. 245. geführt sind ergiebt sich, dass wenn

die geocentrische Breite $= \delta$,
die geographische — $= p$,
die Abplattung der Erde $= \alpha$

gesetzt wird, dann mit Vernachlässigung der höhern Potenzen der Abplattung
$$\delta = p - \alpha .\ sin\, 2p$$
seyn muss. Nimmt man $\alpha = \frac{1}{297,4}$, so kommt, wenn man die Grösse welche von p abgezogen werden muss in Secunden haben will
$$\delta = p - 694''.\ sin\, 2p.$$

§. 504.

Die in den vorigen Rechnungen gebrauchte Horizontalparallaxe ϖ muss erst durch eine Reduction aus der abgeleitet werden, welche die Tafeln geben. Da nämlich die Erde keine Kugel ist, so hat r nicht für alle Beobachtungsörter einerlei Werth, und die

Tafeln müssen die Horizontalparallaxe für einen bestimmten Werth von r geben, für welchen der Halbmesser des Aequators angenommen ist. Bezeichnen wir diesen durch a, die Aequatorealhorizontalparallaxe durch Π, so hat man

$$a = R.\ sin\,\Pi, \quad r = R.\ sin\,\varpi$$

und aus der bekannten Gestalt der Erde, wenn p die Polhöhe bedeutet:

$$r = a\,(1 - \alpha\ sin\,p^2).$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen a, r, R, so bleibt

$$sin\,\varpi = sin\,\Pi\ (1 - \alpha\ sin\,p^2),$$

wo man statt der Sinus von ϖ und Π ohne Fehler die Winkel selbst nehmen kann. Diese Correction ist aber blos bei dem Monde merklich, wo sie höchstens 12″ betragen kann; bei allen übrigen Himmelskörpern kann sie vernachlässigt werden.

§. 505.

Der Halbmesser des Himmelskörpers, den man aus den Tafeln entnimmt, bedarf ebenfalls einer Correction, da derselbe die scheinbare Grösse angiebt, die der Körper aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen haben würde. Nennt man daher den aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen Halbmesser Δ, den vom Beobachtungsort Δ', den wahren Halbmesser D, so ist

$$D = R.\ sin\,\Delta, \quad D = R'.\ sin\,\Delta',$$

wo R und R' die Abstände des Himmelskörpers vom Mittelpunkte der Erde und vom Beobachtungsorte bedeuten. Es wird hieraus

$$sin\,\Delta' = \frac{R}{R'}.\ sin\,\Delta.$$

$$= \frac{sin\,\Delta}{1-\rho}.\quad (\S.\ 500.)$$

$$= sin\,\Delta\ (1+\rho)$$

folglich auch

$$sin\,\Delta' - sin\,\Delta = 2\,sin\,\frac{\Delta'-\Delta}{2}\ cos\,\frac{\Delta'+\Delta}{2} = \rho.\ sin\,\Delta$$

und wegen der Kleinheit des Unterschiedes $\Delta' - \Delta$ und der Grösse Δ selbst kann man

$$\Delta' - \Delta = \rho . \Delta$$

setzen. Nur bei dem Monde wird es nothwendig diese Verbesserung anzuwenden.

§. 506.

Wir wollen diese Formeln zur Berechnung der Sonnenfinsterniss vom 28. October 1799 gebrauchen, deren Ende v. Humboldt in Cumana beobachtete, und daraus die Länge dieses Ortes ableiten. Das Ende fand statt um

$$T = 1799.\ \text{October}\ 28.\ 2^h\ 14'\ 23''4$$

nach mittlerer Zeit in Cumana. An diesem Tage war die Sternzeit im mittlern Mittage, also am 28. October, $0^h\ 0'\ 0''$

$$= 14^h\ 27'\ 8''8.$$

Addirt man hierzu die mittlere Zeit der Beobachtung nach Mittag und die diesem Zeitraum zugehörige Voreilung der Fixsterne, so kommt

		$14^h\ 27'\ 8''8$
	+	2. 14. 23,4
Voreilung	+	22,1
		$16^h\ 41'\ 54''3$ = der graden Aufsteigung des Zeniths in Zeit.

Reducirt man dies auf Bogen, so wird

$$\alpha = 250°\ 28'\ 34''5.$$

Die Polhöhe von Cumana ist

$$p = 10°\ 27'\ 55''\ \text{nördlich}$$

also nach §. 503. die geocentrische Breite des Beobachtungsortes oder die Declination des Zeniths

$$\delta = p - 694''\ \sin 2p$$
$$= 10°\ 23'\ 47''.$$

Die Schiefe der Ecliptik ist

$$\varepsilon = 23°\ 28'\ 4''.$$

Man erhält nun vermittelst der Formeln (§. 502.)

$$\tang \delta = 9.2635631$$
$$\sin \alpha = 9.9742828\ n$$
$$\tang u = 9.2892803\ n$$
$$u = -11°\ 0'\ 56''$$

$$\begin{aligned}
\cos\delta &= 9.9928109\\
\cos\alpha &= 9.5240032\,n\\
\hline
\cos v &= 9.5168141\,n\\
v &= 250^\circ\ 48'\ 34''\\
\sin v &= 9.9751700\,n\\
\sin(u-\varepsilon) &= 9.7529442\,n\\
\hline
\sin b &= 9.7281142\\
b &= +\ 32^\circ\ 19'\ 26''\\
\tang v &= 0.4583558\\
\cos(u-\varepsilon) &= 9.9160805\\
\hline
\tang l &= 0.3744363\\
l &= 247^\circ\ 6'\ 30''
\end{aligned}$$

wodurch die Länge und Breite des Zeniths gefunden sind.

Nehmen wir provisorisch die Länge von Cumana
$= 4^h\ 26'\ 4''$ westlich von Paris
an, so erhält man die Zeit der Beobachtung des Endes der Finsterniss nach Pariser Zeit
$= 6^h\ 40'\ 27''4$
und für diesen Zeitpunkt erhält man aus den für den Pariser Meridian berechneten Tafeln

wahre Länge des Mondes	=	216° 4′ 32″27	= L
— Breite — —	= +	0. 3. 39,15	= B
Aequatorealparallaxe	=	1. 1. 23,26	= Π
Halbmesser des Mondes	=	16. 45,24	= Δ
wahre Länge der Sonne	=	215. 22. 4,91	= L°
— Breite — —	= +	0,24	= B°
Horizontalparallaxe	=	8,76	= Π°
Halbmesser der Sonne	=	16. 7,66	= Δ°

Wir haben die für die Sonne geltenden Elemente mit einer Null bezeichnet, um sie von denen des Mondes zu unterscheiden. Man hat nun nach den zweiten Formeln §. 501., und den Formeln für die Correctionen der Parallaxe und des Halbmessers §. 504 und 505.

$$\sin\varpi = \sin\Pi\ (1 - \alpha\ \sin p^2)$$

oder auch $\varpi = \Pi\ (1 - \alpha\ \sin p^2)$. Nun ist Π in Secunden ausgedrückt $= 3683''26$

$$\begin{aligned}
\log\Pi &= 3.56623\\
\log\alpha &= 7.52666
\end{aligned}$$

$$sin\, p^2 = \underline{8.51842}$$
$$\underline{9.61141}$$
$$0''41 = \Pi\alpha\, sin\, p^2$$

also $\varpi = 3683''26 - 0''41 = 3682''85 = 1^\circ\, 1'\, 22''85$

$$cos\,\mu = cos\,B.\ cos\,b\ cos(L - l) + sin\,B.\ sin\,b.$$

$cos\,B = 0.00000$ $\quad$ $sin\,B = 7.02631$

$cos\,b = 9.92688$ $\quad$ $sin\,b = 9.72811$

$cos(L - l) = 9.93291$ $\quad$ 6.75442

9.85979 $\quad$ $+ 0,00057$

$+ 0,72408$

$0,72465 = cos\,\mu$

$\mu = 43^\circ\, 33'\, 35''$

$$\rho' = cos\,\mu\ sin\,\varpi - \tfrac{1}{2}\, sin\,\mu^2\ sin\,\varpi^2$$

$$q' = \frac{\rho'.\ cos\,L.\ cos\,B - sin\,\varpi.\ cos\,l.\ cos\,b}{cos\,L\ cos\,B}$$

$log\,\varrho' = 8.10931 - 10$

$q' = + 0{,}002011$

$$sin(L - L') = \frac{sin\,\varpi\ cos\,L'\ cos\,b\ sin(l - L)\,(1 - q')}{cos\,L.\ cos\,B}.$$

Statt $cos\,L'$ nehme man zuerst $cos\,L$, so wird der genäherte Werth von $L - L'$

$$sin(L - L') = \frac{sin\,\varpi.\ cos\,b.\ sin(l - L)}{cos\,B}$$

$sin\,\varpi = 8.25174$

$cos\,b = 9.92688$

$sin(l - L) = 9.71226$

$C.\ cos\,B = 0{,}00000$

$7.89088 = sin(L - L')$

$L - L' = 26'\, 44''41$

$L' = 215^\circ\, 37.\, 47{,}86$

7.89088

$cos\,L' = 9.90999\,n$

$C.\ cos\,L = 0.09246\,n$

$log(1 - q') = 9.99913$

$7.89246 = sin(L - L')$

$L - L' = 26'\, 50''26$

also scheinbare Länge des Mondes

$= 215^\circ\, 37'\, 42''01.$

Für die Breite hat man

$$\sin \tfrac{1}{2}(B - B') = \frac{\sin \varpi . \sin b}{2 \cos \frac{1}{2}(B + B')} - \frac{\rho . \sin B}{2 \cos \frac{1}{2}(B + B')}$$

also zuerst näherungsweise

$$\sin \tfrac{1}{2}(B - B') = \frac{\sin \varpi . \sin b}{2 \cos B} - \tfrac{1}{2} \rho \tan g B$$

$$B - B' = \quad 0^\circ \, 32' \, 49''15$$
$$B = - \, 0. \, 29. \, 10{,}00.$$

Der genaue Werth von $B - B'$ ergiebt sich $= + \, 32' \, 46''41$, also die scheinbare Breite des Mondes

$$= - \, 0^\circ \, 29' \, 7''26.$$

Endlich haben wir noch den Halbmesser des Mondes zu berechnen

$$\Delta' = \Delta + \rho\Delta = 16' \, 58''17.$$

Für die Sonne erhält man

die scheinbare Länge =	215° 22′ 1″08
— — Breite = —	4,46
den scheinb. Halbmesser =	16. 7,69.

§. 507.

Es befinde sich nun zu Anfang oder zu Ende der Finsterniss der Mittelpunkt des Mondes in M, der der Sonne in S (fig. 15.), so ist MS der Abstand der Mittelpunkte = der Summe der Halbmesser, MB die scheinbare Breite des Mondes, SD die der Sonne, so hat man bekanntlich in dem Viereck $BMSD$

$$\cos MS = \sin MB \sin SD + \cos MB \cos SD \cos BD$$

und hieraus

$$\cos BD = \frac{\cos MS - \sin MB . \sin SD}{\cos MB . \cos SD}.$$

Da sich aber nach dieser Formel unbequem rechnen lässt, da die darin vorkommenden Winkel alle sehr klein sind, so ziehen wir dieselbe von der Gleichung $1 = 1$ ab, und addiren sie ebenfalls zu derselben; hierdurch erhält man die beiden andern Gleichungen

$$1 - \cos BD = \frac{\cos(MB - SD) - \cos MS}{\cos MB . \cos SD}$$

$$1 + \cos BD = \frac{\cos(MB + SD) + \cos MS}{\cos MB . \cos SD}.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so kommt nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$tg\,{}^1\!/_2\,BD = \sqrt{\frac{\sin{}^1\!/_2\,(MS+SD-MB).\ \sin{}^1\!/_2\,(MS+MB-SD)}{\cos{}^1\!/_2\,(MS-MB-SD).\ \cos{}^1\!/_2\,(MS+MB+SD)}}.$$

Im vorliegenden Falle hat man

$MS = 16'\ 58''17 + 16'\ 7''69 = 33'\ 5''86$
$MB = -\ 29.\ 7{,}26,\qquad SD = -\ 4{,}46$
$\frac{1}{2}(MS + SD - MB) = 31'\ 4''33$
$\frac{1}{2}(MS + MB - SD) = 2.\ 1{,}53$
$\frac{1}{2}(MS - MB - SD) = 31.\ 8{,}79$
$\frac{1}{2}(MS + MB + SD) = 1.\ 57{,}07.$

Hieraus ergiebt sich nach voriger Formel

$$BD = 15'\ 51''88.$$

Nun ist aber *BD* nichts anders als der beobachtete scheinbare Längenunterschied der Sonne und des Mondes; addiren wir daher hierzu den Unterschied der Längenparallaxen des Mondes und der Sonne

$$26'\ 50''26 - 3''83 = 26'\ 46''43,$$

so erhalten wir den wahren Längenunterschied zu dieser Zeit, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befände $= 42'\ 38''31$.

Für diesen Zeitpunkt hat man aus den Tafeln

stündliche Bew. des Mondes $= 38'\ 4''22$ in Länge
— — der Sonne $= 2.\ 30{,}08$
relative Bew. des Mondes $= 35'\ 34{,}14$.

Dividirt man den oben gefundenen wahren Längenunterschied durch die relative stündliche Bewegung des Mondes, so erhält man die Zeit, welche seit der wahren Conjunction der Sonne und des Mondes (wo beide gleiche Länge haben) verflossen ist, in Secunden ausgedrückt

$$\frac{42'\ 38''31}{35'\ 34''14} = \frac{2558''31}{2134''14}$$
$$= 1^h\ 11987 = 1^h\ 11'\ 55''5.$$

Nun wurde das Ende der Finsterniss in Cumana um $2^h\ 14'\ 23''4$ beobachtet, also fand die wahre Conjunction um

$$1^h\ 2'\ 27''9 \text{ mittlerer Zeit}$$

in Cumana statt *). Addirt man hierzu den proviso-

*) Es ist einleuchtend, dass wenn der Anfang der Finsterniss beobachtet worden wäre, so müsste man den Zeitunterschied zur Zeit der Beobachtung addiren, um die Conjunction zu erhalten.

rischen Längenunterschied zwischen Cumana und Paris von $4^h\ 26'\ 4''$, so erhält man die Zeit der Conjunction in Paris

$$= 5^h\ 28'\ 32''$$

und für diese Zeit erhält man aus den Tafeln folgende Elemente der Sonnen- und Mondsörter

wahre Länge der Sonne $= 215°\ 19'\ 5''0$
— — des Mondes $= 215.\ 18.\ 53,9.$

Da also die Länge des Mondes noch kleiner ist als die der Sonne, so hat zur angegebenen Zeit in Paris die Conjunction noch nicht statt gefunden. Es ist ferner

stündliche Bewegung des Mondes $= 38'\ 4''11$
— — der Sonne $= 2.\ 30,08$
relative Bewegung des Mondes $= 35.\ 34,03.$

Dividirt man den Längenunterschied der Sonne und des Mondes $= 11''1$ durch die relative Bewegung des Mondes in einer Stunde, so kommt die Zeit die noch bis zur Conjunction verfliesst, $= 18''7$, und man erhält die Zeit der wahren Conjunction in Paris

$$= 5^h\ 28'\ 50''7.$$

Zieht man hiervon die Zeit der wahren Conjunction in Cumana ab, so erhält man den Meridianunterschied zwischen Paris und Cumana in Zeit

$$= 4^h\ 26'\ 22''8.$$

Wenn der zuletzt gefundene Meridianunterschied bedeutend von dem provisorisch angenommenen abweicht, so wird es nothwendig die Rechnung zu wiederholen, indem man den neuen Meridianunterschied anwendet.

§. 508.

Der auf die angegebene Art gefundene Längenunterschied wird innerhalb gewisser Gränzen immer unrichtig seyn müssen, da theils die Beobachtungen, theils die Tafeln für die Bewegung der Sonne und des Mondes kleinen Fehlern unterworfen seyn können, und wir wollen untersuchen in wie fern die letzten Fehler auf das Endresultat Einfluss haben. Es sey die Zeit der Beobachtung des Anfangs der Finsterniss $= T$, der Unterschied der wahren Sonnenlänge weniger der wahren Mondslänge $= \lambda$, die stündliche

relative Bewegung des Mondes $= m$, die Zeit der wahren Conjunction $= \theta$, so hat man

$$\theta = T + \frac{\lambda}{m}.$$

Nennen wir nun die Summe der beiden Halbmesser der Sonne und des Mondes S, den scheinbaren Breitenunterschied β', den scheinbaren Längenunterschied beider Himmelskörper λ', so wird, wenn wir das sphärische Viereck $BMSD$ (fig. 15.) als ein rechtwinklichtes geradliniges Paralleltrapez betrachten, welches wegen der geringen Dimensionen der Seiten hierbei erlaubt ist,

$$\lambda'\lambda' = SS - \beta'\beta';$$

$$\lambda' = \sqrt{SS - \beta'\beta'}.$$

Nun fanden wir bei unserer Methode die Meridiandifferenz zu berechnen, λ aus λ' dadurch, dass wir den Unterschied der Längenparallaxen zu λ addiren. Ist daher die Längenparallaxe des Mondes $= f$, die der Sonne $= h$, so wird

$$\lambda = \lambda' + f - h = \sqrt{SS - \beta'\beta'} + f - h.$$

Bezeichnet man ferner den wahren Breitenunterschied durch β, die Breitenparallaxe des Mondes durch f', die der Sonne durch h', so ist $\beta' = \beta - f' + h'$, also

$$\lambda = \sqrt{SS - (\beta - f' + h')^2} + f - h$$

und wenn man diesen Werth von λ in die Gleichung $\theta = T + \frac{\lambda}{m}$ substituirt, so kommt

$$\theta = T + \frac{\sqrt{SS - (\beta - f' + h')^2} + f - h}{m}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem man T als unveränderlich ansieht, so erhält man

$$d\theta = \frac{SdS - (\beta - f' + h')(d\beta - df' + dh')}{m\sqrt{SS - (\beta - f' + h')^2}} + \frac{df - dh}{m}.$$

Nun sieht man aber aus den frühern Formeln für die Längenparallaxen und Breitenparallaxen, dass dieselben den Horizontalparallaxen sehr genau pro-

portional sind, und man hat daher, wenn Π, Π° die Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne, und a, a' zwei Constanten bedeuten, zu unserm Zweck genau genug

$$f - h = a(\Pi - \Pi^\circ) = a\pi$$
$$f' - h' = a'(\Pi - \Pi^\circ) = a'\pi,$$

folglich wenn man differentiirt

$$df - dh = \frac{d\pi\,(f - h)}{\pi}$$
$$df' - dh' = \frac{d\pi\,(f' - h')}{\pi}.$$

Setzt man der bequemern Rechnung wegen

$$6 - f' + h' = 6' = S.\sin\omega$$

so wird vorige Gleichung

$$d\theta = \frac{dS}{m.\cos\omega} - \frac{d6}{m}\tang\omega + \frac{(df' - dh')}{m}\tang\omega$$
$$+ \frac{df - dh}{m}$$

oder wenn man statt $df' - dh'$, $df - dh$ ihre Werthe substituirt

$$d\theta = \frac{dS}{m.\cos\omega} - \frac{d6}{m}\tang\omega$$
$$+ \frac{d\pi}{m}.\frac{(f - h) + (f' - h')\tang\omega}{\pi}.$$

Durch diese Formel ist daher der Fehler der Zeit $d\theta$, durch den Fehler dS der Summe der Halbmesser, den Fehler $d6$ des Breitenunterschiedes, und den Fehler $d\pi$ der Differenz der Horizontalparallaxen ausgedrückt. Für das Ende der Finsterniss erhalten diejenigen Glieder, welche den Winkel ω enthalten, das entgegengesetzte Zeichen.

§. 509.

Wir wollen diese Formel auf die vorhin berechnete Sonnenfinsterniss anwenden; man hat daselbst

S =	33′	5″86	=	1985″86
$6'$ =	— 29.	2,80	=	— 1742,80
m =	35.	34,14	=	2134,14
$f - h$ =	26.	46,43	=	1606,43

$$f' - h' = \quad 32' \, 45''03 = \quad 1965''03$$
$$\pi = \quad 61. \, 14,50 = \quad 3674,50$$
$$\omega = - \, 61^\circ \, 21' \, 20''.$$

Vorige Gleichung würde den Werth von $d\theta$ in Stunden angeben; will man daher $d\theta$ in Zeitsecunden erhalten, so muss man die Coefficienten von dS, $d6$, $d\pi$ noch mit 3600 multipliciren, und man findet dann, da das Ende der Finsterniss beobachtet wurde

Coeff. von $dS = - 3{,}519$
— — $d6 = - 3{,}153$
— — $d\pi = - 0{,}914$

folglich die Correction

$$d\theta = - 3{,}519 \, dS - 3{,}153 \, d6 - 0{,}914 \, d\pi$$

wo die Grössen dS, $d6$, $d\pi$ in Bogensecunden ausgedrückt werden müssen.

§. 510.

Hat man sowohl den Anfang als das Ende einer Sonnenfinsterniss berechnet, so erhält man zwei solcher Gleichungen, um die Zeit der wahren Conjunction zu corrigiren. Nehmen wir nun an, es sey für den Anfang der Finsterniss

$$d\theta = a dS + b d6 + c d\pi$$

und für das Ende

$$d\theta' = a' dS + b' d6 + c' d\pi,$$

so müssen, wenn die Correctionen angebracht werden, beide Zeiten der wahren Conjunction, die aus dem Anfange und dem Ende der Finsterniss geschlossen werden, gleich seyn, d. h. es wird $d\theta - d\theta' = 0$, oder

$$(a - a') \, dS + (b - b') \, d6 + (c - c') \, d\pi = 0.$$

Da nun die Coefficienten $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ bekannt sind, so sieht man, dass wenn an drei Orten der Anfang und das Ende einer Finsterniss beobachtet werden, sich aus den drei dadurch entstehenden Gleichungen die Correctionen dS, $d6$, $d\pi$ finden lassen.

§. 511.

Die Bedeckungen der Fixsterne durch den Mond werden auf dieselbe Art berechnet als die Sonnenfinsternisse, indem man nur statt der Sonnenlängen und Breiten, die Länge und Breite des Fixsterns nimmt.

Die Längenparallaxe, die Breitenparallaxe, der Halbmesser und die stündliche Bewegung des Fixsterns, ist dann gleich Null. Eben so ergeben sich auch die Durchgänge der untern Planeten, Mercur und Venus durch die Sonnenscheibe, da man diese Planeten nur an die Stelle des Mondes zu setzen braucht. Diese letzte Erscheinung findet aber sehr selten statt; wir unterlassen daher ein numerisches Beispiel hinzuzufügen.

§. 512.

Eine der gewöhnlichsten Methoden die Länge zu bestimmen, deren man sich auch am häufigsten auf der See bedient, besteht darin, dass man die Entfernungen des Mondes von der Sonne oder den Sternen misst, wozu man solche Sterne wählt, die in der Nähe der Ecliptik liegen, damit die Aenderung der Entfernung derselben vom Monde desto merklicher werde. Die Art, auf welche man aus solchen Abständen die Länge finden kann, lässt sich folgendermassen deutlich machen. Die Bewegung des Mondes ist so bedeutend, dass schon in sehr kurzer Zeit die Abnahme oder Zunahme der Entfernung von einem Stern, beobachtet werden kann, so beträgt z. B. der Abstand der Mittelpunkte des Mondes von Atair (α aquilae), vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen in Pariser Zeit

1829. März 25.	0^h	. . . .	61° 12′ 28″
	3.	. . . .	59. 47. 54
	6.	. . . .	58. 23. 31.

Bezeichnet man den Abstand allgemein durch x, die in Stunden ausgedrückte Zeit durch t, vom Mittag des 25. März an gerechnet, so lässt sich innerhalb dieser Zeit der Abstand durch die Formel

$$x = a + bt + ct^2$$

ausdrücken, und man erhält

$a =$ 61° 12′ 28″

$b = -$ 38. 13″17; $c =$ 0″611.

Gesetzt nun man hätte an irgend einem Orte der Erde den Abstand des Mondes von α aquilae gemessen, und denselben auf den Mittelpunkt der Erde reducirt = 59° 58′ 10″

gefunden; so kann man leicht berechnen, zu welcher Zeit in Paris diese Beobachtung angestellt worden ist. Man hat nämlich die Gleichung

$$59^\circ\ 58'\ 10'' = a + bt + ct^2.$$

Hieraus ergiebt sich näherungsweise

$$t = \frac{59^\circ\ 58'\ 10'' - a}{b} = \frac{4458''}{2293''17} = 1{,}94$$

und der genauere Werth von

$$t = \frac{59^\circ\ 58'\ 10'' - a - ct^2}{b}$$

$$= \frac{4455''71}{2293''17} = 1^h\ 56'\ 35''$$

also wäre die Beobachtung am 25. März $1^h\ 56'\ 35''$ Pariser Zeit gemacht worden. Gesetzt nun man hätte auf irgend eine Art die Zeit der Beobachtung nach derjenigen die am Beobachtungsorte gezählt wird = $3^h\ 14'\ 20''$ gefunden, so würde der Meridianunterschied

$$3^h\ 14'\ 20'' - 1^h\ 56'\ 35'' = 1^h\ 17'\ 48''$$

betragen, also liegt der Beobachtungsort $19^\circ\ 26'\ 15''$ östlich von Paris.

§. 513.

Es kommt also alles darauf an, dass man den scheinbaren gemessenen Abstand des Mondes auf den wahren, aus dem Centrum der Erde gesehen, reducirt. Dies ist sehr leicht, wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, also auf die Veränderlichkeit ihres Halbmessers nicht Rücksicht nimmt. Es sey (fig. 16.) Z das Zenith des Beobachtungsortes, S und L die scheinbaren Oerter des Sterns und des Mondes, ZS und ZL ein paar Verticalkreise, so sind ZS, ZL die Complemente der scheinbaren Höhen beider Himmelskörper über dem Horizont, SL der scheinbare Abstand derselben, und man hat, wenn

der scheinbare Abstand = S,
die scheinbare Höhe des Mondes = H,
— — — — Sterns = h,

gesetzt wird

$$\cos S = \sin H.\ \sin h + \cos H.\ \cos h.\ \cos SZL.$$

Der scheinbare Ort eines Sterns wird aus dem wahren gefunden, indem man den letztern rücksichtlich der Strahlenbrechung und der Parallaxe verbessert. Beide Veränderungen wirken in der Richtung der Verticalkreise; sind daher S' und L' die wahren Oerter des Sterns und des Mondes, so liegen die Punkte S' und L' mit auf den grössten Kreisen ZS, ZL, so dass die beiden Dreiecke SZL, $S'ZL'$ den Winkel am Zenith gemeinschaftlich haben. Setzt man daher

den wahren Abstand $= S'$,
die wahre Höhe des Mondes $= H'$,
— — — — Sterns $= h'$,

so hat man aus dem Dreieck $S'ZL'$

$$\cos S' = \sin H'.\ \sin h' + \cos H'.\ \cos h'.\ \cos S'ZL'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorigen welche $\cos S$ ausdrückt, indem man $\cos SZL$ oder $S'ZL'$ die einander gleich sind, eliminirt, so erhält man

$$\frac{\cos S' - \sin H'.\ \sin h'}{\cos H'.\ \cos h'} = \frac{\cos S - \sin H.\ \sin h}{\cos H.\ \cos h}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin H'.\ \sin h' = -\cos(H' + h') + \cos H'.\ \cos h'$$
$$\sin H.\ \sin h = -\cos(H + h) + \cos H.\ \cos h$$

folglich kann man vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\cos S' + \cos(H' + h')}{\cos H'.\ \cos h'} = \frac{\cos S + \cos(H' + h)}{\cos H.\ \cos h}$$
$$= \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(H + h + S)\ \cos\tfrac{1}{2}(H + h - S)}{\cos H.\ \cos h}.$$

Ferner ist

$$\cos S' = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}S'^2$$
$$\cos(H' + h') = 2.\ \cos\tfrac{1}{2}(H' + h')^2 - 1.$$

Setzt man dann

$$\frac{\cos\tfrac{1}{2}(H + h + S).\ \cos\tfrac{1}{2}(H + h - S).\ \cos H'.\ \cos h'}{\cos H.\ \cos h\ \cos\tfrac{1}{2}(H' + h')^2} = \sin N^2,$$

so wird

$$\cos\tfrac{1}{2}(H' + h')^2 - \sin\tfrac{1}{2}S'^2 = \sin N^2.\ \cos\tfrac{1}{2}(H' + h')^2$$

und hieraus erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}S' = \cos N.\ \cos\tfrac{1}{2}(H' + h')$$

welches die verlangte Formel ist, die zuerst von Borda angegeben wurde.

§. 514.

Man sieht also, dass zur Berechnung des wahren Abstandes aus dem scheinbaren, die wahren und scheinbaren Höhen beider Gestirne bekannt seyn müssen. Man ziehe zuerst von den beobachteten Höhen die Strahlenbrechung ab (§. 473.), so erhält man für die Fixsterne sogleich die wahre Höhe, da bei diesen keine Parallaxe statt findet. Bei dem Monde und der Sonne hingegen muss noch die Correction wegen der Parallaxe angebracht werden, indem man zu der von der Strahlenbrechung befreieten Höhe einen Winkel ϖ hinzuaddirt, der durch die Gleichung

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \cos H .$$

bestimmt wird, wo Π die Horizontalparallaxe des Himmelskörpers bedeutet.

Es ist noch zu bemerken, dass auf dem Meere die Höhenbeobachtung eine Correction erleidet, die daher rührt, dass man bei Seereisen wegen der Bewegung des Schiffs keinen künstlichen Horizont (ein Gefäss mit Oel, oder Quecksilber, oder eine Glasplatte) anwenden kann, sondern den Abstand des Sterns vom Meereshorizont messen muss. Nun sey C der Mittelpunkt der Erde (fig. 17.), die wir hier als eine Kugel betrachten können, in E der Beobachter, der die Höhe EA über dem Meeresniveau hat, ET eine vom Auge des Beobachters gezogene Berührungslinie, so wird in T der scheinbare Meereshorizont sich zeigen; zieht man dann EP senkrecht auf CE, so giebt EP den wahren Horizont, und der Winkel PET ist die Depression des Meerhorizonts. Nun hat man $PET = TCE$, $\cos TCE = \frac{TC}{EC}$; bezeichnet man also die Höhe des Beobachters EA durch h, den Halbmesser der Erde durch a, so wird

$$\cos TCE = \frac{a}{a+h},$$

$$1 - \cos TCE = \frac{h}{a+h},$$

oder wegen der geringen Grösse des Winkels TCE und des Verhältnisses $\frac{h}{a}$,

$$TCE = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 206265'' \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

wenn man den Winkel in Secunden haben will. Nimmt man $a = 3272000$ Toisen, so kommt auch

$$TCE = 161''26 \sqrt{h}$$

wo die Höhe h ebenfalls in Secunden ausgedrückt seyn muss. Wegen der Strahlenbrechung wird aber der Horizont etwas erhöht, und man kann diese Erhöhung im Mittel $= \frac{8}{100}\, TCE$ setzen, so dass die wirkliche Depression durch die Formel

$$TCE = 148''36 \sqrt{h}$$

gefunden wird.

§. 515.

Da man bei der Beobachtung des Abstandes des Mondes von der Sonne oder den Sternen, nur den Abstand der Ränder von einander messen kann, hingegen die Rechnung immer für die Mittelpunkte dieser Körper geführt werden muss, indem die Ephemeriden den Abstand der Mittelpunkte von einander geben, so muss man zu den gemessenen Abstand sogleich die Summe der Halbmesser des Mondes und der Sonne addiren, die man aus den Ephemeriden entnehmen kann. Hierbei ist aber zu bemerken, dass der aus den Ephemeriden entnommene Halbmesser des Mondes, der für den Mittelpunkt der Erde gilt, um eine Grösse vermehrt werden muss, die der grössern Nähe des Mondes zum Beobachter auf der Erde proportional ist. Bezeichnet man den Halbmesser des Mondes durch Δ, so ist (§. 505.) die Correction $= \rho . \Delta$, und da nach §. 500. $\rho = \cos\mu \sin \Pi$, so wird auch die Correction $= \Delta . \cos\mu . \sin\Pi$; nun sieht man aber aus dem §. 500. gegebenen Ausdruck leicht, dass der Winkel μ nichts anders ist als der Abstand des Zeniths vom Himmelskörper, also gleich dem Complement der Höhe $= 90° - H$, folglich wird $\cos\mu = \sin H$, und der scheinbare Halbmesser des Mondes

$$= \Delta + \Delta . \sin\Pi . \sin H.$$

§. 516.

Wir wählen hierbei folgendes Beispiel: Am 10. Februar 1776 wurde um 5 Uhr Nachmittags ungefähr in einer auf 150° westlich von Paris geschätzten Länge beobachtet.

Höhe des obern Mondrandes	=	54° 31′ 0″
Höhe des untern Sonnenrandes	=	6. 15. 15.
Abstand d. beiden nächsten Ränder	=	108. 10. 29.
Halbmesser des Mondes	=	15. 7.
— der Sonne	=	16. 15.
Horizontalparallaxe des Mondes	=	55. 19.
— der Sonne	=	0. 8.
Depression des Horizonts	=	3. 56.
corrigirter Halbmesser des Mondes	=	15. 19.

Hierdurch erhält man

scheinb. H. d. Mittelp. d. ☾	scheinb. H. d. Mittelp. d. ☉
54° 31′ 00	6° 15′ 15″
— 15. 19	+ 16. 15.
— 3. 56	— 3. 56.
H = 54° 11. 45	h = 6° 27. 34.

Scheinbarer Abstand der Mittelpunkte

108° 10′ 29″
\+ 15. 19.
\+ 16. 15.
108° 42. 3. = S.

Um die wahren Höhen zu erhalten, muss man wegen der Parallaxe und Strahlenbrechung bei der Sonne 7′ 33″ abziehen, und bei dem Monde 31′ 42″ hinzuaddiren. Es wird dann

$H' = 54° 43' 27''$
$h' = 6. 20. 1.$

Man hat dann nach den Formeln §. 513.

$\frac{1}{2}(H+h+S) = 84° 40' 41''$
$\frac{1}{2}(H+h-S) = -24. 1. 22.$
$\frac{1}{2}(H'+h') = 30. 31. 44.$

$\cos\frac{1}{2}(H+h+S) = 8.9673230$
$\cos\frac{1}{2}(H+h-S) = 9.9606532$
$\cos H' = 9.7615620$
$\cos h' = 9.9973412$
$C. \cos H = 0.2328318$

$$C.\cos h = 0.0027658$$
$$C.\cos\tfrac{1}{2}(H+h')^2 = 0.1296174$$
$$9.0520944 = \sin N^2$$
$$\sin N = 9.5260472$$
$$N = 19^\circ\ 37'\ 11''$$
$$\cos N = 9.9740242$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(H'+h') = 9.9351913$$
$$9.9092155 = \sin\tfrac{1}{2}S'$$
$$\tfrac{1}{2}S' = 54^\circ\ 13'\ 45''5$$
$$S' = 108.\ 27.\ 31.$$

wodurch der wahre Abstand gefunden ist.

§. 517.

Um nun weiter hieraus die wahre Länge des Schiffes zur Zeit der Beobachtung zu schliessen, findet man aus der Connoissance des tems

um $15^h\ 9'\ 16''$	Abstand $= 108^\circ\ 37'\ 00''$
18. 9. 16.	— $= 107.\ 12.\ 12.$

also beträgt in drei Stunden die Abnahme des Abstandes $1^\circ\ 24'\ 48''$. Der Unterschied zwischen dem berechneten und dem ersten Abstande ist $= 9'\ 29''$; man mache daher die Proportion

$$1^\circ\ 24'\ 48'' : 9'\ 29'' = 3^h : x,$$

so findet sich $x = 1208'' = 20'\ 8''$, also war die Zeit in Paris wo der Mond von der Sonne den Abstand $108^\circ\ 27'\ 31''$ hatte $= 15^h\ 9'\ 16'' + 20'\ 8' = 15^h\ 29'\ 24''$. Die Zeit, welche bei dem Beobachter gezählt wurde, lässt sich leicht aus der wahren Höhe der Sonne, der Declination derselben, und der Polhöhe des Ortes finden. Bezeichnet man nämlich die Polhöhe durch p, die Declination durch δ, den Stundenwinkel durch t, so hat man bekanntlich

$$\cos t = \frac{\sin h' - \sin p.\ \sin\delta}{\cos p.\ \cos\delta}$$

oder

$$1 - \cos t = \frac{\cos(p-\delta) - \sin h'}{\cos p.\ \cos\delta}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(90-h'-p+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(90-h'+p-\delta)}{\cos p.\ \cos\delta}}.$$

Nun war im vorliegenden Beispiel
den 10. Febr. $0^h\ 0'$ . . . . $\delta = -14^\circ\ 22'\ 37''$
— 11. — $\delta = -14.\ 03.\ 00.$
also beträgt die Declination am 10. Febr. $15^h\ 29'\ 24''$,
$-14^\circ\ 22'\ 37'' + 12'\ 39'' = -14^\circ\ 9'\ 58'' = \delta$.

Die Polhöhe des Beobachtungsortes ist $p = 10^\circ\ 20'$, die wahre Höhe $h' = 6^\circ\ 20'\ 1''$,

$$\tfrac{1}{2}(90 - h' - p + \delta) = 29^\circ\ 35'\ 0''$$
$$\tfrac{1}{2}(90 - h' + p - \delta) = 54.\ 4.\ 59$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(90 - h' - p + \delta) = 9.6934534$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(90 - h' + p - \delta) = 9.9084144$$
$$C.\cos p = 0.0071016$$
$$C.\cos\delta = 0.0134126$$
$$9.6223820$$
$$9.8111910$$
$$\tfrac{1}{2}t = 49^\circ\ 20'\ 52''$$
$$t = 80.\ 41.\ 44.$$

also in Zeit ausgedrückt $5^h\ 22'\ 47''$. Zieht man dies von der berechneten Pariser Zeit $15^h\ 29'\ 24''$ ab, so bleibt der Meridianunterschied $10^h\ 6'\ 37''$ westlich von Paris, oder in Graden ausgedrückt befand sich der Beobachter in $151^\circ\ 39'\ 15''$ westlicher Länge.

§. 518.

Hat man den Abstand eines Sterns von dem Mondsrande gemessen, so wird die Rechnung auf dieselbe Art geführt als in den vorigen Paragraphen, nur rücksichtlich der Zeitbestimmung aus der Höhe des Sterns muss man nach §. 467 bis 469. die Zeit der Culmination des Sterns berechnen, dann den Stundenwinkel nach §. 517. suchen, diesen auf mittlere Zeit reduciren und denselben von der Culminationszeit des Sterns abziehen oder zu derselben addiren, jenachdem die Beobachtung vor oder nach der Culmination gemacht ist.

§. 519.

Auf der See, oder überhaupt an Orten wo man keine Gelegenheit hat den Gang der Uhr genau zu

bestimmen, oder die Uhr selbst einen zu ungleichförmigen Gang hat, sind eigentlich zu jeder Beobachtung dieser Art drei Beobachter nothwendig, von denen der eine den Abstand des Mondes von der Sonne oder dem Stern, die beiden andern in demselben Augenblick die Höhen dieser Himmelskörper messen. Allein folgendermassen kann ein einzelner Beobachter alle drei erforderlichen Winkel bestimmen, wenn er nur eine Uhr besitzt die während einer halben Stunde einen gleichförmigen Gang hält und Secunden zeigt, wozu eine gewöhnliche Taschenuhr mit einem Secundenzeiger hinreichend ist. Er misst zuerst die Höhe des Mondes und der Sonne oder des Sterns, hierauf nimmt er den Abstand beider Himmelskörper und sogleich hernach wieder die Höhen; bei allen Messungen bemerkt er die Zeit. Aus den Aenderungen der Höhe des Mondes und der Sonne innerhalb der verflossenen Zeiten, finden sich dann durch eine leichte Interpolation die Höhen, die zu der Zeit statt fanden, zu welcher er den Abstand mass.

§. 520.

Hat man hingegen eine gute Uhr bei den Beobachtungen, die man auf dem festen Lande anstellt, so thut man am besten, dass man mehrere Abstände des Mondes von der Sonne oder den Sternen nimmt, die Höhen aber gar nicht misst, sondern die Zeiten genau bestimmt, und aus diesen sowohl als aus den gemessenen Abständen das arithmetische Mittel sucht; die wahren und scheinbaren Höhen berechnet man aus den Zeiten der Polhöhe und der Declination. So beobachtete z. B. v. Humboldt in Cumana am 7. August 1799 folgende Abstände des Mondrandes vom Antares (α Scorpii).

Abstände	mittlere Zeit in Cumana
26° 54′ 48″	9ʰ 4′ 4″
53. 28.	9. 8. 2.
51. 28.	9. 13. 52.
49. 28.	9. 17. 39.
47. 48.	9. 20. 17.
45. 28.	9. 23. 40.
Mittel 26° 50′ 24″7	Mittel 9ʰ 14′ 35″7.

Aus der schon früher gefundenen Länge von Cumana kann man schliessen, dass diese Zeit ungefähr mit 13ʰ 35′ in Paris übereinstimmt. Die Polhöhe von Cumana setzen wir

$$p = + 10^\circ\ 27'\ 52''5.$$

Wir müssen nun zuerst die wahren und scheinbaren Höhen des Mondes und des Antares für die Beobachtungszeiten berechnen. Wir haben aus den Tafeln

1799. August 7. 13ʰ 35′ mittl. Zeit. Paris

grade Aufsteigung des Mondes	=	218° 49′ 31″
— — der Sonne	=	137. 53. 15
Unterschied		80. 56. 16.

Die Zeitgleichung beträgt an diesem Tage + 5′ 24″2, man hat also

Beobacht.	9ʰ 14′ 35″7 mittl. Zeit
—	5. 24,2
	9ʰ 9. 11,5 wahre Zeit

oder in Graden ausgedrückt

Stundenw. der Sonne =	137° 17′ 52″5 westl.	
grade Aufst. ☾ — ☉ =	80. 56. 16.	
Stundenw. des ☾	36. 21. 36,5 westl.	$= t$
Declination des ☾ = —	15. 16. 5,6	$= \delta$.

Bezeichnet man dann die Höhe durch H', so hat man nach der bekannten Formel

$$\sin H' = \sin p.\ \sin \delta + \cos p.\ \cos \delta.\ \cos t$$

$\sin p$ = 9.2591821	$\cos p$ = 9.9927158
$\sin \delta$ = 9.4205135 n	$\cos \delta$ = 9.9843939
8.6796956 n	$\cos t$ = 9.7434870
	9.7205967
	0,5255290
	— 0,0478295
	0,4776995
	$\sin H'$ = 9.6791547
	H' = 28° 32′ 6″9

wodurch die wahre Höhe des Mondes, aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen, gefunden ist. Um die des Antares zu finden, hat man

grade Aufsteigung des Antares	=	244° 16′ 58″
— — des Mondes	=	218. 49. 31
		25. 27. 27
Stundenwinkel des Mondes	=	56. 21. 36,5
Stundenw. d. Antares westlich	=	30. 54. 9,5
Declination des Antares	= —	25. 58. 29.

Hierdurch erhält man wie vorher für den Mond wahre Höhe des Antares = 42° 45′ 53″1.

Zur Berechnung der Refractionen hat man

Barometer = 28″15 Par. Maass

Thermometer = + 30° Cent. Scale

und hieraus findet sich nach §. 473.

Strahlenbrechung des Mondes = 1′ 40″2

—— des Antares = 0. 59,0.

Die Höhenparallaxe des Mondes ϖ ergiebt sich aus der Formel

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \cos H$$

wo Π die Horizontalparallaxe = 59′ 14″8 bedeutet; man erhält ϖ = 52′ 3″0

scheinbare Höhe d. Mondes	des Antares
28° 32′ 6″9	42° 45′ 53″1
— 52. 3,0	+ 0. 59,0
+ 1. 40,2	42. 46. 52,1 = h.
27. 41. 44,1 = H.	

Der Halbmesser des Mondes beträgt 16′ 10″3, und wenn man die §. 515. erwähnte Correction an demselben anbringt, so erhält man denselben = 16′ 18″3. Da der angegebene Abstand des Mondrandes vom Antares sich auf den vom Stern abgewendeten Rand bezieht (es war nämlich das erste Viertel des Mondes, und der Stern stand östlich vom Monde, so dass der dem Sterne zugewendete Rand dunkel war), so muss man den Mondshalbmesser vom gemessenen Abstande abziehen, und man erhält den scheinbaren Abstand des Mittelpunkts des Mondes vom Antares = 26° 34′ 6″4.

Wir haben also zur Berechnung des wahren geocentrischen Abstands folgende Data:

H = 27° 41′ 44″1

H' = 28. 32. 06,9

h = 42. 46. 52,1

$$h' = 42^\circ\ 45'\ 53''1$$
$$\tfrac{1}{2}(H+h+S) = 48.\ 31.\ 21,3$$
$$\tfrac{1}{2}(H+h-S) = 21.\ 57.\ 14,9$$
$$\tfrac{1}{2}(H'+h') = 35.\ 39.\ 00,0$$
$$S = 26.\ 34.\ 06,4.$$

Hieraus ergiebt sich nach den §. 513. entwickelten Formeln

$$\cos\tfrac{1}{2}(H+h+S) = 9.8210710$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(H+h-S) = 9.9673061$$
$$\cos H' = 9.9437533$$
$$\cos h' = 9.8657835$$
$$C.\cos H = 0.0528460$$
$$C.\cos h = 0.1343323$$
$$C.\cos\tfrac{1}{2}(H'+h')^2 = 0.1802544$$
$$\sin N^2 = 9.9653466$$
$$\sin N = 9.9826733$$
$$N = 73^\circ\ 55'\ 31''8$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(H'+h') = 9.9098728$$
$$\cos N = 9.4423027$$
$$9.3521755 = \sin\tfrac{1}{2}S'$$
$$\tfrac{1}{2}S' = 13^\circ\ 0'\ 9''6$$
$$S' = 26.\ 0.\ 19,2$$

wodurch der wahre geocentrische Abstand zu der für Cumana angegebenen Zeit gefunden ist. Man muss nun noch bestimmen, zu welcher Zeit in Paris dieser Abstand statt fand. Es ist für die angegebene pariser Zeit 1799. August 7. $13^h\ 35'$

wahre	Länge des Mondes	=	$221^\circ\ 16'\ 29''1$	$= L$
—	Breite — —	= —	0. 2. 31,7	$= B$
—	Länge — Antares	=	246. 57. 48,4	$= l$
—	Breite — —	= —	4. 32. 22,3	$= b.$

Bezeichnet man dann den Abstand durch σ, so ist bekanntlich

$$\cos\sigma = \sin B.\sin b + \cos B.\cos b.\cos(L-l)$$

und $L - l = -25^\circ\ 41'\ 19''3$. Wegen der geringen Grösse von B setze man

$$\cos b.\cos(L-l) = \cos\sigma'$$
$$\sigma = \sigma' - x,$$

so hat man mit Vernachlässigung der Potenzen von B und x

$$\cos\sigma' + x.\sin\sigma' = B.\sin b + \cos\sigma'$$

$$x = + \frac{B.\sin b}{\sin\sigma'}$$

$$\begin{aligned}
\cos b &= 9.9986354 \\
\cos(L-l) &= \underline{9.9548031} \\
& \quad 9.9534385 = \cos\sigma' \\
\sigma' &= 26^\circ\ 3'\ 35''5 \\
\log B &= 2.18099\,n \\
\sin b &= 8.89844\,n \\
C.\sin\sigma' &= \underline{0.35723} \\
& \quad 1.43666 = \log x \\
x &= +\ 27''3 \\
\sigma &= 26^\circ\ 3'\ 35''5 - 27''3 \\
&= 26.\ 3.\ \ 8,2.
\end{aligned}$$

Differentiirt man die Gleichung

$$\cos\sigma = \sin B\,\sin b + \cos B.\cos b.\cos(L-l)$$

indem man σ, B, L als veränderlich betrachtet, so kommt

$$d\sigma = \left(\frac{\sin B.\cos\sigma'}{\sin\sigma} - \cos B.\frac{\sin b}{\sin\sigma}\right) dB$$

$$+ \frac{\cos B.\cos b\ \sin(L-l)}{\sin\sigma}$$

oder wenn man die numerischen Werthe substituirt

$$d\sigma = 0,1802\,dB - 0,9836\,dL.$$

Nun hat man für die stündliche Bewegung des Mondes $dB = -\ 3'\ 7''16$

$$dL = +\ 35.\ 16,69,$$

also die Zunahme $d\sigma$ des Abstandes für die in Stunden ausgedrückte Zeit t

$$d\sigma = -\,t\,[0,1802\ (3'\ 7''16) + 0,9836\ (35'\ 16''69)]$$

$$= -\,t\ 2115''7.$$

Es ist nun aber

$$S' - \sigma = -\ 2'\ 49''0 = -\ 169'' = d\sigma$$

$$t = \frac{169}{2115,7} = 4'\ 47''6$$

also würde der berechnete Abstand S' zu Paris um

$$13^h\ 35' + 4'\ 47''6 = 13^h\ 39'\ 47''6$$

statt gefunden haben. In Cumana wurde derselbe um

$$9^h\ 14'\ 35''7$$

beobachtet, folglich würde der Meridianunterschied zwischen Paris und Cumana

$4^h\ 25'\ 11''9$

betragen, oder Cumana liegt in $66^\circ\ 17'\ 58''5$ westlicher Länge von Paris.

§. 521.

Wir haben bei den vorigen Rechnungen die Erde als eine Kugel betrachtet, und diese Annahme ist im Allgemeinen auch bei allen Längenbestimmungen die zur See geschehen, wo die Umstände der Genauigkeit der Beobachtungen hinderlich sind, genau genug. Allein bei Messungen die man zu Lande anstellt, kann man eine grössere Genauigkeit der Beobachtungen verlangen, und es ist daher erforderlich, auch die Rechnungen mit der grössten Strenge durchzuführen. Wir wollen daher jetzt untersuchen, welchen Einfluss die sphäroïdische Gestalt der Erde auf das Endresultat der Berechnung des wahren Abstandes aus dem scheinbaren ausübt. Hierzu müssen wir zuerst den beobachteten Abstand auf denjenigen reduciren, der ohne die Strahlenbrechung statt finden würde. Es sey der mit der Strahlenbrechung behaftete Abstand S°, die mit der Strahlenbrechung behafteten Höhen des Mondes H°, der Sonne oder des Sterns h° *), die Strahlenbrechungen für den Mond $= K$, für die Sonne k, der von der Strahlenbrechung befreiete Abstand $= S'$, so berechnet man nach den früher angegebenen Gleichungen

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(H^0 + h^0 + S^0).\ \cos \frac{1}{2}(H^0 + h^0 - S^0).\ \cos(H^0 - K)\ \cos(h^0 - k)}{\cos H^0.\ \cos h^0\ \cos \frac{1}{2}(H^0 + h^0 - K - k)^2} = \sin N^2$$

$$\cos N.\ \cos \tfrac{1}{2}(H^\circ + h^\circ - K - k) = \sin \tfrac{1}{2} S'$$

die Grösse S', welche den Winkel ausdrückt, die die nach dem Mond und der Sonne vom Orte des Beobachters gezogenen Gesichtslinien einschliessen.

Sind die Höhen bedeutend, so kann man die Vermehrung des Abstandes folgendermassen finden. Das Dreyeck SZL (fig. 16.) giebt

---

*) Sind die Höhen nicht wirklich beobachtet, so muss man sie wie im vorigen Paragraph geschehen ist, aus der Zeit berechnen.

$$\cos S^0 = \sin H^0 . \sin h^0 + \cos H^0 . \cos h^0 \cos SZL$$

folglich wenn man die Gleichung differentiirt, indem LZS als unveränderlich betrachtet wird, da dieser Winkel sich durch die Strahlenbrechung nicht ändert

$$- \sin S . dS = \cos H \sin h . dh + \cos h . \sin H . dh$$
$$- (\sin H . \cos h\, dH + \sin h . \cos H\, dh) . \sin SZL.$$

Nun ist aber bei bedeutenden Höhen die Strahlenbrechung der Cotangente der Höhe proportional, folglich, da die Höhe durch die Strahlenbrechung vermindert wird, kann man setzen

$$dH = - i . \cot H, \quad dh = - i . \cot H,$$

wo man vermittelst des §. 473. gegebenen Ausdrucks für die Strahlenbrechung leicht sieht was der constante Coefficient bedeutet. Substituirt man diese Werthe von dH, dh in vorige Gleichung, so kommt

$$+ \sin S . dS = + i \frac{\cos H^2 \sin h^2 + \cos h^2 \sin H^2}{\sin h . \sin H}$$
$$- 2i . \cos H \cos h . \cos SZL.$$

Multiplicirt man die Gleichung

$$\cos S = \sin H . \sin h + \cos H . \cos h . \cos SZL$$

durch $2i$, und addirt das Product zu voriger Gleichung, so wird

$$\sin S . dS = i \left(\frac{\sin h}{\sin H} + \frac{\sin H}{\sin h} \right) - 2i \cos S$$

und hieraus

$$dS = i \left(\frac{\sin h^2 + \sin H^2}{\sin H . \sin h . \sin S} - 2 \cot S \right).$$

Der wahre von der Strahlenbrechung befreiete Abstand ist dann $= S^0 + dS$.

§. 522.

Wir denken uns nun durch den Ort des Beobachters drei rechtwinklichte Axen gelegt, von denen die Axe der x nach dem Ostpunkt, die der y nach dem Südpunkt, und die der z nach dem Zenith gezogen ist; mit diesen parallel legen wir drei andere Axen durch den Mittelpunkt der Erde, nennen die Coordinaten des Mondes rücksichtlich der ersten Axen X', Y', Z', rücksichtlich der letztern X, Y, Z, die Coordinaten des Beobachtungsortes ξ, η, ζ, den Abstand des Mondes vom Mittelpunkte der Erde R,

vom Beobachtungsorte R', den Halbmesser der Erde am Beobachtungsorte ρ, die geocentrische Höhe H, den Winkel, welchen der durch den Mittelpunkt des Mondes gelegte Verticalkreis mit dem ersten Verticalkreise bildet, A, dieselben Grössen vom Beobachtungsorte aus gesehen H', A', den Winkel, welchen die Axe der z mit dem Radius Vector der Erde bildet, μ, wo μ den Unterschied zwischen der geographischen und geocentrischen Breite des Beobachtungsortes bedeutet, und $\mu \doteq 692''. \sin 2p$ ist, wenn p die Polhöhe des Beobachtungsortes angiebt, so hat man

$$X = R.\cos A.\cos H;\quad Y = R.\sin A.\cos H;\quad Z = R.\sin H$$
$$X' = R'.\cos A'.\cos H';\quad Y' = R'.\sin A'.\cos H';\quad Z' = R'.\sin H'$$
$$\xi = 0;\qquad \eta = \rho.\sin\mu;\qquad \zeta = \rho.\cos\mu.$$

Bezeichnet man eben so die für die Sonne oder den Stern geltenden Grössen durch kleine Buchstaben, so wird

$$x = r.\cos a.\cos h;\quad y = r.\sin a.\cos h.\quad z = r.\sin h$$
$$x' = r'\cos a'.\cos h';\quad y' = r'\sin a'.\cos h'.\quad z' = r'.\sin h'.$$

Nennt man den Winkelstand beider Körper vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen S, vom Beobachtungsorte aus S', und bezeichnet die wirkliche Entfernung des Mondes von der Sonne oder dem Stern durch s, so erhält man leicht

$$ss = RR + rr - 2Rr.\cos S$$
$$ss = R'R' + r'r' - 2R'r'.\cos S'.$$

Nun ist aber

$$ss = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$$
$$= RR + rr - 2(Xx + Yy + Zz)$$

und eben so auch

$$ss = (X'-x')^2 + (Y'-y')^2 + (Z'-z)^2$$
$$= R'R' + r'r' - 2(X'x' + Y'y' + Z'z').$$

Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichungen, so wird

$$R.r.\cos S = Xx + Yy + Zz$$
$$R'.r'.\cos S' = X'x' + Y'y' + Z'z',$$

oder wenn man statt der Coordinaten ihre oben angeführten Werthe substituirt, und durch Rr, $R'r'$ dividirt

$$\cos S = \cos A.\cos H.\cos a.\cos h$$
$$+ \sin A.\cos H.\sin a.\cos h + \sin H.\sin h$$
$$\cos S' = \cos A'.\cos H'.\cos a'.\cos h'$$
$$+ \sin A'.\cos H'.\sin a'.\cos h' + \sin H'.\sin h'.$$

§. 523.

Vermöge der Lage der Coordinatenaxen müssen aber folgende drei Gleichungen statt finden:

$$X = X' + \xi, \quad Y = Y' + \eta, \quad Z = Z' + \zeta$$

und eben so auch

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta,$$

folglich wenn man statt der Coordinaten ihre Werthe setzt

$$R. \cos A. \cos H = R'. \cos A'. \cos H'$$
$$R. \sin A. \cos H = R'. \sin A'. \cos R' + \rho. \sin \mu.$$
$$R. \sin H = R'. \sin H' + \rho. \cos \mu.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt die Quadrate, so kommt, wenn man

$$\sin A' \cos H' \sin \mu + \sin H'. \cos \mu = \cos \Lambda$$

der Kürze wegen setzt,

$$RR = R'R' + 2R'\rho. \cos \Lambda + \rho\rho.$$
$$R' + \rho \cos \Lambda = \sqrt{RR - \rho\rho. \sin \Lambda^2},$$

oder wenn man alle das Quadrat übersteigenden Potenzen von $\frac{\rho}{R}$ vernachlässigt, und $\frac{\rho}{R} = \sin \Pi$ nimmt, und dann

$$\sin \Pi. \cos \Lambda + \tfrac{1}{2} \sin \Pi^2 \sin \Lambda^2 = Q$$

setzt, so erhält man

$$R' = R\,(1 - Q).$$

Substituirt man diesen Werth in obige drei Gleichungen, so geben dieselben

$$\cos A. \cos H = \cos A'. \cos H'\,(1 - Q)$$
$$\sin A. \cos H = \sin A'. \cos H'\,(1 - Q) + \sin \Pi. \sin \mu \qquad (a)$$
$$\sin H = \sin H'\,(1 - Q) + \sin \Pi. \cos \mu.$$

Setzt man auf gleiche Weise

$$\sin a'. \cos h'. \sin \mu + \sin h'. \cos \mu = \cos \lambda$$
$$\rho = r. \sin \varpi$$
$$\sin \varpi. \cos \lambda + \tfrac{1}{2} \sin \varpi^2. \sin \lambda^2 = q$$

so erhält man für die Sonne

$$\cos a. \cos h = \cos a'. \cos h'\,(1 - q)$$
$$\sin a. \cos h = \sin a'. \cos h'\,(1 - q) + \sin \varpi. \sin \mu \qquad (b)$$
$$\sin h = \sin h'\,(1 - q) + \sin \varpi. \cos \mu.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (a) resp. mit den Gleichungen (b), so kommt, da wir die Producte $Q. q$, $\sin \varpi. \sin \Pi$, $q. \sin \Pi$, $Q. \sin \varpi$ vernachlässigen können

$$\cos A . \cos H . \cos a . \cos h = \cos A' . \cos H' . \cos a' \cos h' (1 - Q - q)$$

$$\begin{aligned} \sin A . \cos H . \sin a . \cos h = \sin A' . \cos H' . \sin a' . \cos h' (1 - Q - q) \\ + \sin \Pi . \sin \mu . \sin a' \cos h' \\ + \sin \varpi . \sin \mu . \sin N . \cos H' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin H . \sin h = \sin H' . \sin h' (1 - Q - q) \\ + \sin \Pi . \cos \mu . \sin h' \\ + \sin \varpi . \cos \mu . \sin H' . \end{aligned}$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so kommt mit Berücksichtigung der für $\cos S$, $\cos S'$ in vorigem Paragraph gegebenen Werthe

$$\begin{aligned} \cos S = & \cos S' - (Q + q) \cos S' \\ & + \sin \Pi . \sin \mu . \sin a' \cos h' \\ & + \sin \varpi . \sin \mu . \sin A' . \cos H' \\ & + \sin \Pi . \cos \mu . \sin h' \\ & + \sin \varpi . \sin \mu . \sin H' \\ = & \cos S' - (Q + q) \cos S' + \sin \Pi . \cos \lambda \\ & + \sin \varpi . \cos \Lambda . \end{aligned}$$

Hat man statt der Sonne einen Stern gewählt, so ist $\sin \varpi$ so wie q Null. Die Winkel A', a' finden sich durch die Formeln

$$\sin Z = \frac{\cos \delta . \sin t}{\cos H'}, \quad A' = 90 \pm Z.$$

Das obere Zeichen gilt für einen westlichen, das untere für einen östlichen Stundenwinkel $= t$; δ ist die Declination, und Z wie man leicht sieht das Azimuth. Man erhält auch wegen der Kleinheit des Winkels μ

$$\begin{aligned} \Lambda = 90 - H' + \mu . \sin A' \\ \lambda = 90 - h' + \mu . \sin a' \end{aligned}$$

wo man μ in Secunden ausdrücken kann.

§. 524.

Wir wollen diese Formeln auf das §. 520. für die Kugelgestalt der Erde berechnete Beispiel anwenden. Es ist daselbst

$$\begin{aligned} H^\circ &= 27^\circ\, 41'\, 44''1 \\ h^\circ &= 42 .\ 46 .\ 52{,}1 \\ S^\circ &= 26 .\ 34 .\ 06{,}4 \\ S' &= 26 .\ 34 .\ 48{,}5 \end{aligned}$$

wo S' der von der Strahlenbrechung befreiete Abstand ist.

$$H' = 27^\circ\, 40'\, 03''9$$
$$h' = 42.\ 45.\ 53,1$$
$$A' = 156.\ 5.\ 30,0$$
$$a' = 128.\ 58.\ 10,0$$
$$\mu = 4.\ 7,0$$
$$\Lambda = 62.\ 22.\ 01,9$$
$$\lambda = 47.\ 15.\ 43,2.$$

Die Aequatorealhorizontalparallaxe des Mondes ist $= 59'\ 14''8$; um die Horizontalparallaxe Π für den Beobachtungsort zu erhalten, muss man die Grösse $59'\ 14''8$ mit $a\ sin\ p^2$ multipliciren, wo a die Abplattung der Erde, und p die Polhöhe bedeutet, und dies Product von der Aequatorealhorizontalparallaxe abziehen. Man erhält dann

$$\Pi = 59'\ 14''4$$
$$Q = 0{,}0081082$$
$$q = 0,\ \varpi = 0$$
$$cos\ S' = 0{,}8943092$$
$$-Q.\ cos\ S' = -\ 0{,}0072512$$
$$sin\ \Pi.\ cos\ \lambda = +\ 0{,}0116935$$
$$cos\ S = +\ 0{,}8987515$$
$$S = 26^\circ\ 0'\ 20''$$

also ist in unserm vorliegenden Falle der Unterschied zwischen der Berechnung nach der kugelförmigen und der sphäroïdischen Gestalt der Erde ganz unmerklich.

§. 525.

Die Methode, die Länge durch Messung der Entfernungen des Mondes von Sternen zu finden, ist schon sehr alt, indem ein deutscher Astronom Werner im Anfange des sechszehnten Jahrhunderts der erste gewesen zu seyn scheint, der dieselbe in seinem Commentar über die Geographie des Ptolomäus angiebt. Allein wegen der Ungenauigkeit der Mondstafeln, und dem Mangel an passlichen Instrumenten, wurde diese Methode gar nicht angewendet, und man kennt aus den ältern Zeiten nur eine Beobachtung, die Baffin am 26. Juni 1615 auf seiner Reise zur Entdeckung der nordwestlichen Durchfahrt anstellte; allein die Resultate, welche er aus diesen Beobachtungen zog, waren so mangelhaft, dass er die übrigen

Messungen dieser Art ganz verschweigt. Da aber die Auffindung der Länge zur See für die Schifffahrt von so grosser Wichtigkeit war, so zog die Auflösung dieser Aufgabe die Aufmerksamkeit der Regierungen auf sich, und Spanien, die Niederlande, Frankreich und England sahen sich bewogen, Belohnungen für die Erfinder einer zweckmässigen Methode auszusetzen. Es wurde jedoch erst dann möglich zuverlässige Resultate aus der Messung der Mondsdifferenzen abzuleiten, nachdem Newton durch die Entdeckung des allgemeinen Gesetzes der Anziehung, die Bewegung des Mondes genauer kennen gelehrt hatte, die wegen ihrer verwickelten Beschaffenheit ohne Beihülfe der Theorie, nie mit Sicherheit hätten entwickelt werden können. Hierzu kam noch in practischer Rücksicht die im Jahre 1730 von Hadley gemachte Erfindung des Spiegelsextanten, welcher zu Messungen dieser Art das passlichste Instrument ist, und den wir nachher ausführlicher beschreiben werden. Der erste Hauptschritt zur allgemeinern Verbreitung dieser Methode der Längenbestimmung wurde durch die Mondstafeln des berühmten Tobias Mayer bewirkt, dem dafür von England eine Belohnung von fünftausend Pfund Sterling ertheilt wurde, und um die Vergleichung der Beobachtungen mit den Tafeln zu erleichtern, giebt der Nautical Almanac seit 1767, und die Connoissance des tems seit 1774 die Entfernungen des Mondes von der Sonne und einigen Hauptsternen, von drei zu drei Stunden im Voraus berechnet an.

§. 526.

Wenn ein Lichtstrahl auf einen Spiegel fällt, so wird derselbe so zurückgeworfen, dass der zurückgeworfene Strahl mit dem im Einfallspunkte auf dem Spiegel errichteten Perpendikel denselben Winkel bildet, als der einfallende Strahl mit demselben Einfallsloth; ausserdem liegen der einfallende Strahl, das Einfallsloth, und der zurückgeworfene Strahl, in einer und derselben Ebene. Es seyen daher *AB*, *CD* die Durchschnitte zweier ebenen Spiegel mit der auf beiden senkrecht stehenden Ebene des Papiers, *EF* ein

auf den Spiegel *AB* in *F* auffallender Strahl, *FK* das Einfallsloth, $\angle KFG = \angle EFK$, so ist *FG* der vom ersten Spiegel zurückgeworfene Strahl; im Einfallspunkte *G* sey auf dem zweiten Spiegel das Einfallsloth *GL* errichtet, und $\angle LGH = \angle FGL$, so ist *GH* der Weg des vom zweiten Spiegel zurückgeworfenen Strahles. Man verlängere den einfallenden Strahl, bis er den zum zweiten Male zurückgeworfenen in *H* durchschneidet, so erhält man ein Dreieck *FGH*; in diesem hat man

$$FHG = EFG - FGH$$
$$= 2KFG - 2FGL.$$

Die beiden Einfallslothe bilden, wenn sie gehörig verlängert werden, ebenfalls ein Dreieck *FLG*, in welchem $FLG = KFG - FGL$ wird. Hieraus folgt sogleich

$$FHG = 2FLG,$$

und da der Winkel, den die Einfallslothe mit einander bilden, nothwendig eben so gross ist als der Winkel der Ebenen auf denen sie errichtet sind, so giebt der Winkel *FLG* die Neigung der beiden Spiegel gegen einander an, und wir schliessen hieraus, dass wenn ein Strahl von zwei Spiegeln, die auf der Ebene in welcher der Strahl und ein Einfallsloth liegt, senkrecht stehen, zurückgeworfen wird, so ist der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem zweimal reflectirten bildet, doppelt so gross, als der Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander.

§. 527.

Bringt man nun auf einen getheilten Gradbogen *ABC* (fig. 19.), dessen Mittelpunkt sich in *B* befindet, zwei Spiegel an, einen grössern *DE* der ganz mit Folie belegt, und mit dem Lineal *BH* (der Alhidade) welches sich um den Mittelpunkt *B* drehen lässt, fest verbunden ist, und einen kleinern *FG* welcher eine unveränderliche Lage hat, aber blos auf der unteren Hälfte foliirt ist, damit man durch den obern Theil die dahinter befindlichen Gegenstände zu Gesichte bekommen kann, so erhält man ein Instrument, welches der Spiegelsextant heisst und zuerst von Hadley angegeben wurde. Beide Spiegel müssen senkrecht

auf der Ebene des Kreisausschnitts stehen, so wie auch die nach dem unbeweglichen kleinern Spiegel gerichtete Axe des Fernrohrs *KL*, welches man des deutlichern Sehens der Gegenstände und ihrer durch die Spiegel zurückgeworfenen Bilder wegen am Sextanten anbringt, mit der Ebene des Sextanten parallel liegen muss. Um nun zu zeigen wie man vermittelst eines solchen Instruments den Winkel, welchen die von zwei Gegenständen nach dem Auge gezogenen Gesichtslinien mit einander bilden, d. h. ihren scheinbaren Abstand von einander messen kann, sey (fig. 20.) *FG* der kleine Spiegel, *KL* eine mit einer Oeffnung versehene Platte, die man an die Stelle des Fernrohrs setzen kann, in *O* das Auge, welches den Gegenstand *M* durch den unbelegten Theil des Spiegels *FG* nach der Richtung *MO* sieht; der grössere Spiegel *DE* werde nun um *B* so lange gedreht, bis der auf ihn fallende Strahl *MB* nach *BG* zurückgeworfen, und von dem belegten untern Theile des kleinern Spiegels *FG* von neuem nach *GO* reflectirt wird, dann wird sowohl der Gegenstand *M* selbst, als auch sein durch zweimalige Zurückwerfung entstandenes Bild nach der Richtung *MO* gesehen werden. Man bemerke die Anzahl Grade, Minuten u. s. w., welche die am Spiegel *DE* angebrachte Alhidade auf dem Gradbogen zeigt. Nun sey *N* ein zweiter Gegenstand der einen Strahl *NB* auf den grössern Spiegel wirft; dreht man denselben in die Lage *D'E'*, so dass der Winkel $D'BN = GBE'$ wird, so verfolgt der in *B* zurückgeworfene Strahl *NB* den Weg *BG*, wo er in *G* von neuem reflectirt in der geraden Linie *GO* wie vom Gegenstande *M* ins Auge *O* gelangt. Bemerkt man in dieser Lage des Spiegels die Anzahl Grade u. s. w., welche die Alhidade angiebt, so zeigt der Unterschied dieser Angabe von der in der frühern Lage den Winkel an, um welchen der Spiegel gedreht worden ist, d. h. den Winkel *DBD'*. Sind ferner *BP*, *BP'* die Einfallslothe auf den grössern Spiegel in seine beiden Lagen *ED*, *E'D'*, so ist der Winkel *PBP'* bekanntlich gleich dem Winkel *DBD'*. Vermöge des erwähnten Gesetzes der Zurückwerfung des Lichts ist auch

$$\angle NBG = 2\angle GBP'$$
$$\angle MBG = 2\angle GBP$$
$$\overline{NBG - MBG = 2GBP' - 2GBP.}$$

Es ist aber, wie man aus der Figur sieht

$$NBG - MBG = MBN$$
$$GBP' - GBP = PBP'$$
$$\overline{MBN = 2PBP' = 2DBD',}$$

folglich ist der Winkel, um welchen der Spiegel gedreht wurde, halb so gross als der scheinbare Abstand *MBN* der beiden Gegenstände. Ist daher der Gradbogen nach der gewöhnlichen Art getheilt, so giebt der doppelte auf dem Gradbogen in beiden Lagen der Alhidade abgelesene Winkel den gesuchten Winkel an. Um aber diese Verdoppelung zu vermeiden, pflegt man die Theilung nur halb so gross zu machen, so dass der Vollkreis nach dieser Art zu theilen 720° erhalten würde. Die angeführte doppelte Ablesung auf den Gradbogen kann man dadurch vermeiden, wenn man den Spiegel *FG* durch die an denselben befindlichen Schrauben gleich so stellt, dass wenn der direct gesehene Gegenstand *M* mit seinem durch doppelte Zurückwerfung gesehenem Bilde zusammenfällt, die Alhidade auf Null der Theilung steht. Dies findet gewöhnlich schon sehr nahe statt, und wenn man die Abweichung der Stellung vom Nullpunkte der Theilung nicht völlig corrigiren kann oder will, so muss man dieselbe durch eine Beobachtung bestimmen. Man nennt diese Abweichung den Fehler des Index, und da dieselbe auch jenseits des Nullpunktes der Theilung fallen kann, so ist gewöhnlich die Theilung noch einige Grad jenseits des Nullpunktes festgesetzt. Am bequemsten bedient man sich der Sonne um den Fehler des Index auszumitteln, und da man leichter die Berührung als die Deckung der beiden Sonnenbilder zu Wege bringen kann, so misst man den Durchmesser der Sonne dadurch, dass man zuerst den westlichen Rand der Sonne mit dem östlichen des Bildes in Berührung bringt, und dann den östlichen Rand der Sonne selbst mit dem westlichen des Bildes. Ergiebt sich bei der Ablesung in beiden Fällen eine und dieselbe Grösse, so ist der Fehler des Index Null; ausserdem wird

der Fehler durch den halben Unterschied beider Winkel ausgedrückt.

§. 528.

Bei der Anwendung des Spiegelsextanten zur Messung von Höhen der Sterne oder der Sonne über dem Horizont, bedient man sich zur See des natürlichen Horizontes den das Meer an der Gränze des Gesichtskreises darbietet; allein bei Messungen der Höhen auf dem Lande, wo dem Beobachter dieses Hülfsmittel entgeht, wenn er sich nicht auf weit ausgedehnten Ebenen die der Meeresfläche gleichen, wie dies in Südamerica und den Sandwüsten Africas der Fall ist, befindet, muss man sich eines künstlichen Horizonts bedienen. Dieses erhält man dadurch, dass man irgend eine Flüssigkeit, am besten Quecksilber, in ein weites Gefäss gisst, da ihre Oberflächen durch die Wirkung der Schwere von selbst eine völlig horizontale Lage annehmen. Es sey z. B. AB die Oberfläche (fig. 21.) der Flüssigkeit, in M der Gegenstand, in O der Beobachter, MN ein auf die Oberfläche der Flüssigkeit fallender und nach NO zurückgeworfener Strahl, so misst man den Winkel MON, den die nach dem Beobachter vom Gegenstande gezogene Gesichtslinie mit dem zurückgeworfenen Strahl macht. Man hat im Dreieck MNO

$$MN : MO = \sin MON : \sin MNO.$$

Vermöge des Gesetzes der Zurückwerfung ist aber

$$MNA = ONB$$
$$MNO = 180° - 2MNA$$

also lässt sich vorige Proportion auch so schreiben:

$$MN : MO = \sin MON : \sin 2MNA.$$

Nähert sich also das Verhältniss der Entfernungen MN, MO der Einheit, wie dieses bei der Beobachtung aller Himmelskörper statt findet, da bei diesen die Entfernung des Beobachters vom künstlichen Horizont gegen die Entfernung des Himmelskörpers von demselben eine unendlich kleine Grösse ist, so wird auch das Verhältniss der Sinus von MON und $2MNA$ sich der Einheit nähern, und für die Himmelskörper kann man ohne Fehler $MON = 2MNA$ setzen. Nun ist aber der Winkel MNA nichts anders

als die Höhe des Gegenstandes über dem Horizont, folglich giebt der gemessene Winkel zwischen dem Object selbst und seinem vom künstlichen Horizont zurückgeworfenen Bilde die doppelte Höhe an. Man muss sich hierbei in Acht nehmen, dass der Einfallspunkt des Strahls N nicht zu nahe an den Rand des Gefässes fällt, weil daselbst durch die Capillaranziehung desselben die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit gestört wird, und daher die Voraussetzung, dass ANM die Höhe des Gegenstandes sey, nicht mehr gilt. Um den Luftzug von der Oberfläche des Quecksilbers abzuhalten, und dadurch die wellenförmige Gestalt seiner Oberfläche zu verhüten, die die Beobachtung stören würde, da das reflectirte Bild undeutlich erscheint, pflegt man über das Gefäss ein gläsernes Dach zu setzen, welches aus zwei rechtwinklicht zusammengefügten Glasplatten besteht. Es ist einleuchtend, dass die Seitenflächen dieser Glasplatten genau parallel seyn müssen, wenn nicht durch dieselbe eine Ablenkung des Lichtstrahls hervorgebracht werden soll. Man kann leicht berechnen wie gross der Fehler ist der durch die Abweichung der Flächen des Glases vom Parallelismus hervorgebracht wird. Es seyen (fig. 22.) $ABCD$, $BEFC$ die beiden Durchschnitte der Glastafeln senkrecht auf die Oberfläche des künstlichen Horizonts AE. Die äussern Winkel BAD, BEF nehmen wir zu 45° an, so wie den Winkel ABE zu 90°. Ferner sey

$$CDF = 45 + \varepsilon; \quad CFD = 45 = \varepsilon',$$

wo also ε, ε' die Winkel anzeigen, welche die Flächen der Glastafeln mit einander bilden, und die jedenfalls immer sehr klein sind. Das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels aus Luft in Glas, nehmen wir wie 3 : 2 an. Nun sey GH ein von einem unendlich entfernten Gegenstande herkommender Lichtstrahl, der in H das Glas trifft, die wahre Höhe desselben $= h$, KH das Einfallsloth, HL der gebrochene Strahl, so ist $GHK = h - 45°$, und vermöge der bekannten Gesetze der Brechung des Lichts, dass der Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels immer in einem constanten Verhältniss steht, hat man die Proportion

$$\sin(h - 45) : \sin MHL = 3 : 2.$$

Der gebrochene Strahl tritt in L wieder aus dem Glase in die Luft über, und nimmt den Weg LN wo er in N die Flüssigkeit trifft; ist daher PLO das an diesem Punkte statt findende Einfallsloth, so hat man

$$\sin HLP : \sin OLN = 2 : 3.$$

Nun ist aber, wie man leicht sieht, wenn man die beiden Einfallslothe gehörig verlängert

$$HLP = MHL + \varepsilon$$
$$OLN = CLN - 90$$
$$= DNL + LND - 90$$

und wenn man den Winkel DNL durch h' bezeichnet, und bedenkt, dass $LDN = CDF = 45^\circ + \varepsilon$ ist

$$OLN = h' + \varepsilon - 45^\circ.$$

Setzt man diese Werthe in die Proportion

$$\sin HLP : \sin OLN = 2 : 3$$

so erhält man

$$\sin(MHL + \varepsilon) : \sin(h' + \varepsilon - 45) = 2 : 3.$$

Entwickelt man diese Proportion, indem man die höhern Potenzen des Winkels ε vernachlässigt, so kommt

$$\sin MHL + \varepsilon. \cos MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h' - 45)$$
$$+ \tfrac{2}{3} \varepsilon. \cos(h' - 45)$$

und wenn man hiervon die früher gefundene in eine Gleichung verwandelte Proportion abzieht, nämlich diese:

$$\sin MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h - 45)$$

so bleibt

$$\varepsilon. \cos MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h' - 45) + \tfrac{2}{3} \cos(h' - 45). \varepsilon$$
$$- \tfrac{2}{3} \sin(h - 45).$$

Da ferner die Winkel h', h unter den gemachten Voraussetzungen auch nur wenig von einander abweichen, so darf man $h' = h + \delta h$ setzen, wo die höhern Potenzen von δh so wie das Product $\varepsilon. \delta h$ vernachlässigt werden können. Hierdurch wird dann

$$\varepsilon. \cos MHL = \tfrac{2}{3} \cos(h - 45) \; [\delta h + \varepsilon].$$

Aus der Gleichung $\sin MHL = \tfrac{2}{3} \sin(h - 45)$ ergiebt sich sogleich

$$\cos MHL = \sqrt{[1 - \tfrac{4}{9} \sin(h - 45)^2]}$$

also auch wenn man diesen Werth in vorige Gleichung substituirt

$$\delta h = \varepsilon \; [\tfrac{3}{2} \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9} \tang(h - 45)^2]} - 1]$$

indem man nämlich

$$\frac{1 - \frac{4}{9}\,sin(h - 45)^2}{cos(h - 45)^2} = 1 + \tfrac{5}{9}\,tang(h - 45)^2$$

setzen kann. Der in N auf die Oberfläche der Flüssigkeit fallende Strahl wird daselbst unter einem seinem Einfallswinkel gleichen Winkel zurückgeworfen, trifft dann die Glasplatte $BEFC$, in welcher er gebrochen wird, und dann zum zweiten Mal gebrochen wieder in die Luft austritt, und so ins Auge des Beobachters gelangt. Man kann also um den weitern Weg des Strahls von N aus zu finden, die Rechnung auf die vorige Weise fortsetzen, allein eine leichte Ueberlegung zeigt, dass man aus den obigen Formeln sehr schnell das Endresultat sogleich ohne weitere Rechnungen finden kann. Nennt man nämlich den Winkel, welchen der zuletzt ausfahrende Strahl mit der Oberfläche der Flüssigkeit macht h^0, so kann man ebenfalls $h' = h^0 + \delta h^0$ setzen, und man wird aus voriger Formel, welche den Werth von δh ausdrückt, den Werth von δh^0 finden, indem man darin für h, h^0 und für ε, ε' substituirt, da wir angenommen haben, dass die Neigung der Seitenflächen der zweiten Glastafel $= \varepsilon'$ seyn soll. Hierdurch erhält man

$$\delta h^0 = \varepsilon' [\tfrac{3}{2} \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tang(h^0 - 45)^2]} - 1].$$

Nun hatten wir aber die Gleichungen

$$h' = h + \delta h; \quad h' = h^0 + \delta h^0;$$

folglich wenn man beide von einander abzieht

$$h^0 - h = \delta h - \delta h^0.$$

Substituirt man hierin die für δh und δh^0 gefundenen Werthe, so kommt

$$\begin{aligned} h^0 - h = {} & \varepsilon' - \varepsilon \\ & + \tfrac{3}{2} \varepsilon \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tang(h - 45)^2]} \\ & - \tfrac{3}{2} \varepsilon' \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tang(h^0 - 45)^2]}. \end{aligned}$$

Man setze $h^0 - h = x$, also $h^0 = h + x$, wo x eine sehr kleine Grösse seyn wird, so erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tg(h^0 - 45)^2]} &= \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tg(h + x - 45)^2]} \\ &= \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tg(h - 45)^2 + \tfrac{10}{9}\, x \frac{sin(h - 45)}{cos(h - 45)^3}]} \\ &= a + \tfrac{5}{9} x. \frac{sin(h - 45)}{a. cos(h - 45)^3} \end{aligned}$$

indem man der Kürze wegen

$$a = \sqrt{[1 + \tfrac{5}{9}\, tang(h - 45)^2]}$$

nimmt. Die obige Gleichung wird daher, wenn man bedenkt, dass das Product $\varepsilon' x$ vernachlässigt werden muss

$$x = (\varepsilon' - \varepsilon)\,(1 - \tfrac{3}{2}\,a)$$

also der Winkel, den der zuletzt ausfahrende Strahl mit der Oberfläche der Flüssigkeit bildet h°

$$= h + (\varepsilon' - \varepsilon)\,(1 - \tfrac{3}{2}\,a).$$

Da wir den Gegenstand als unendlich entfernt gegen den Abstand des Auges vom künstlichen Horizont angenommen haben, so wird der Winkel, den die vom Gegenstande nach dem Beobachter gezogene Linie mit dem Horizont macht, auch durch h ausgedrückt, also beträgt der Winkel, den der zurückgeworfene Strahl mit dem direct vom Gegenstande kommenden macht

$$2h + (\varepsilon' - \varepsilon)\,(1 - \tfrac{3}{2}\,a),$$

den man für die doppelte Höhe annehmen muss. Die einfache Höhe wird daher

$$h + (\varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

folglich wird dieselbe durch den Mangel des Parallelismus der Seitenflächen um den Winkel

$$(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

vergrössert. Man kann diesen Fehler dadurch vermeiden, dass man die Beobachtung wiederholt, nachdem das Dach umgedreht worden ist, wodurch die Glasplatte, deren Seitenflächen die Neigung ε' besitzen, dem vom Gegenstande einfallendem Lichte zugewendet wird. Denn man hat dann die Höhe

$$h + (\varepsilon - \varepsilon')\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

welches zu der zuerst beobachteten

$$h + (\varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2 - 3a}{4}\right)$$

addirt, blos $2h$ giebt, so dass man um die wahre Höhe zu erhalten, nur aus den beiden durch fehlerhafte Glasplatten gemachten Beobachtungen, das arithmetische Mittel zu nehmen braucht.

Man darf jedoch dabei nicht vergessen, bei der Beobachtung solcher Gegenstände, deren Höhe veränderlich ist, wie dies bei allen Himmelskörpern statt

findet, die zweite beobachtete Höhe erst nach den so oft angegebenen Methoden vermittelst der zwischen beiden Beobachtungen verflossenen Zeit, auf eine mit der ersten gleichzeitig genommene zu reduciren. Zugleich bestimmt sich aus einer solchen Beobachtung die Grösse $\varepsilon' - \varepsilon$, die man dann für alle folgenden Beobachtungen als bekannt ansehen kann, und hierdurch die Umkehrung des gläsernen Daches vermeidet.

Man erhält einen künstlichen Horizont auch dadurch, dass man eine sehr eben geschliffene und mit genau parallelen Seiten versehene Glasplatte auf dem Quecksilber schwimmen lässt, die auf diese Art einen gewöhnlichen mit Quecksilberfolie belegten Glasspiegel darbietet. Diese Art den künstlichen Horizont zu bilden würde sehr vortheilhaft seyn, da alle wellenförmigen Bewegungen der Oberfläche, die das Quecksilber vermöge des Luftzuges oder anderer Erschütterungen annehmen könnte, durch die aufliegende Glasplatte verhindert werden; allein man kann selten gewiss seyn, dass die reflectirende Glasfläche eine wirklich genaue horizontale Lage besitzt, wenn auch die einzelnen Seitenflächen der Glasplatte völlig eben und unter einander parallel sind, da sehr leicht Luftblasen zwischen das Quecksilber und die aufgelegte Glasplatte eintreten können, und ausserdem das Glas selten von einer gleichförmigen Dichtigkeit ist, welcher Umstand doch sehr erforderlich ist, wenn eine ganz vollkommen geschliffene Glasplatte eine horizontale Lage annehmen soll, sobald sie in einer Flüssigkeit schwimmt. Man kann freilich auch hierbei den im gemessenen Winkel durch die nicht horizontale Lage der reflectirenden Fläche entstehenden Fehler dadurch aufheben, dass man das ganze Gefäss mit dem Quecksilber und der darauf schwimmenden Glasplatte umdreht, und den Winkel von neuem beobachtet, den der reflectirte Strahl mit dem vom Gegenstande direct herkommenden bildet. Nimmt man dann aus beiden Messungen das arithmetische Mittel, so erhält man die wahre von dem Fehler des unrichtigen künstlichen Horizontes befreiete Höhe.

Endlich kann man einen künstlichen Horizont auch noch dadurch darstellen, dass man einen ge-

wöhnlichen Planspiegel vermittelst einer Libelle in horizontale Lage bringt. Gewöhnlich bedient man sich dazu einer runden Platte aus rothem oder blauem Glase, die auf der einen Seite matt geschliffen ist, und auf einem Teller von Holz oder Marmor liegt, auf dem sich die Glasplatte durch Hülfe dreier Schrauben und der Libelle in eine horizontale Lage bringen lässt. Da nämlich eine Ebene horizontal ist, wenn zwei in ihr gezogene Linien eine horizontale Lage haben, so braucht man nur die Libelle zuerst so auf die Glasplatte zu setzen, dass eine durch zwei Schrauben gezogene Linie mit der Axe der Libelle parallel läuft. Bringt man dann vermittelst dieser zwei Schrauben die Luftblase der Libelle genau in die Mitte, so ist man sicher, dass diese Linie sowohl als auch jede mit ihr in der Ebene parallel gezogene, eine genaue horizontale Lage hat. Setzt man hierauf die Libelle in eine gegen die erste Lage senkrechte Stellung auf die Glasplatte, so zeigt die Luftblase ob die Ebene schon horizontal ist oder nicht. Befindet sich die Luftblase noch nicht in der Mitte der Libelle, so senkt oder hebt man vermittelst der dritten Schraube die Glasplatte so lange, bis die Luftblase in die Mitte tritt, wodurch die Ebene dann in eine horizontale Lage gebracht seyn wird. Es ist aber hierbei sehr anzurathen, dass man, vorzüglich bei der Beobachtung von Sonnenhöhen, öfters untersucht, ob die Platte noch ihre horizontale Lage beibehalten hat, weil durch die Erwärmung derselben vermittelst der Sonnenstrahlen, eine Ausdehnung und öfters eine Aenderung ihrer Lage hervorgebracht wird.

§. 529.

Wir wollen nun noch einige Untersuchungen über die Bestimmung der Lage der Oerter auf der Erde durch geodätische Operationen anstellen, und dabei vorzüglich die eigentliche Gradmessung berücksichtigen. Um ein Stück eines Meridianbogens zu bestimmen, würde es am einfachsten seyn, die Entfernung zwischen zwei Oertern, die einerlei geographische Länge haben, wirklich mit Stäben auszumessen, allein diese Methode würde bei grossen Stücken des

Meridians unausführbar seyn, da es hierzu durchaus erforderlich ist, dass man von dem einen Endpunkte des Bogens den andern sehen könnte. Man muss daher einen anderen Weg einschlagen, der darin besteht, dass man die in der Nähe des durch den ersten Anfangspunkt der Messung gezogenen Meridians befindlichen Punkte durch Dreiecke mit einander verbindet, bis die ganze Reihe von Dreiecken sich über einen beträchtlichen Theil des Meridians erstreckt. Wäre z. B. *A* (fig. 23.) der nördlichste Anfangspunkt der Messung, und *F* der südlichste, *AM* der durch *A* gezogene Meridian, so kann man *A* mit *F* durch die Dreiecke *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF* verbinden; ist dann in dem Dreieck *ABC* eine Seite *AB* nebst den Winkeln der Dreiecke gemessen, so kann man daraus nach und nach alle einzelnen Seiten berechnen, wodurch die Entfernungen aller einzelnen Punkte von einander bekannt werden. Eigentlich hätte man nur nöthig in jedem Dreieck blos zwei Winkel zu messen, allein es ist besser, dass man wirklich alle drei misst, damit man die bei der Messung etwa begangenen Fehler leichter entdecken und verbessern kann. Denkt man sich dann durch die Punkte *C*, *E*, *F* die Parallelkreise *CC'*, *EE'*, *FF'* gezogen, so lassen sich dieselben vermöge des gemessenen Azimuths berechnen, und ihre Summe

$$CC' + EE' + FF' = AF'$$

giebt dann die Länge des Meridianbogens der zwischen zwei Oertern enthalten ist, von denen der eine die in *A*, der andere die in *F* statt findende Polhöhe hat. Dass beide Oerter *A* und *F* nicht unter einerlei Meridian liegen, thut nichts zur Sache, denn der Punkt *F'*, in welchem der durch *F* gelegte Parallelkreis den Meridian *AM* schneidet, muss nothwendigerweise dieselbe Polhöhe besitzen, als der Punkt *F*.

§. 530.

Wir wollen nun annehmen, es seyen in dem Dreieck *ABC* die drei Winkel gemessen, nebst der Seite $BC = a$; die drei Winkel bezeichnen wir durch die an die Dreieckspunkte gesetzten Buchstaben, und die Seiten durch die kleinen Buchstaben, welche den

gegenüberstehenden Seiten correspondiren. Wegen der Kleinheit des Dreiecks gegen die ganze Erdoberfläche genommen, wird es uns erlaubt seyn, jedes einzelne Dreieck als ein sphärisches zu betrachten, und nach dieser Voraussetzung die Rechnung zu führen. Nennt man dann den Halbmesser der Kugel, von welcher dieses Dreieck einen Theil ausmacht, r, so hat man nach den bekannten sphärisch - trigonometrischen Formeln zur Berechnung der Länge b und c die Formeln

$$\sin\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r}.\ \frac{\sin C}{\sin A},$$

$$\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}.\ \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Da aber das Verhältniss $\frac{c}{r}$, $\frac{a}{r}$ immer sehr klein ist, so darf man mit Vernachlässigung aller Potenzen die den Cubus übersteigen

$$\frac{c}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{r^3} = \sin\frac{c}{r},$$

$$\frac{a}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{a^3}{r^3} = \sin\frac{a}{r}$$

setzen, so dass die erste Formel auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{c}{r} - \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{r^3} = \frac{a}{r}.\ \frac{\sin C}{\sin A} - \tfrac{1}{6}.\frac{a^3}{r^3}.\ \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Man nehme nun

$$c = a.\ \frac{\sin C}{\sin A} - a^3\frac{u}{r^2}$$

wo u ein noch zu bestimmender Coefficient ist, der weder von c noch von a abhängt. Durch diese Annahme wird

$$\frac{c}{r} - \tfrac{1}{6}.\frac{c^3}{r^3} = \frac{a}{r}.\ \frac{\sin C}{\sin A} - a^3\frac{u}{r^3}$$
$$- \tfrac{1}{6}\frac{a^3}{r^3}.\ \frac{\sin C^3}{\sin A^3}$$

und da der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Ausdruck auch

$$= \frac{a}{r} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{r^3} \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$$

seyn soll, so erhält man zur Bestimmung der Grösse u die Gleichung

$$u + \tfrac{1}{6} \frac{\sin C^3}{\sin A^3} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$u = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} \cdot \frac{\sin A^2 - \sin C^2}{\sin A^2}$$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\sin C \cdot \sin(A + C)\,(\sin A - C)}{\sin A^3}$$

also hieraus, wenn man diesen Werth in die für C angenommene Gleichung substituirt

$$c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{aa}{rr} \, \frac{\sin(A + C) \cdot \sin(A - C)}{\sin A^2}\right].$$

Nun setze man

$$c = a \cdot \frac{\sin(C - \varepsilon)}{\sin(A - \varepsilon)}$$

wo ε eine sehr kleine Grösse von der Beschaffenheit ist, dass sie der ersten Gleichung zwischen c und a Genüge leistet. Um sie zu bestimmen, hat man mit Vernachlässigung der Potenzen von ε

$$\frac{\sin(C - \varepsilon)}{\sin(A - \varepsilon)} = \frac{\sin C - \varepsilon \cdot \cos C}{\sin A - \varepsilon \cdot \cos A}$$

$$= \frac{\sin C}{\sin A} \cdot \frac{1 - \varepsilon \cdot \cot C}{1 - \varepsilon \cdot \cot A}$$

$$= \frac{\sin C}{\sin A} [1 - \varepsilon \cdot \cot C + \varepsilon \cdot \cot A].$$

Die Grösse ε muss daher der Gleichung

$$\tfrac{1}{6} \cdot \frac{aa}{rr} \cdot \frac{\sin(A + C) \cdot \sin(A - C)}{\sin A^2} = \varepsilon\,(\cot C - \cot A)$$

Genüge leisten. Bemerkt man nun dass

$$\cot C - \cot A = \frac{\sin(A - C)}{\sin A \cdot \sin C},$$

so bleibt

$$\varepsilon = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{aa}{rr} \cdot \frac{\sin(A + C) \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Aus der sphärischen Trigonometrie ist ferner bekannt, dass der Ueberschuss der Summe der drei Winkel des Dreiecks über 180°, oder der sphärische Excess immer sich zu zwei rechten Winkeln verhält, wie die Fläche des Dreiecks zum Quadranten der Kugeloberfläche. Bezeichnet man also die Fläche des Dreiecks durch Δ, und bedenkt, dass der Quadrant der Kugelfläche der Fläche des grössten Kreises derselben, also πrr gleich ist, so hat man die Proportion

$$A + B + C - \pi : \pi = \Delta : \pi rr$$

also hieraus

$$A + B + C - \pi = \frac{\Delta}{rr}.$$

Sucht man nun aber den Inhalt des Dreiecks ABC aus der Seite a und den Winkeln A, C, indem man dasselbe als geradlinigt betrachtet, so kommt

$$\Delta = \frac{aa}{2} \cdot \frac{\sin(A + C) . \sin C}{\sin A}$$

$$A + B + C - \pi = \frac{aa}{2rr} \cdot \frac{\sin(A + C) . \sin C}{\sin A}.$$

Man sieht hieraus, dass die oben durch ε bezeichnete Grösse nichts anders als $\frac{A + B + C - \pi}{3}$ ist, also den dritten Theil des sphärischen Excesses ausdrückt. Man erhält hieraus folgende Regel: Um die Seiten eines sphärischen Dreiecks, dessen Dimensionen gegen die ganze Kugeloberfläche nur klein sind, aus einer gemessenen zu finden, behandle man dasselbe als ein geradlinigtes ebenes Dreieck, indem man von jedem der Winkel den dritten Theil des sphärischen Excesses abzieht. Diese Regel ist zuerst von **Legendre** angegeben worden.

§. 531.

Um zu zeigen wie diese Regel mit der genauen Berechnung übereinstimmt, wollen wir ein Dreieck fingiren, dessen Seiten bedeutend grösser sind, als je eine bei allen geodätischen Operationen vorkommen kann; es sey nämlich

$$a = 2°, \quad b = 2° \, 30', \quad c = 2° \, 40'.$$

Aus diesen Annahmen ergiebt sich zuerst

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b-c) \sin \tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b . \sin c}}$$

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2}(a+b-c) &= 8.2040703 \\
\sin \tfrac{1}{2}(a-b+c) &= 8.2766136 \\
C. \sin b &= 1.3603204 \\
C. \sin c &= 1.3323107 \\
&\overline{\quad 9.1733150 \quad} \\
&\overline{\quad 9.5866575 \quad} = \sin \tfrac{1}{2} A \\
&\overline{\quad 22^\circ\ 42'\ 34''96 \quad} = \tfrac{1}{2} A \\
A &= 45^\circ\ 25'\ \ 9''92 \\
B &= 62.\ 54.\ \ 7,22 \\
C &= 71.\ 43.\ 12,43 \\
A + B + C &= 180.\ \ 2.\ 29,57
\end{aligned}$$

also der sphärische Excess $= 2'\ 29''57$. Wollen wir also dies Dreieck als ein ebenes behandeln, so müssen wir von jedem der drei Winkel

$$\frac{2'\ 29''57}{3} = 49''86$$

abziehen. Dann hat man

$$\begin{aligned}
A &= 45^\circ\ 24'\ 20''06 \\
B &= 62.\ 53.\ 17,36 \\
C &= 71.\ 42.\ 22,57
\end{aligned}$$

und statt der Längeneinheit für die Seiten, kann man die Secunde annehmen, wodurch $a = 7200''$ wird. Berechnet man dann die Seite b und c, so findet sich

$$\begin{aligned}
b &= 9000''006 \\
c &= 9600,006
\end{aligned}$$

also ist der Unterschied auch bei diesem so grossen Dreieck ganz unmerklich. Da die Secunde auf der Erdoberfläche ungefähr 16 Toisen ausmacht, so würde man die Seiten nur um ungefähr einen Zoll zu gross gefunden haben.

§. 532.

Um nun die Seite $\overset{\frown}{AC'}$ auf den Meridian zu reduciren, muss man das Azimuth des Ortes C oder den Winkel CAC' kennen, den wir durch N bezeichnen wollen. In P sey der Pol in welchem sich die

Meridiane AP, CP durchschneiden (fig. 23.), so hat man im Dreieck PAC die Relation

$$\cos PC = \cos AP.\cos AC + \sin AP.\sin AC.\cos PAC.$$

Nun sey die Polhöhe von A durch p ausgedrückt, so wird $AP = 90° - p$, $AC = \frac{b}{r}$, wo b die Länge der Seite AC, und r den Halbmesser der Kugel, auf welcher das Dreieck PAC liegt, in demselben Maasse angegeben anzeigt, $PAC = 180 - N$; ferner bezeichne man die Polhöhe des Ortes C durch $p - \frac{m}{r}$, indem wir annehmen dass C südlicher als A liegt, so wird $PC = 90° - p + \frac{m}{r}$, und der Unterschied $PC - AP = \frac{m}{r}$ giebt den Bogen AC' des Meridians an, wenn man den Halbmesser der Kugel als die Einheit ansieht. Eben so wird dann m selbst die lineare Länge in demselben Maasse, in welchem die Seiten des Dreiecks angegeben sind, des Meridianbogens AC' ausdrücken, also die verlangte reducirte Länge gefunden seyn. Setzt man alle diese angegebenen Werthe in die Gleichung

$$\cos PC = \cos AP.\cos AC + \sin AP.\sin AC.PAC$$

so kommt

$$\sin(p - \frac{m}{r}) = \sin p.\cos\frac{b}{r} - \cos p.\sin\frac{b}{r}\cos N$$

oder wenn man entwickelt, und die Potenzen welche das Quadrat von $\frac{m}{r}$ und $\frac{b}{r}$ übersteigen, vernachlässigt

$$\sin p\,(1 - \frac{mm}{2rr}) - \frac{m}{r}\cos p$$
$$= \sin p\,(1 - \frac{bb}{2rr}) - \frac{b}{r}\cos p.\cos N.$$

Man setze nun

$$m = b\cos N + \frac{bb}{r}v$$

wo v ein von m und b unabhängiger Coefficient ist, und substituire diesen Werth in obige Gleichung zwischen m und b, die sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{mm}{2rr}\, tang\, p + \frac{m}{r} = \frac{bb}{2rr}\, tang\, p + \frac{b}{r} \cos N$$

so kommt

$$\frac{mm}{2rr}\, tang\, p + \frac{m}{r}$$

$$= \frac{b}{r} \cos N + \frac{bb}{rr} v + \frac{bb}{2rr} \cos N^2\, tang\, p.$$

Da der hintere Theil dieser Gleichung mit

$$\frac{b}{r} \cos N + \frac{bb}{2rr}\, tang\, p$$

identisch seyn muss, so folgt daraus zur Bestimmung von v:

$$\tfrac{1}{2}\, tang\, p = v + \tfrac{1}{2} \cos N^2\, tang\, p$$

$$v = \tfrac{1}{2}\, tang\, p.\ \sin N^2$$

folglich

$$m = b. \cos N + \frac{bb}{2r}\, tang\, p.\ \sin N^2.$$

Man bestimme nun einen Winkel δN, so dass

$$\cos(N - \delta N) = \cos N + \frac{b}{2r}\, tang\, p.\ \sin N^2$$

wird, so hat man ebenfalls

$$m = b. \cos(N - \delta N).$$

Um δN zu finden, entwickele man $\cos(N - \delta N)$, so kommt

$$\cos(N - \delta N) = \cos N + \delta N.\ \sin N$$

$$= \cos N + \frac{b}{2r}\, tang\, p.\ \sin N^2.$$

folglich wird

$$\delta N = \frac{b}{2r}.\ tang\, p.\ \sin N.$$

§. 533.

Das Stück des Parallelkreises CC' lässt sich folgendermassen bestimmen. Man setze den Winkel $APC = \alpha$, so ist der Winkel, den der Parallelkreis an der Axe der Kugel bildet $= \alpha$, und der Halbmesser des Parallelkreises $= r.\ \sin CP = r.\ \sin(90 - p$

$+\frac{m}{r}) = r. \cos(p - \frac{m}{r})$, also die lineare Länge des Bogens CC', die wir durch n bezeichnen wollen

$$n = \alpha. r. \cos(p - \frac{m}{r}).$$

Nun verhält sich aber im Dreieck APC

$$\sin APC : \sin AC = \sin PAC : \sin PC$$

oder

$$\sin\alpha : \sin\frac{b}{r} = \sin(180 - N) : \cos(p - \frac{m}{r})$$

folglich

$$\sin\alpha = \sin\frac{b}{r} . \frac{\sin N}{\cos(p - \frac{m}{r})}$$

oder wenn man $\sin\alpha$ und $\sin\frac{b}{r}$ entwickelt,

$$\alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3 = \left(\frac{b}{r} - \tfrac{1}{6} . \frac{b^3}{r^3}\right) . \frac{\sin N}{\cos(p - \frac{m}{r})} .$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$\alpha = \frac{b}{r} . \frac{\sin N}{\cos(p - \frac{m}{r})}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\frac{b^3}{r^3} . \frac{\sin N}{\cos(p - \frac{m}{r})}\left(\frac{\sin N^2}{\cos(p - \frac{m}{r})^2} - 1\right)$$

also auch, da $n = \alpha r. \cos(p - \frac{m}{r})$ ist

$$n = b. \sin N + \tfrac{1}{6} b \frac{bb}{rr} \sin N\left(\frac{\sin N^2}{\cos(p - \frac{m}{r})^2} - 1\right).$$

§. 534.

Das Azimuth der Seiten des Dreiecks gegen die durch die andern Winkelpunkte gelegten Meridiane, werden auf folgende Art berechnet. Da die Verlän-

gerung des Bogens PC durch Q den südlichen Meridian des Ortes C angiebt, so wird der Winkel $ACQ + 180^\circ$ oder der Winkel $360^\circ - ACP$ das Azimuth des Punktes A von C aus seyn. Man pflegt nämlich die Azimuthe vom südlichen Theile des Meridians aus nach Westen zu von Null bis 360° zu zählen, wo man dann nicht nöthig hat anzugeben, ob das Azimuth westlich oder östlich ist, welches in dem Falle, dass man nur bis 180° zählte, erforderlich seyn würde. Es ist nun im Dreieck PAC

$$\sin PAC : \sin PC = \sin ACP : \sin AP$$

oder wenn man den Winkel ACP durch N' bezeichnet, und bemerkt, dass $PAC = 180 - N$, $AP = 90 - p$, $PC = 90 - p + \frac{m}{r}$ ist

$$\sin N : \cos(p - \frac{m}{r}) = \sin N' : \cos p$$

und hieraus folgt

$$\sin N' = \frac{\sin N . \cos p}{\cos(p - \frac{m}{r})}.$$

Setzt man statt N', $N - (N - N')$, so wird, wenn man entwickelt

$$\sin N \cos(N - N') - \cos N . \sin(N - N') = \frac{\sin N}{\cos\frac{m}{r} + \operatorname{tang} p . \sin\frac{m}{r}}.$$

$$\cos(N - N') - \cot N . \sin(N - N') = \frac{1 - \operatorname{tang} p . \operatorname{tang}\frac{m}{r} + \operatorname{tang} p^2 . \operatorname{tang}\frac{m^2}{r^2}}{\cos\frac{m}{r}}.$$

oder auch wenn man die Bogen für die Sinus, Cosinus und Tangenten setzt

$$1 - \tfrac{1}{2}(N - N')^2 - \cot N . (N - N') = 1 - \frac{m}{r}\operatorname{tang} p + \frac{mm}{rr}\operatorname{tang} p^2 + \tfrac{1}{2}\frac{mm}{rr}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$(N - N') + \tfrac{1}{2} \tan N . (N - N')^2$$
$$= \frac{m}{r} \tan p . \tan N - \frac{mm}{rr} \tan p^2 \tan N$$
$$- \tfrac{1}{2} \frac{mm}{rr} \tan N.$$

Setzt man hierin statt $\frac{m}{r}$ seinen Werth (§. 532.)

$$\frac{b}{r} \cos N + \frac{bb}{2rr} \tan p . \sin N^2$$

so kommt

$$(N - N') + \tfrac{1}{2} \tan N . (N - N')^2$$
$$= \frac{b}{r} \tan p . \sin N + \frac{bb}{2rr} \tan p^2 \sin N^2 \tan N$$
$$- . \frac{bb}{rr} \tan p^2 \cos N^2 \tan N$$
$$- \tfrac{1}{2} \frac{bb}{rr} \cos N^2 \tan N.$$

Nun ist aber schon früher (§. 532.) gefunden worden, dass:

$$\delta N = \frac{b}{2r} \tan p . \sin N$$
$$\frac{b}{r} = 2 \delta N \frac{\cot p}{\sin N}$$
$$\frac{bb}{rr} = 4 \delta N^2 . \frac{\cot p^2}{\sin N^2}$$

und durch Einführung dieses Werthes wird vorige Gleichung

$$(N - N') + \tfrac{1}{2} \tan (N - N')^2$$
$$= 2 \delta N + 2 \delta N^2 (\tan N - 2 \cot N - \cot N . \cot p^2).$$

Nimmt man daher

$$N - N' = 2 \delta N + \lambda \delta N^2,$$

so wird zur Bestimmung von λ die Gleichung statt finden

$$\lambda = - 2 (\cot p^2 + 2) \cot N$$

und man erhält endlich

$$N - N' = 2 \delta N - 2 \delta N^2 . \cot N (2 + \cot p^2).$$

wodurch die Differenz der Azimuthe gefunden ist.

§. 535.

Wir wollen als numerisches Beispiel ein Dreieck wählen, welches aus der vom Herrn Hofr. Gauss ausgeführten Gradmessung entnommen ist. Die drei Winkelpunkte seyen (fig. 24.) B, H, I, wo B den Brocken, H den Hohenhagen, und I den Inselberg bedeutet; HM ist der vom Hohenhagen nach Süden gezogene Meridian, und das ganze Dreieck liegt auf der östlichen Seite desselben. Die Messungen gaben für die Winkel, das Azimuth und die Seite BH folgende Resultate:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } B &= 53^\circ\ 6'\ 45''63 \\ H &= 86.\ 13.\ 58{,}43 \\ I &= 40.\ 39.\ 30{,}14 \\ BHN &= 58.\ 9.\ 2{,}39 \\ BH &= 35503{,}14 \text{ Toisen} \\ \log BH &= 4.5502668. \end{aligned}$$

Die Summe der drei Winkel des Dreiecks beträgt

$$180^\circ\ 0'\ 14''20,$$

also ist der sphärische Excess $= 14''20$, und wenn man das Dreieck als ein ebenes behandeln will, so muss von jedem der angegebenen Winkel $\frac{14''20}{3} = 4''73$ abgezogen werden. Hierdurch erhält man die reducirten Winkel

$$\begin{aligned} B &= 53^\circ\ 6'\ 40''90 \\ H &= 86.\ 13.\ 53{,}70 \\ I &= 40.\ 39.\ 25{,}41. \end{aligned}$$

Bezeichnet man dann die den Winkeln gegenüberstehenden Seiten durch die kleinen Buchstaben, so dass

$$BH = i, \quad BI = h, \quad IH = b$$

wird, so erhält man

$$h = \frac{i.\ \sin H}{\sin I}, \qquad b = \frac{i.\ \sin B}{\sin I};$$

$$\begin{aligned} \log i &= 4.5502668 \\ \sin H &= 9.9990600 \\ C.\ \sin I &= 0.1860656 \\ \hline & 4.7353924 = \log h \\ h &= 54374{,}14 \text{ Toisen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\, i &= 4.5502668 \\ sin\, B &= 9.9029834 \\ C.\; sin\, I &= 0.1860656 \\ \hline &\quad 4.6393158 = log\, b \end{aligned}$$

$b = 43582{,}86$ Toisen.

Man hat also die Entfernungen:

Hohenhagen nach Brocken = 35503,14 Toisen
Brocken nach Inselberg = 54364,14 —
Inselberg nach Hohenhagen = 43582,86 —

Den Halbmesser der Kugel auf welcher die Dreiecke liegen, kann man nach §. 243.

$r = 3266400$ Toisen

setzen. Hierdurch werden die drei Seiten, in Bogensecunden ausgedrückt

$i = 2241''93, \quad log\, i = 3.3506225$
$h = 3433{,}59, \quad log\, h = 3.5357481$
$b = 2752{,}15, \quad log\, b = 3.4396715.$

Nennt man die auf den Meridian reducirte Seite i, d. h. $B'H$, i', so wird (§. 532.)

$$i' = i.\; cos(N - \delta N)$$

$$\delta N = \tfrac{1}{2}.\; \frac{i}{r}\; tang\, p.\; sin\, N$$

wo man die Polhöhe

$p = 51°\ 28'\ 31''38$
$N = 238.\ 9.\ 2{,}39$

hat. Es wird daher

$$\begin{aligned} log\, \frac{i}{r} &= 3.3506225 \\ tang\, p &= 0.0990117 \\ sin\, N &= 9.9291319\, n \\ C.\; log\, 2 &= 9.6989600 \\ \hline &\quad 3.0777361\, n = log\, \delta N \end{aligned}$$

$\delta N = -\ 1196''01 = -\ 19'\ 56''01$
$N - \delta N = 238°\ 28'\ 58''40$

$$\begin{aligned} log\, i &= 4.5502668 \\ cos(N - \delta N) &= 9.7182967\, n \\ \hline &\quad 4.2685635\, n = log\, i' \end{aligned}$$

$i' = -\ 18559{,}38$ Toisen.

Reducirt man dies auf Bogensecunden, so ergiebt sich $i' = 1171''98 = 19'\ 31''98$, und addirt man dies zur Polhöhe des Hohenhagen, so erhält man die

Polhöhe des Brockens = 51° 48′ 3″36 = p'. Das Azimuth N' des Hohenhagen vom Brocken aus, findet sich dann durch die Formel

$$\sin N = \frac{\sin N . \cos p}{\cos p'},$$

wo N' immer um ungefähr 180° von N verschieden seyn muss. Man findet

$$N' = 58° \; 49' \; 17''35.$$

Addirt man zu den Azimuth des Brockens vom Hohenhagen aus gesehen, den Winkel *BHI*, so erhält man

	238° 9′ 2″39
	86. 13. 58,43
	324. 23. 0,82,

welches das Azimuth des Inselberges ist. Dies giebt die auf den Meridian reducirte Seite *HI* oder *b*

HI′ = 35553,94 Toisen

also die ganze Länge *B′I′* =

B′H =	18559,38	Toisen
HI′ =	35553,94	—
B′I′ =	54114,32	Toisen.

Zieht man von dem Azimuth des Hohenhagen vom Brocken aus gesehen, den Winkel *HBI* ab, so bleibt das Azimuth des Inselberges vom Brocken aus

= 5° 42′ 31″72

und hierdurch erhält man die auf den Meridian reducirte Seite *BI*,

BI′ = 54110,14 Toisen

und wenn man aus beiden das Mittel nimmt

B′I′ = 54111,73 Toisen.

Auf diese Weise geht man immer von einem Dreieck zum andern fort, bis die ganze Reihe durch doppelte Rechnungen auf den Meridian reducirt ist, wo dann an den beiden Enden die Polhöhen genau gemessen werden um die Amplitude (§. 223.) des ganzen Bogens zu erhalten. Auch ist es vortheilhaft an einigen Zwischenpunkten das Azimuth und die Polhöhen wirklich zu messen, und nicht aus den geodätischen Messungen zu berechnen.

§. 536.

Hat man die Winkel des Dreiecks nicht auf einem Horizontalkreise gemessen, sondern mit einem Kreise, dessen Ebene durch die beiden andern Punkte des Dreiecks geht, so erfordert dieser Winkel eine Correction, die die Reduction auf den Horizont genannt wird. Hierzu ist es nöthig, dass man zugleich die Zenithdistanzen der beiden Punkte kennt. Es sey (fig. 25.) Z das Zenith des Beobachters, M und M' die Projectionen der beiden Punkte auf die Himmelskugel, ZM, ZM' ihre Zenithdistanzen, so ist MM' der gemessene Winkel, MZM' der auf den Horizont reducirte. Bezeichnet man die Zenithdistanzen durch $90-\zeta$, $90-\zeta'$, den gemessenen Winkel durch A, den reducirten durch A', so hat man im sphärischen Dreieck MZM'

$$\cos A = \sin\zeta.\ \sin\zeta' + \cos\zeta.\ \cos\zeta' \cos A'$$

also hieraus

$$\cos A' = \frac{\cos A}{\cos\zeta.\ \cos\zeta'} - \operatorname{tang}\zeta.\ \operatorname{tang}\zeta'.$$

Man sieht aus dieser Formel, dass wenn ζ und ζ' als unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen werden, die Differenz zwischen A und A' ein unendlich kleines der zweiten Ordnung seyn wird. Setzt man also, da die Zenithdistanzen immer nur wenig von 90° verschieden sind

$$A' = A + \delta A$$
$$\cos\zeta = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\zeta^2$$
$$\cos\zeta' = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\zeta'^2$$

so kommt, wenn man die Potenzen von δA vernachlässigt

$$\begin{aligned}\sin A'\ \delta A &= tg\,\zeta.\ tg\,\zeta' - \tfrac{1}{2}\cos A\,(tg\,\zeta^2 + tg\,\zeta'^2)\\ &= tg\,\zeta.\ tg\,\zeta'\,(1-\cos A) - \tfrac{1}{2}\cos A\,(tg\,\zeta - tg\,\zeta')^2\\ &= 2tg\,\zeta.\ tg\,\zeta' \sin\tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{2}\cos A\,\frac{\sin(\zeta-\zeta')^2}{\cos\zeta^2\ \cos\zeta'^2}\end{aligned}$$

folglich

$$\delta A = \operatorname{tang}\zeta.\ \operatorname{tang}\zeta' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\cot A.\ \frac{\sin(\zeta-\zeta')^2}{\cos\zeta^2\ \cos\zeta'^2}.$$

oder da man den Nenner $\cos\zeta^2 \cos\zeta'^2 = 1$ setzen kann

$$\delta A = \operatorname{tang}\zeta.\ \operatorname{tang}\zeta' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\cot A \sin(\zeta-\zeta')^2.$$

Um δA in Secunden zu erhalten, multiplicirt man gleich jedes Glied mit der bekannten Zahl 206265. Es sey z. B. $\zeta = 1^\circ$, $\zeta' = 1^\circ\ 30'$, $A = 60^\circ$, so kommt

$$\begin{array}{rlrl}
tang\,\zeta = & 8.24192 & sin(\zeta - \zeta')^2 = & 5.88168 \\
tang\,\zeta' = & 8.41807 & cot\,A = & 9.76144 \\
tang\,\tfrac{1}{2}A = & 9.76144 & C.\,log\,2 = & 9.69897 \\
log\,206265 = & \underline{5.31443} & log\,206265 = & \underline{5.31443} \\
 & \underline{1.73586} & & \underline{0.65652} \\
 & 54''43 & & 4''53
\end{array}$$

also $\delta A = 54''43 - 4''53 = 49''90$, und der auf den Horizont reducirte Winkel

$$= 60^\circ\ 0'\ 49''90.$$

§. 537.

Aus den gemessenen Zenithdistanzen kann man auch die Höhe des einen Winkelpunktes des Dreiecks über dem andern berechnen. Hierbei ist aber zu bemerken, dass wenn man einige Genauigkeit erlangen will, es durchaus nöthig ist, die Zenithdistanz von beiden Punkten aus zu messen, (obgleich theoretisch betrachtet, nur eine einzige erforderlich ist wenn man den Abstand der beiden Oerter von einander kennt) weil die Brechung des Lichtstrahls nahe an der Erde, oder die terrestrische Refraction gar zu veränderlich ist, als dass man sie mit Zuverlässigkeit aus den theoretisch berechneten Formeln entnehmen könnte. Es seyen (fig. 26.) A und B die beiden Beobachtungsörter, AA', BB' die in denselben errichteten Normalen, welche verlängert sich in C schneiden (da wir hierbei die Erde als eine Kugel betrachten können), die krumme Linie ADB bedeute den Weg des Lichtstrahls, $A''A$, $B''B$ seyen die Berührungslinien an ADB in den Endpunkten A und B, welche die gleichen Winkel $A''AB$, $B''BA$ mit der Linie AB bilden. Dann sind $A''AB$, $B''BA$ die Refractionen, welche wir durch ρ bezeichnen. Nennt man nun die gemessenen Zenithdistanzen $A'AA''$, $B'BB''$, $90 - \zeta$, $90 - \zeta'$, so sind die wahren Zenithdistanzen

$$A'AB = 90 - \zeta + \rho$$
$$B'BA = 90 - \zeta' + \rho$$

und wenn man den Winkel C am Mittelpunkte der Kugel durch α bezeichnet, so muss

$$(90 + \zeta - \rho) + (90 + \zeta' - \rho) + \alpha = 180°$$

seyn, weil $BAC + ABC + ACB = 180°$ ist. Diese Gleichung giebt

$$\rho = \frac{\zeta + \zeta' + \alpha}{2}$$

folglich wird

$$A'AB = 90 + \frac{\alpha + \zeta' - \zeta}{2}$$

$$B'BA = 90 + \frac{\alpha + \zeta - \zeta'}{2}.$$

Bezeichnet man nun die Höhen der Punkte A, B über der Erdoberfläche durch h, h', den Halbmesser der Erde durch r, die Entfernung AB durch a, so hat man im Dreieck ABC

$$a : \sin\alpha = r + h : \cos\frac{\alpha + \zeta - \zeta'}{2}$$

$$a : \sin\alpha = r + h' : \cos\frac{\alpha + \zeta' - \zeta}{2}.$$

und hieraus

$$h' - h = \frac{a}{\sin\alpha}\left[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \zeta' - \zeta) - \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \zeta - \zeta')\right]$$

$$= \frac{2a\,\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta')}{\sin\alpha}\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha = a.\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'),$$

indem man $\cos\frac{1}{2}\alpha = 1$ setzt.

§. 538.

Wir haben nun noch zu zeigen, auf welche Weise das Azimuth gemessen werden kann, welches bei der Reduction der Dreiecksseiten auf den Meridian erforderlich ist. Kennt man die Lage der Mittagslinie an dem Beobachtungsorte, so braucht man nur vermittelst des Theodoliten den Horizontalwinkel zwischen dem Meridianzeichen und dem einen Dreieckspunkte zu messen, so wird sein Azimuth gefunden seyn. Ist aber die Lage der Mittagslinie unbekannt, so kann man den Horizontalwinkel zwischen dem Dreieckspunkte und der Sonne zu irgend einer

Zeit messen, und zugleich die Höhe der Sonne nehmen. Dann lässt sich das Azimuth der Sonne aus dieser Höhe, der Polhöhe des Ortes und der Declination der Sonne berechnen; das Azimuth der Sonne mit dem gemessenen Horizontalwinkel verglichen, giebt dann auch das Azimuth des Dreieckspunktes. Es sey z. B. (fig. 1.) *HZPR* der Meridian, *Z* das Zenith, *P* der Pol, in *S* die Sonne, in *D* der auf die Himmelskugel projicirte Dreieckspunkt, *HZD* das Azimuth desselben, *HZS* das Azimuth der Sonne, so ist *DZS* der gemessene Horizontalwinkel. Bezeichnet man dann die Höhe der Sonne durch *h*, die Polhöhe durch *p*, die Declination der Sonne durch δ, das Azimuth derselben durch *A*, so hat man im Dreieck *SZP*

$$\sin\delta = \sin p.\ \sin h - \cos p.\ \cos h.\ \cos A$$

und hieraus

$$\cos A = \frac{\sin p.\ \sin h - \sin\delta}{\cos p.\ \cos h},$$

wodurch das Azimuth der Sonne gefunden ist; zieht man dann hiervon den Horizontalwinkel ab, so bleibt das Azimuth des Objects *HZD*.

Druckfehler.

Seite	193.	Zeile	22	statt	19,21 *u*	liess	10,21 *u*
—	202.	—	24	—	3260920,3	—	3260869,6
—	364.	—	24	—	$\frac{42}{321}$	—	$\frac{42}{123}$
—	366.	—	4 v. u.	—	$\sin\varphi$	—	$\cos\varphi$.

Druck von Fried. Ernst Huth.

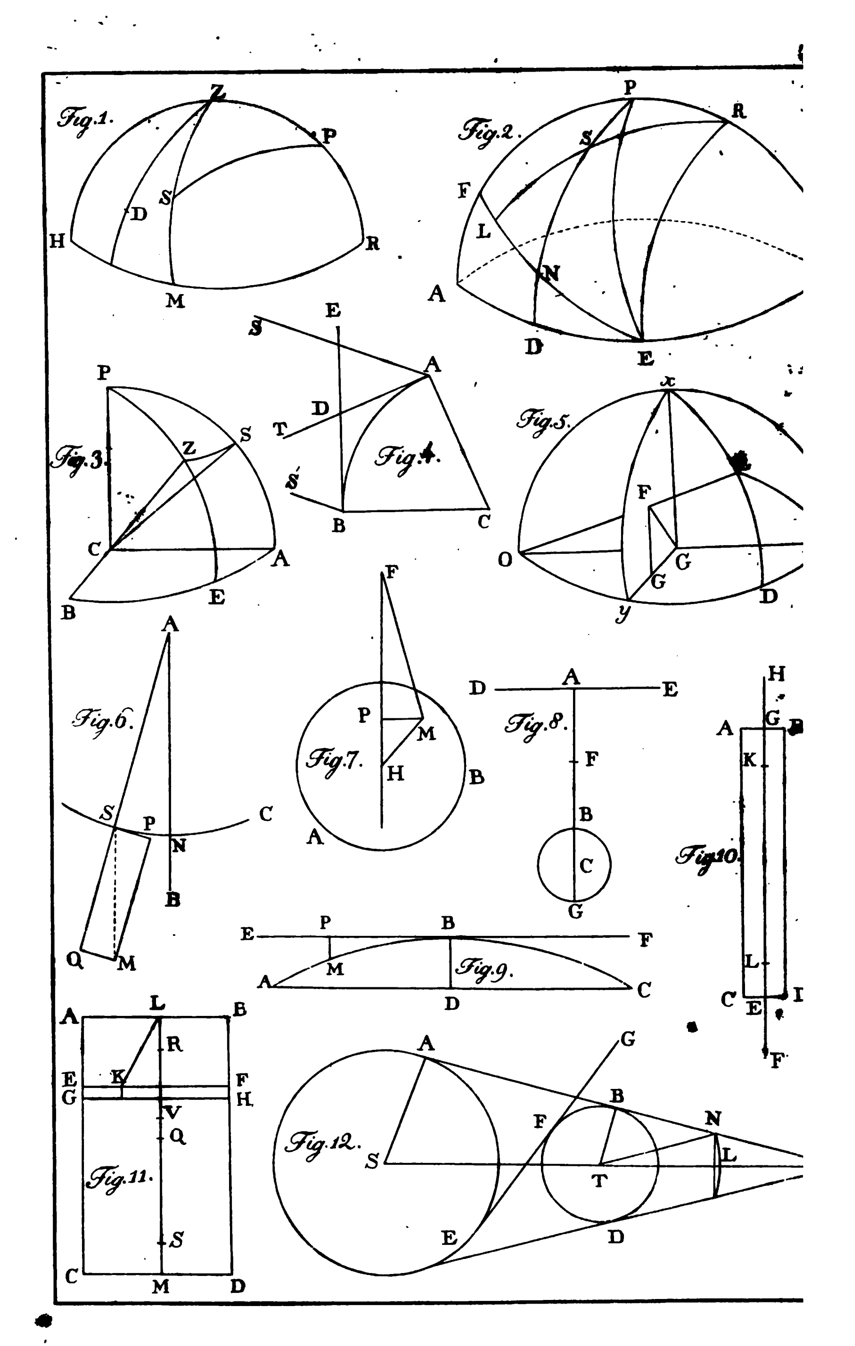


Fig.1.
Z
P
S
D
H
R
M
Fig.2.
P
R
S
F
L
N
A
D
E
E
S
A
T
D
S
Fig.4.
B
C
P
Fig.3.
Z
S
C
A
B
E
Fig.5.
x
F
O
G
G
y
D
A
Fig.6.
S
P
C
N
B
Q
M
F
P
M
Fig.7.
H
B
A
D
A
E
Fig.8.
F
B
C
G
H
A
G
K
Fig.10.
L
C
E
I
F
E
P
B
F
M
Fig.9.
A
D
C
A
L
B
R
E
K
F
G
H
V
Q
Fig.11.
S
C
M
D
A
G
B
F
N
Fig.12.
S
T
L
E
D

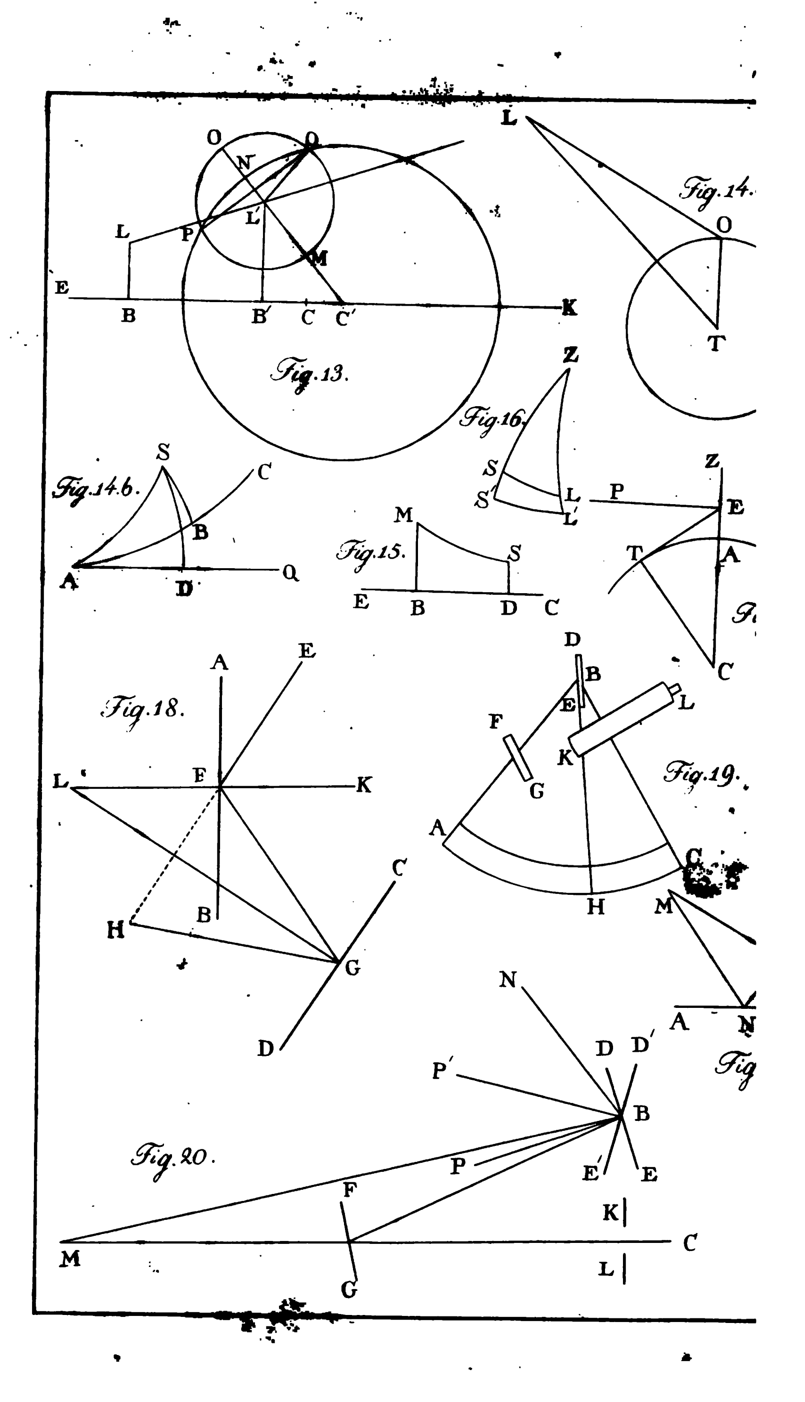
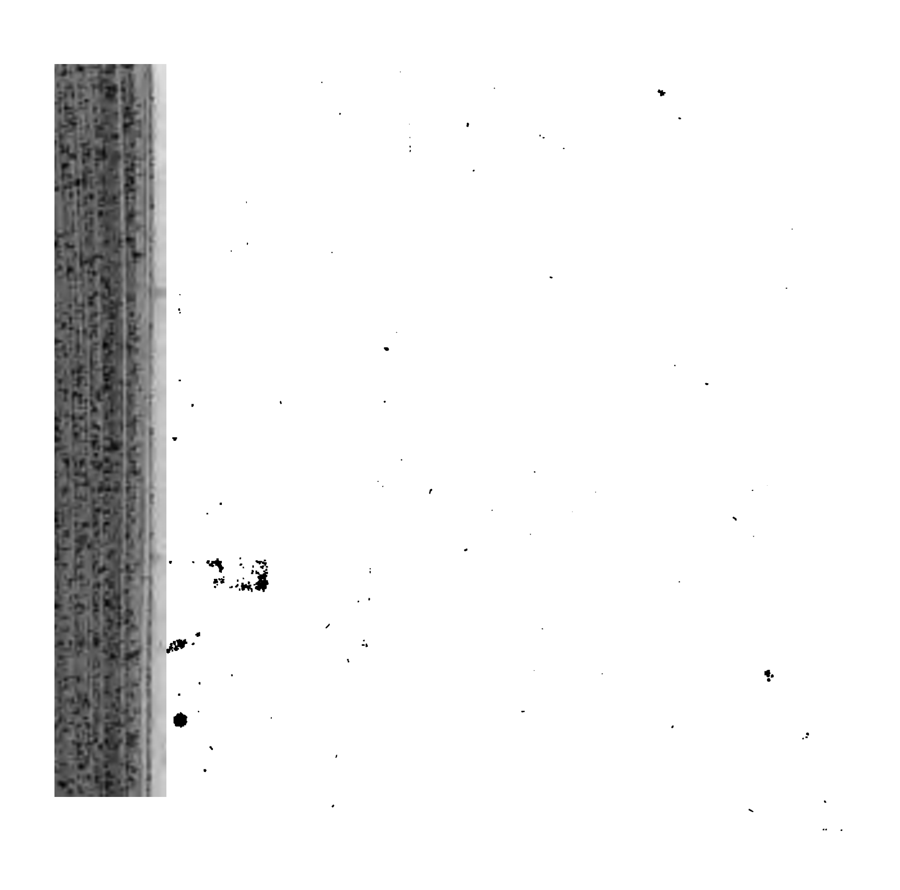
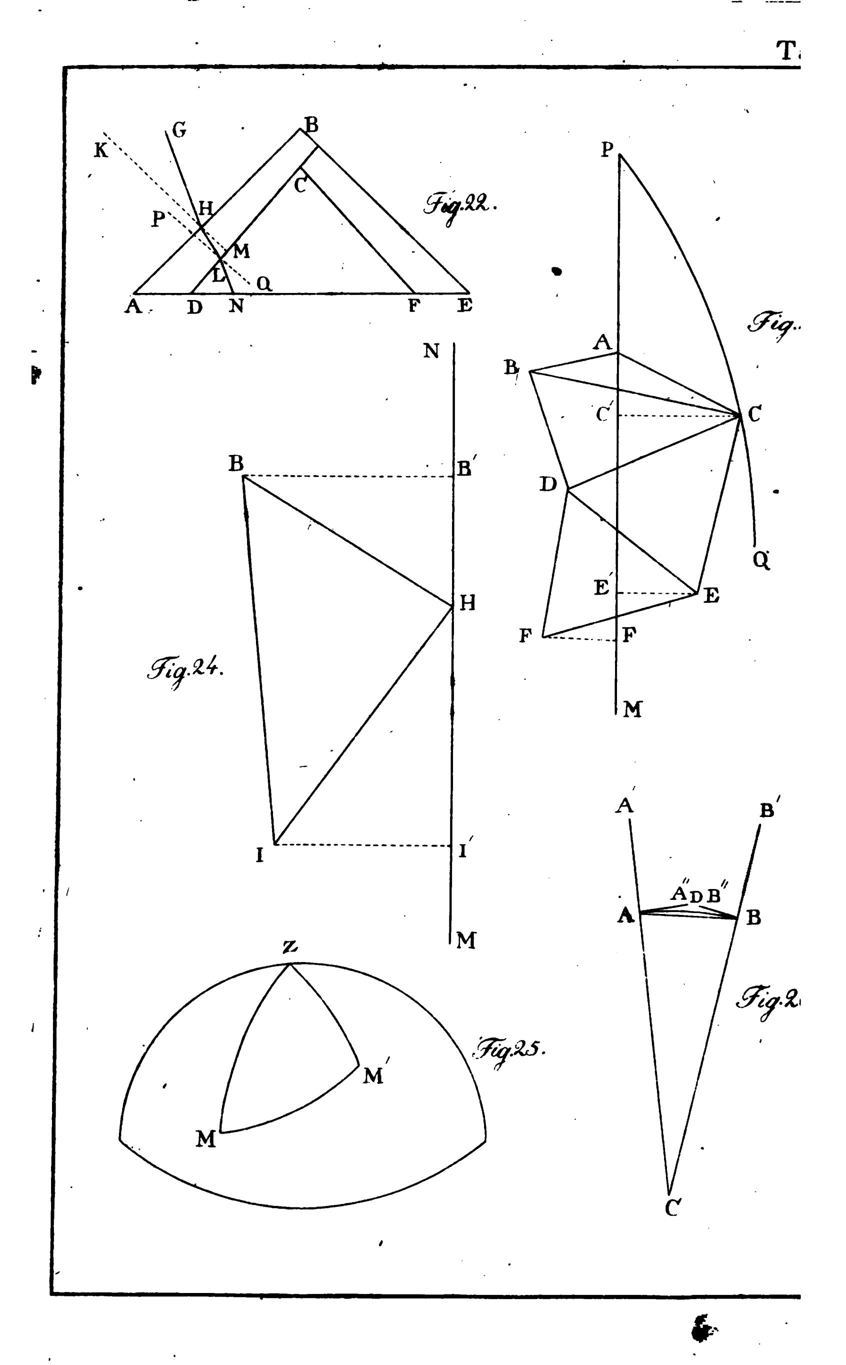


Fig. 13.
O
N
Q
L′
L
P
M
E
B
B′
C
C′
K
L
Fig. 14.
O
T
Fig. 14. b.
S
C
B
A
D
Q
Fig. 16.
Z
S
S′
L
L′
Fig. 15.
M
S
E
B
D
C
Z
P
E
T
A
C
Fig. 18.
A
E
L
F
K
B
H
G
C
D
Fig. 19.
D
B
E
L
F
K
G
A
C
H
M
A
N
N
D
D′
P′
B
P
E′
E
Fig. 20.
F
K
M
C
L
G




K
G
B
C
H
P
M
L
Q
A
D
N
F
E
Fig.22.
P
Fig.
A
B
C
C
D
Q
E
E
F
F
M
N
B
B
H
Fig.24.
I
I
M
A
B
A
D
B
A
B
Fig.2
C
Z
Fig.25.
M
M





